Revista de la Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
V 11 N°2 julio-diciembre de 2022 • ISSN-e 2357-5749 • Artículo Investigación • Páginas 100 a 147
DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v11n2.99198

GRÁFICOS EXISTENCIALES PARACONSISTENTES ALFAK[a]

ALFAK PARACONSISTENT EXISTENTIAL GRAPHS

MANUEL SIERRA-ARISTIZÁBAL[b] *

Recibido 25-10-2021, aceptado 06-04-2022, versión final 16-05-2022
Artículo Investigación

RESUMEN: En este trabajo, se presentan los gráficos existenciales para el cálculo proposicional paraconsistente, $KT4P$. Este sistema deductivo, es un fragmento de la lógica proposicional modal S4, y se construye a partir del cálculo proposicional clásico positivo, junto con un operador de negación débil. El sistema $KT4P$, se encuentra caracterizado por una semántica de mundos posibles, además, $KT4P$ es paraconsistente, es decir, no colapsa en la presencia de contradicciones. Los gráficos existenciales para este sistema paraconsistente, se presentan en el estilo de los gráficos alfa de Charles Sanders Peirce, junto con reglas para bucles y rizos similares a las presentadas recientemente por Arnold Oostra, para los gráficos existenciales intuicionistas. Todas las pruebas, son presentadas de manera completa, rigurosa y detallada.
PALABRAS CLAVE: Gráficos existenciales; lógica paraconsistente; semántica de mundos posibles; afirmación fuerte; negación débil.

ABSTRACT: In this paper, the existential graphs for the paraconsistent propositional calculus, $KT4P$, are presented. This deductive system is a fragment of the modal propositional logic S4, and is constructed from the positive classical propositional calculus, together with a weak negation operator. The $KT4P$ system is characterized by a semantics of possible worlds, in addition, $KT4P$ is paraconsistent, that is, it does not collapse in the presence of contradictions. The existential graphs for this paraconsistent system are presented in the style of the alpha graphics of Charles Sanders Peirce (late nineteenth century), along with rules for loops and scroll similar to those recently introduced (early twenty-first century) by Arnold Oostra, for intuitionistic existential graphics. All evidence is presented in a complete, rigorous and detailed manner.
KEYWORDS: Existential graphs; paraconsistent logic; semantics of possible worlds; strong affirmation; weak negation.

1. INTRODUCCIÓN

Los gráficos existenciales, alfa, beta y gama, fueron creados por Charles Sanders Peirce a finales del siglo XIX, ver Roberts (1992) y Peirce (1965). Los gráficos alfa corresponden al cálculo proposicional clásico, los gráficos beta corresponden a la lógica clásica de relaciones de primer orden. Los gráficos gama fueron presentados por Peirce y, posteriormente, extendidos por Jay Zeman, construyendo gráficos existenciales

[a]Sierra-Aristizábal, M. (2022). Gráficos existenciales paraconsistentes AlfaK. *Rev. Fac. Cienc.*, 11 (**2**), 100–147. DOI: https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v11n2.99198

[b]Universidad EAFIT, ORCID: 0000-0001-8157-2577

*Autor para la correspondencia: msierra@eafit.edu.co, mahesiar@outlook.com

para las lógicas modales S4, S4.2 y S5 en Zeman (1963). Por otro lado, Geraldine Brady y Todd Trimble, han propuesto modelos categóricos para los gráficos existenciales alfa en Brady & Trimble (2000). Recientemente, Arnold Oostra presentó gráficos existenciales para el cálculo proposicional intuicionista en Oostra (2010) y Oostra (2021), para el cálculo de relaciones intuicionista en Oostra (2011), y para las lógicas modales $S4$, $S4.2$ y $S5$, versiones intuicionistas, en Oostra (2012).

Los gráficos existenciales tienen una extraordinaria característica, citando a Fernando Zalamea:
"La axiomatización del cálculo proposicional clásico y de la lógica clásica de primer orden puramente relacional, con las mismas reglas, por medio de los sistemas Alfa y Beta, explicita raíces técnicas comunes desapercibidas en las presentaciones tradicionales de la lógica clásica. En efecto, las mismas reglas detectan, en el contexto del lenguaje Alfa, un manejo proposicional, y en el contexto extendido del lenguaje Beta, un manejo cuantificacional. Esta situación es toda una revelación en la historia de la lógica. Constituye, de manera precisa, la única presentación conocida de los cálculos clásicos que utiliza globalmente las mismas reglas axiomáticas para controlar el manejo local de los conectivos y de los cuantificadores" en Zalamea (2010).

En el presente trabajo, se presentan los gráficos existenciales para el cálculo proposicional paraconsistente $KT4P$. Este sistema deductivo, es un fragmento de la lógica proposicional modal $S4$, y se construye a partir del cálculo proposicional clásico positivo (es decir, el cálculo proposicional clásico sin los axiomas para la negación clásica), junto con un operador de negación débil (el cual, semánticamente se comporta como la posibilidad de la negación clásica). El sistema $KT4P$, se encuentra caracterizado por una semántica de mundos posibles, y además, es paraconsistente (es decir, no colapsa en la presencia de contradicciones). Los gráficos existenciales para este sistema paraconsistente, se presentan en el estilo de los gráficos alfa de Charles Sanders Peirce, junto con reglas para bucles y rizos, similares a las presentadas por Arnold Oostra, para los gráficos existenciales intuicionistas. Todas las pruebas son presentadas de manera completa, rigurosa y detallada.

La caracterización semántico deductiva de los gráficos existenciales paraconsistentes, se logra mediante la siguiente estrategia: En la sección 2, se presenta el sistema deductivo de lógica proposicional modal $KT4P$. En la sección 3, se presenta la semántica de mundos posibles para este sistema. En la sección 4, se presenta la caracterización de $KT4P$ con la semántica de la sección 3, esto se logra en la proposición 4.8 (los teoremas de $KT4P$ son las fórmulas válidas de la semántica y solo ellas). En la sección 5, se presenta la versión inicial de los gráficos existenciales paraconsistentes, el sistema AlfaK. En la sección 6, se presenta la equivalencia entre $KT4P$ y AlfaK, inicialmente, en la proposición 6.2, se prueba que los teoremas de $KT4P$ son teoremas gráficos de AlfaK, en la proposición 6.4, se prueba que los teoremas gráficos de $KT4P$ son válidos en la semántica de mundos posibles, finalmente, en la proposición 6.8, se prueba que los teoremas de $KT4P$ son exactamente los teoremas gráficos. En la sección 7, se presenta el sistema AlfaK_P, de gráficos existenciales paraconsistentes, en el formato original de Peirce (borrado en regiones pares, escritura en regiones impares, iteración, desiteración), con reglas adicionales para los rizos y bucles, en la proposición 7.4, se prueba que los teoremas gráficos de AlfaK son teoremas gráficos de AlfaK_P, en la proposición 7.5, se prueba la recíproca, concluyéndose en la proposición 7.6 la equivalencia de los mismos. En la sección 8, se presentan algunas conexiones de AlfaK_P con los gráficos existenciales gama de Peirce y con el sistema Gamma-LD presentado en Sierra (2021), también se define un operador de incompatibilidad, como versión del operador de buen comportamiento en las lógicas paraconsistentes, finalmente, se utiliza AlfaK para dar solución a una versión de la paradoja del mentiroso.

2. SISTEMA DE LÓGICA MODAL KT4P

En esta sección, se presenta el sistema deductivo de lógica proposicional modal $KT4P$, sus conexiones con el cálculo proposicional clásico, y algunos de sus teoremas.

Definición 2.1. *(Fórmulas de $KT4P$, negación local, afirmación fuerte y equivalencia material). El conjunto FK, de fórmulas de $KT4P$, se construye a partir de un conjunto FA, de fórmulas atómicas, y de la constante λ, de la siguiente manera.*

1. $P \in FA$ *implica* $P \in FK$.
2. $\lambda \in FK$
3. $X \in FK$ *implica* $-X \in FK$.
4. $X, Y \in FK$ *implica* $X \bullet Y, X \cup Y, X \supset Y \in FK$.
5. *Solo* $1, 2, 3$ *y* 4 *determinan* FK.

NL (Negación local) $\sim X = X \supset -\lambda$. *AF (Afirmación fuerte)* $+X = \sim -X = -X \supset -\lambda$.
EQ (Equivalencia material) $X \equiv Y = (X \supset Y) \bullet (Y \supset X)$

Definición 2.2. *(Sistema deductivo $KT4P$). El sistema $KT4P$ consta de los axiomas (donde $X, Y, Z \in FK$):*

Axλ. λ

Ax1. $X \supset (Z \supset X)$

Ax2. $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$.

Ax3. $X \supset (X \cup Y)$.

Ax4. $X \supset (Y \cup X)$.

Ax5. $(X \supset Y) \supset ((Z \supset Y) \supset ((X \cup Z) \supset Y))$.

Ax6. $(X \bullet Y) \supset X$.

Ax7. $(X \bullet Y) \supset Y$.

Ax8. $(X \supset Y) \supset ((X \supset Z) \supset (X \supset (Y \bullet Z)))$.

Ax9. $((X \supset Y) \supset X) \supset X$.

Ax10. $X \cup -X$.

Ax11. $(-X \supset -\lambda) \supset (-Y \supset -(X \supset Y))$.

Ax12. $-(-X \supset -\lambda) \supset -X$.

Ax13. $(-X \supset -\lambda) \supset (-X \supset Y)$.

Ax14. *Si* X *es un axioma entonces* $-X \supset -\lambda$ *es un axioma.*

Como única regla de inferencia se tiene el modus ponens Mp*: de* X *y* $X \supset Z$ *se infiere* Z.

Observación 2.1. *El axioma* $Ax\lambda$ *puede omitirse, y simplemente se define* $\lambda = P \supset P$.

Definición 2.3. *(Teoremas de* $KT4P$*). Sean* $X, X_1, \ldots, X_n \in FK$. X *es un teorema de* $KT4P$*, denotado* $X \in TK$*, si existe una demostración de* X *a partir de los axiomas utilizando la regla* Mp*, es decir,* X *es la última fila de una secuencia finita de líneas, en la cual, cada una de las líneas es un axioma, o se infiere de dos filas anteriores, utilizando la regla de inferencia* Mp*. El número de líneas de la secuencia es referenciado como la longitud de la demostración de* X. Y *es un teorema (o consecuencia) de* $\{X_1, \ldots, X_n\}$*, denotado* $Y \in TK \cup \{X_1, \ldots, X_n\}$*, si existe una demostración de* Y*, a partir de los axiomas y de los supuestos* $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Hecho 2.1. *(Teorema de deducción en* $KT4P$*). Sean* $X, Y, X_1, \ldots, X_n \in FK$.

a. *TD (Teorema de deducción): Si* Y *es consecuencia de* $\{X, X_1, \ldots, X_n\}$ *en* $KT4P$*, entonces* $X \supset Y \in TK \cup \{X_1, \ldots, X_n\}$

b. $Ax11 \supset (+(X \supset Y) \supset (+X \supset +Y))$.

c. $Ax12 \equiv (-+X \supset -X)$.

d. $Ax13 \equiv (+X \supset (-X \supset Y))$.

e. $Ax14$ *equivale a,* X *es un axioma implica* $+X$ *es un axioma.*

Prueba. Parte a. Se prueba utilizando inducción matemática sobre la longitud, L, de la demostración de Y a partir de los supuestos $\{X, X_1, \ldots X_n\}$.
Paso base. $L = 1$. Se tienen tres casos, Y es un axioma, Y es X o $Y \in \{X_1, \ldots, X_n\}$, en el primer caso resulta que $Y \in TK$, utilizando $Ax1$ $Y \supset (X \supset Y)$ y Mp se concluye que $X \supset Y \in TK$. En el segundo caso, por $Ax2$ se tiene $(X \supset ((X \supset X) \supset X)) \supset ((X \supset (X \supset X)) \supset (X \supset X)) \in TK$, por $Ax1$ se tienen $X \supset ((X \supset X) \supset X) \in TK$ y $X \supset (X \supset X) \in TK$, aplicando Mp dos veces se deriva $X \supset X \in TK$, y como X es Y se concluye que $X \supset Y \in TK$. Lo anterior, junto con el tercer caso, implica que $Y \in TK \cup \{X_1, \ldots, X_n\}$.
Paso inductivo. Como hipótesis inductiva se tiene que, si la longitud de la demostración de W a partir de $\{X, X_1, \ldots, X_n\}$ es menor que L entonces $X \supset W \in TK \cup \{X_1, \ldots, X_n\}$.
Si la longitud de la demostración de Y a partir de $\{X, X_1, \ldots, X_n\}$ es L, se consideran cuatro casos, Y es un axioma, $Y \in \{X_1, \ldots, X_n\}$, Y es X o Y se infiere de fórmulas anteriores utilizando Mp. En los tres primeros casos se procede como en el paso base. En el cuarto caso, se tienen Z y $Z \supset Y$ (ambas conscuencias de

$\{X,X_1,\ldots,X_n\}$), por la hipótesis inductiva se infiere que $X \supset Z \in TK \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$ y $X \supset (Z \supset Y) \in TK \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$. Utilizando $Ax2$ $(X \supset (Z \supset Y)) \supset ((X \supset Z) \supset (X \supset Y)) \in TK \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$, por Mp se sigue $(X \supset Z) \supset (X \supset Y) \in TK \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$, de nuevo por Mp, se concluye $X \supset Y \in TK \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$. Por el principio de inducción matemática, se ha probado que, si Y es consecuencia de $\{X,X_1,\ldots X_n\}$ en $KT4P$, entonces $X \supset Y \in TK \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$.

Parte b. Supóngase que $+(X \supset Y)$ y $+X$. Por $Ax11$ y definición de $+$ se obtiene $+X \supset (-Y \supset -(X \supset Y))$, aplicando Mp se sigue $-Y \supset -(X \supset Y)$, como se tiene $+(X \supset Y)$, según definición de $+$ significa $-(X \supset Y) \supset -\lambda$ utilizando $Ax1$ y Mp se infiere $-Y \supset (-(X \supset Y) \supset -\lambda)$, por $Ax2$ y Mp se deriva $(-Y \supset -(X \supset Y)) \supset (-Y \supset -\lambda)$, como se tiene el antecedente, por Mp se deduce $-Y \supset -\lambda$, lo cual por la definición de $+$ es $+Y$. Aplicando la parte a (TD) dos veces, se concluye que $+(X \supset Y) \supset (+X \supset +Y) \in TK$.

Partes c, d y e. Consecuencia directa de aplicar la definición de $+$ en los axiomas 12, 13 y 14. □

Proposición 2.1. *(Afirmación fuerte de los teoremas). Sea $X \in FK$.*
$X \in TK$ implica $+X \in TK$.

Prueba. Supóngase que $X \in TK$, se probará que $+X \in TK$, por inducción sobre la longitud de la demostración de X.

Paso base. La longitud de la demostración de X es 1, es decir X es un axioma, pero si X es un axioma entonces, por $Ax14$, $+X$ es axioma, y, por lo tanto, $+X \in TK$.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva, se tiene que si la longitud de la demostración de Y es menor que L entonces $+Y$ es un teorema. Supóngase que la demostración de X tiene longitud $L > 1$. Se tiene entonces que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores utilizando la regla de inferencia Mp. En el primer caso se procede como en el paso base. En el segundo caso se tienen, para alguna fórmula Z, demostraciones de $Z \supset X$ y de Z, ambas de longitud menor que L. Aplicando la hipótesis inductiva resulta que $+(Z \to X)$,$+Z \in TK$. Por $Ax11$ y el Hecho 1b se tiene $+(Z \supset X) \supset (+Z \supset +X)$, aplicando dos veces la regla Mp resulta que $+X \in TK$. Por lo que, según el principio de inducción matemática, se ha probado $X \in TK$ implica $+X \in TK$. □

Hecho 2.2. *($KT4P$ incluye CPC). Sea $X \in FK$.*

a. $\sim X \supset (X \supset Y) \in TK$.

b. $(\sim X \supset X) \supset X \in TK$.

c. Los teoremas del cálculo proposicional clásico, CPC, son teoremas de $KT4P$.

Prueba. Parte a. Supóngase que $\sim X$, es decir $X \supset -\lambda$. Supuesto 2, X, por Mp se infiere $-\lambda$. Por $Ax\lambda$ se tiene que $\lambda \in TK$, por la proposición 2.1 se sigue que $+\lambda \in TK$. Por $Ax13$ y el Hecho 2.1d se tiene $+\lambda \supset (-\lambda \supset Y)$, aplicando Mp dos veces se infiere Y. Por TD (Hecho 2.1 a) dos veces se concluye $\sim X \supset (X \supset Y)$.

Parte b. Supóngase que $\sim X \supset X$, por definición de $\sim$, se sigue $(X \supset -\lambda) \supset X$, por $Ax9$ $((X \supset -\lambda) \supset X) \supset X$

y Mp se sigue X. Aplicando TD (Hecho 2.1 a), se concluye que $(\sim X \supset X) \supset X$.
Parte c. Los axiomas $Ax1,\ldots,Ax9$, junto con los Hechos 2.2 a y 2.2 b, y con la regla de inferencia Mp, constituyen una axiomatización del cálculo proposicional clásico, *CPC*, presentada por Alfred Tarski en 1952, ver Doop (1969). Por lo tanto, los teoremas del cálculo proposicional clásico, *CPC*, son teoremas de $KT4P$. □

Hecho 2.3. *(Resultados Clásicos en $KT4P$). En lo que sigue se utilizaran los siguientes resultados del cálculo proposicional clásico CPC, los cuales, por el Hecho 2.2c, valen en $KT4P$ (para detalles de las pruebas en CPC ver Sierra (2010) y Hamilton (1978)).*

Sean $X,Y,Z \in FK$.

$I\bullet$. Introducción de $\bullet$: de X y Y se infiere $X\bullet Y$.	*$E\bullet$. Eliminación de $\bullet$: de $X\bullet Y$ se infieren X y Y.*
SH. Silogismo hipotético: de $X\supset Y$ y $Y\supset Z$ se infiere $X\supset Z$.	*Exp. Exportación: $(X\supset(Y\supset Z))\equiv((X\bullet Y)\supset Z)$.*
$N\cup$. Negación de $\cup$: $\sim(X\cup Y)\equiv(\sim X\bullet\sim Y)$.	*$N\bullet$. Negación de $\bullet$: $\sim(X\bullet Y)\equiv(\sim X\cup\sim Y)$.*
$N\supset$. Negación de $\supset$: $\sim(X\supset Y)\equiv(X\bullet\sim Y)$.	*Tras. Transposición: $(X\supset Y)\equiv(\sim Y\supset\sim X)$.*
Imp. Implicación: $(X\supset Y)\equiv(\sim X\cup Y)$.	*Id. Principio de identidad : $X\supset X$.*
PR. Principio de retorsión: de $(\sim X\supset X)\equiv X$.	*DN. Doble negación: $X\equiv\sim\sim X$.*

DI. Demostración indirecta: Si X implica $Y\bullet\sim Y$, entonces, se infiere $\sim X$.

Definición 2.4. *(Posibilidad en $KT4P$). Para $X \in FK$. $\otimes X = \sim + \sim X = (-(X\supset -\lambda)\supset -\lambda)\supset -\lambda$.*

Hecho 2.4. *(Demostración indirecta en $KT4P$). Sea $X,Y \in FK$.*

a. DI (Demostración indirecta): $-X\supset(\sim Z\bullet Z)$ implica X.

b. $AF\bullet$ (Afirmación fuerte de la conjunción): $+(X\bullet Y)\equiv(+X\bullet +Y)$.

c. $N-$ (Negación local de la negación): $\sim -X\equiv +X$, $-X\equiv\sim +X$, $+X\equiv(-X\supset -\lambda)$.
Versiones del $Ax10$ $\quad d.\ +X\supset X.\quad e.\ X\supset\otimes X.\quad f.\ -X\supset -+X.\quad g.\ \sim X\supset -X.$
Versiones del $Ax12$. $\quad h.\ -X\equiv -+X,\ -X\equiv -(-X\supset -\lambda).\quad i.\ +X\supset ++X.$
$j.\ +X\equiv ++X.$

Versiones de $\otimes$

$k.\ \otimes\sim X\equiv -X,\ \otimes X\equiv -\sim X.$	*$l.\ \sim\otimes\sim X\equiv +X,\ \otimes\sim X\equiv\sim +X.$*
$ll.\ \otimes\otimes X\equiv\otimes X.$	*$m.\ \sim\otimes X\equiv +\sim X.$*
$n.\ Ax11\equiv(+(X\supset Y)\supset(+X\supset +Y)).$	*$o.\ -\lambda\supset Y.$*

Prueba. Parte a. Supóngase que $-X\supset(\sim Z\bullet Z)$. Supuesto 2, $-X$, por Mp se sigue $\sim Z\bullet Z$, por $E\bullet$ se derivan $\sim Z$ y Z, utilizando $Ax3$ $Z\supset(Z\cup X)$ y Mp resulta $Z\cup X$, aplicando *SD* se infiere X. Según TD se obtiene $-X\supset X$, por *Id* se tiene $X\supset X$, utilizando $Ax5$ $(-X\supset X)\supset((X\supset X)\supset((X\cup -X)\supset X))$ y Mp dos veces se deduce $(X\cup -X)\supset X$, utilizando $Ax10$ $X\cup -X$ y Mp se concluye que X.
Parte b. Por $Ax6$, y $Ax7$ se tienen $(X\bullet Y)\supset X$ y $(X\bullet Y)\supset Y$, y por $Ax14$ resultan $+((X\bullet Y)\supset X)$ y $+((X\bullet Y)\supset Y)$. Utilizando el $Ax11$, Hecho 2.1 b y Mp se infieren $+(X\bullet Y)\supset +X$ y $+(X\bullet Y)\supset +Y$.

Utilizando $Ax8$ y Mp dos veces se infiere $+(X \bullet Y) \supset (+X \bullet +Y)$.
Por otro lado, supuesto 1, X, y supuesto 2, Y, por $I\bullet$ resulta $X \bullet Y$, aplicando TD dos veces se obtiene $X \supset (Y \supset (X \bullet Y))$. Por la proposición 2.1 se infiere $+(X \supset (Y \supset (X \bullet Y)))$, y utilizando $Ax11$, Hecho 2.1 b y Mp dos veces resulta $+X \supset +(Y \supset (X \bullet Y))$, como además por $Ax11$ y Hecho 2.1 b se tiene $+(Y \supset (X \bullet Y)) \supset (+Y \supset +(X \bullet Y))$, entonces por SH se obtiene $+X \supset (+Y \supset +(X \bullet Y))$, utilizando Exp se infiere $(+X \bullet +Y) \supset +(X \bullet Y)$. Como ya se probó la recíproca, entonces por parte $I\bullet$ y EQ resulta que $+(X \bullet Y) \equiv (+X \bullet +Y)$.
Parte c. Por la definición de $+$ se tiene $\sim -X \equiv +X$, aplicando $Tras$ y DN también se tiene $-X \equiv \sim +X$. Y también, de $\sim -X \equiv +X$, por la definición de $\sim$, resulta que $+X \equiv (-X \supset -\lambda)$.
Parte d. Por $Ax10$ se tiene $X \cup -X$, por Imp y DN resulta $\sim -X \supset X$, por la parte c, se concluye $+X \supset X$.
Parte e. Por la parte d, se tiene $+\sim X \supset \sim X$, por $Tras$ y DN se sigue $X \supset \sim + \sim X$, lo cual por definición de $\otimes$, significa $X \supset \otimes X$.
Parte f. Por la parte c se tiene $-X \equiv \sim +X$, por $Ax10$ se tiene $+X \cup - +X$, aplicando Imp y DN se deriva $\sim +X \supset - +X$, según EQ, $E\bullet$ y SH se concluye $-X \supset - +X$.
Parte g. Por $Ax10$ se tiene $X \cup -X$, usando Imp y DN, se deriva $\sim X \supset -X$.
Parte h. Por $Ax12$ y el Hecho 2.1 c se tiene $- +X \supset -X$, de la parte f se tiene $-X \supset - +X$, aplicando EQ, se concluye $-X \equiv - +X$. Utilizado la parte c, se concluye que, $-X \equiv -(-X \supset -\lambda)$.
Parte i. Por $Ax12$ y el Hecho 2.1 c se tiene $- +X \supset -X$. Supuesto 1, +X. Supuesto 2, $\sim + +X$, por la parte c se tiene $-(+X) \equiv \sim +(+X)$, aplicando EQ, $E\bullet$ y Mp se obtiene $- +X$, por la parte h, se sabe que $-X \equiv - +X$, por lo que se infiere $-X$, por la parte c se tiene $-X \equiv \sim +X$, y entonces por EQ y Mp resulta $\sim +X$, lo cual no es el caso, por DI se deriva, $+ +X$. Aplicando TD, se concluye que $+X \supset + +X$.
Parte j. Por la parte d, se tiene $+(+X) \supset (+X)$, y por la parte i se sabe que $+X \supset + +X$, utilizando $I\bullet$ y EQ resulta $+X \equiv + +X$.
Parte k. Por definición de $\otimes$, se tiene $\otimes(\sim X) \equiv \sim + \sim (\sim X)$, por DN se sigue $\otimes \sim X \equiv \sim +X$, por la parte c se tiene $-X \equiv \sim +X$. Aplicando SH se concluye $\otimes \sim X \equiv -X$. Tomando X como $\sim Z$, se obtiene $\otimes \sim\sim Z \equiv - \sim Z$, y por DN se deriva $\otimes Z \equiv - \sim Z$.
Parte l. Por la parte k se tiene $\otimes \sim X \equiv -X$, aplicando $Tras$ se sigue $\sim \otimes \sim X \equiv \sim -X$, por la parte c se tiene $\sim -X \equiv +X$, utilizando SH se concluye $\sim \otimes \sim X \equiv +X$. Aplicando $Tras$ y DN también se tiene $\otimes \sim X \equiv \sim +X$.
Parte ll. Por la parte j, se tiene $+(\sim X) \equiv + +(\sim X)$, por la parte l, se tiene $\sim \otimes \sim X \equiv +X$, resultando que $\sim \otimes \sim (\sim X) \equiv \sim \otimes \sim (\sim \otimes \sim (\sim X))$, por DN se deriva $\sim \otimes X \equiv \sim \otimes \otimes X$, finalmente por $Tras$ resulta $\otimes X \equiv \otimes \otimes X$.
Parte m. Por la definición de $\otimes$ se tiene $\otimes X \equiv \sim + \sim X$, aplicando $Tras$ y DN se obtiene $\sim \otimes X \equiv + \sim X$.
Parte n. Supóngase que $+(X \supset Y) \supset (+X \supset +Y)$, por $Tras$ se deriva $\sim (+X \supset +Y) \supset \sim +(X \supset Y)$, aplicando $N\supset$ resulta $(+X \bullet \sim +Y) \supset \sim +(X \supset Y)$, lo cual por la definición de $+$ y el Hecho 2.4 c significa $((-X \supset -\lambda) \bullet -Y) \supset -(X \supset Y)$, finalmente, por Exp de deriva $(-X \supset -\lambda) \supset (-Y \supset -(X \supset Y))$, y como por el Hecho 2.1 a se tiene la recíproca, entonces por $I\bullet$ y la definición de $\equiv$ se concluye que $Ax11 \equiv (+(X \supset Y) \supset (+X \supset +Y))$.

Parte o. Supóngase $-\lambda$, por $Ax\lambda$ se tiene λ, por $Ax14$ se deriva $+\lambda$, y como también se tiene $-\lambda$, utilizando $Ax13$ y Hecho 2.1d y Mp dos veces se infiere Y. $\square$

Notación. Basado en el Hecho 2.1 partes c, d y e, y en el Hecho 2.4 parte n, las equivalencias de los axiomas $Ax11$ a $Ax14$, se utilizarán y referenciarán, indistintamente, como los mismos axiomas.

3. SEMÁNTICA PARA EL SISTEMA KT4P

En esta sección, se presenta la semántica de mundos posibles para el sistema $KT4P$, en la proposición 3.2, se prueba que los teoremas del sistema $KT4P$ son fórmulas válidas en la semántica propuesta.

Definición 3.1. *(Modelos para $KT4P$).*
$(S, Ma, <, V)$ es un modelo para $KT4P$, significa que, S es un conjunto no vacío de mundos posibles, Ma es un mundo posible, llamado mundo actual, $<$, es una relación binaria en S, V es una valuación de $S \times FK$ en $\{0,1\}$. La relación, $<$, satisface las siguientes restricciones:
Reflexividad de $<$. RR: $(\forall M \in S)\ (M < M)$.
Transitividad de $<$. RT: $(\forall K, M, N \in S)\,(K < M\, y\, M < N\, implica\, K < N)$.

Definición 3.2. *(Verdad en $KT4P$). En el modelo $(S, Ma, <, V)$, con $X, Y \in FK$.*
$V(M,X) = 1$ se abrevia como $M(X) = 1$, y significa que en el mundo posible M, la fórmula X es verdadera.
$V(M,X) = 0$ se abrevia como $M(X) = 0$, y significa que en el mundo posible M, la fórmula X es falsa.
La valuación V satisface las siguientes reglas:

1. *$V\lambda$. $M(\lambda) = 1$.*
2. *$V \supset$. $M(X \supset Y) = 1$ equivale a $M(X) = 1$ implica $M(Y) = 1$.*
3. *$V\bullet$. $M(X \bullet Y) = 1$ equivale a $M(X) = M(Y) = 1$.*
4. *$V\cup$. $M(X \cup Y) = 1$ equivale a $M(X) = 1$ o $M(Y) = 1$.*
5. *$V\cup$. $M(-X) = 1$ equivale a $(\exists P \in S)\ (M < P\ y\ P(X) = 0)$.*

Hecho 3.1. *(Verdad para la negación local, afirmación fuerte y posibilidad). Para $X \in FK$*

a. *$V \sim .M(\sim X) = 1$ equivale a $M(X) = 0$.*

b. *$V + .M(+X) = 1$ equivale a $(\forall N \in S)\,(M < N\, implica\, N(X) = 1)$.*

c. *$M(+X) = 1$ implica $M(X) = 1$.*

d. *$M(-X) = 0$ implica $M(X) = 1$.*

e. *$V - +.M(-+X) = 1$ equivale a $M(+X) = 0$.*

f. $V\otimes .M(\otimes X)=1$ *equivale a* $(\exists P\in S)\,(M<P\,y\,P(X)=1)$.

Prueba. Parte a. Por $V\lambda$ se tiene que para todo $M\in S$, en cualquier modelo, $M(\lambda)=1$, según $V-$ resulta que $M(-\lambda)=0$. Por definición de $\sim$, se tiene que, $M(\sim X)=1$ equivale a $M(X\supset -\lambda)=1$, lo cual equivale a $M(X)=1$ implica $M(-\lambda)=1$, como $M(-\lambda)=0$, entonces se infiere $M(X)=0$, por lo que, $M(\sim X)=1$ implica $M(X)=0$. Para la recíproca, si $M(X)=0$, por $V\supset$ se sigue que $M(X\supset -\lambda)=1$. Por lo tanto, $M(\sim X)=1$ equivale a $M(X)=0$.
Parte b. $M(+X)=1$ por la definición de $+$ equivale a $M(\sim -X)=1$, lo cual por la parte a, $V\sim$, equivale a $M(-X)=0$, y esto por $V-$ equivale a $(\forall N\in S)\,(M<N\,\text{implica}\,N(X)=1)$.
Parte c. Si $M(+X)=1$, entonces por la parte b, $V+$, se sigue $(\forall N\in S)$ $(M<N\,\text{implica}\,N(X)=1)$, en particular, $M<M$ implica $M(X)=1$, por la restricción RR se tiene que $M<M$, por lo tanto, $M(X)=1$.
Parte d. Si $M(-X)=0$, entonces por $V-$ se tiene $(\forall N\in S)$ $(M<N\,\text{implica}\,N(X)=1)$, en particular, $M<M$ implica $M(X)=1$, por la restricción RR se tiene que $M<M$, por lo tanto, $M(X)=1$.
Parte e. Si $M(-+X)=1$, por $V-$ equivale a $(\exists P\in S)$ $(M<P\,\text{y}\,P(+X)=0)$, por la parte b, $V+$, $(\exists Q\in S)$ $(P<Q\,\text{y}\,Q(X)=0)$, como $M<P$ y $P<Q$ por la restricción RT se sigue que $M<Q$, aplicando $V+$ se deriva $M(+X)=0$. Para probar la recíproca, supóngase que $M(+X)=0$, por la restricción RR se tiene que $M<M$, luego, por $V-$ se deduce $M(-+X)=1$.
Parte f. $M(\otimes X)=1$, por definición de $\otimes$ equivale a $M(\sim+\sim X)=1$, por $V\sim$ equivale a $M(+\sim X)=0$, utilizando $V+$ equivale a $(\exists P\in S)$ $(M<P\,\text{y}\,P(\sim X)=0)$, lo cual por $V\sim$ equivale a $(\exists P\in S)$ $(M<P\,\text{y}\,P(X)=1)$. □

Definición 3.3. *(Validez en $KT4P$). Para $X,X_1,\ldots,X_n\in FK$, se dice que una fórmula X es válida, denotado $X\in VK$, si y solo sí X es verdadera en todos los modelos para $KT4P$, es decir, X es verdadera en el mundo actual de todos los modelos para $KT4P$. Se dice que, $\{X_1,\ldots,X_n\}$ valida a Y si y solo sí $(X_1\bullet X_2\bullet\ldots\bullet X_n)\supset Y\in VK$.*

Proposición 3.1. *(Validez de los axiomas). Sea $X\in FK$.*
Si X es un axioma de $KT4P$ entonces $X\in VK$.

Prueba. Parte 1. $Ax\lambda$. λ. Por $V\lambda$ se tiene para todo $M\in S$, $V(\lambda)=1$. Por lo tanto, $Ax\lambda\in VK$.
Parte 2. $Ax1,\ldots,Ax9$. Si X es uno de los axiomas $Ax1,\ldots,Ax9$, utilizando las reglas $V\bullet$, $V\cup$, $V\supset$ y procediendo como es habitual para la validez del cálculo proposicional clásico en Sierra (2010) y Hamilton (1978), se concluye que $X\in VK$, es decir, $Ax1,\ldots,Ax9\in VK$.
Parte 3. $Ax10$. Supóngase que $X\cup -X\notin VK$, por lo que existe un modelo, tal que en el mundo actual M, $M(X\cup -X)=0$, por $V\cup$ resulta $M(X)=0$ y $M(-X)=0$, utilizando $V-$ resulta que para cada $N\in S$, $M<N$ implica $N(X)=1$, por la restricción RR, $M<M$, y entonces $M(X)=1$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, $Ax10\in VK$.
Parte 4. $Ax11$. Supóngase que $+(X\supset Y)\supset(+X\supset +Y)\notin VK$, por lo que existe un modelo, tal que en el mundo actual M, $M(+(X\supset Y)\supset(+X\supset +Y))=0$, por $V\supset$ se sigue $M(+(X\supset Y))=1$ y $M(+X\supset +Y)=0$, por $V\supset$ se deriva $M(+X)=1$ y $M(+Y)=0$, por $V+$, existe $P\in S$, $M<P$ y $P(Y)=0$, como $M(+(X\supset Y))=1$ por $V+$ se tiene que para todo $N\in S$, $M<N$ implica $M(X\supset Y)=1$, y como

$M < P$, resulta $P(X \supset Y) = 1$, como $P(Y) = 0$, por $V \supset$ se sigue $P(X) = 0$, lo cual por $V+$ implica $M(+X) = 0$, lo cual no es cierto. Por lo tanto, utilizando el Hecho 2.4n, $Ax11 \in VK$.
Parte 5. $Ax12$. Supóngase que $- + X \supset -X \notin VK$, por lo que existe un modelo, tal que en el mundo actual M, $M(- + X \supset -X) = 0$, por $V+$ se sigue $M(- + X) = 1$ y $M(-X) = 0$. Como $M(- + X) = 1$ existe $P \in S$, $M < P$ y $P(+X) = 0$, por $V+$ existe $Q \in S$, $P < Q$ y $Q(X) = 0$, se tiene $M < P$ y $P < Q$, por la restricción RT se afirma $M < Q$. Se tiene $M(-X) = 0$, aplicando $V-$, para cada $N \in S$, $M < N$ implica $N(X) = 1$, en particular, como $M < Q$, entonces $Q(X) = 1$, lo cual no es cierto. Por lo tanto, utilizando el Hecho 2.1c, $Ax12 \in VK$.
Parte 6. $Ax13$. Supóngase que $M(+X) = 1$, por $V+$ se tiene que, para todo $N \in S$, $M < N$ implica $N(X) = 1$. Supuesto 2, $M(-X) = 1$, por $V-$, existe $P \in S$, $M < P$ y $P(X) = 0$. Supuesto 3, $M(Y) = 0$, se tiene $M < P$, por lo que, del primer resultado se infiere $P(X) = 1$, lo cual no es el caso, por lo que, $M(Y) = 1$. Por TD y el Hecho 2.1 d, $Ax13 \in VK$.
Parte 7. $Ax14$. Supóngase que X es uno de los axiomas $Ax1$ a $Ax13$, por las partes 1 a 6, resulta que $X \in VK$. Supuesto 2, $+X \notin VK$, por lo que existe un modelo, tal que en el mundo actual M, $M(+X) = 0$, aplicando $V+$, existe $P \in S$, $M < P$ y $P(X) = 0$, lo cual significa que $X \notin VK$, lo cual no es el caso, por lo que $+X \in VK$. Por lo tanto, si X es axioma entonces $+X \in VK$, y utilizando el Hecho 2.1e, si X es axioma entonces $-X \supset -\lambda \in VK$. □

Proposición 3.2. *(Teorema de validez). Sean $X, Y \in FK$.*

a. Si $X \in TK$ entonces $X \in VK$.

b. Si Y es una consecuencia de $\{X_1, \ldots, X_n\}$ entonces $\{X_1, \ldots, X_n\}$ valida a Y.

Prueba. Parte a. Supóngase que $X \in TK$, se prueba que $X \in VK$ por inducción sobre la longitud, L, de la demostración de X.
Paso Base $L = 1$. Significa que X es un axioma, lo cual por la proposición 3.1 se concluye que $X \in VK$.
Paso de inducción. Como hipótesis inductiva, se tiene que para cada fórmula Y, si $Y \in TK$ y la longitud de la demostración de Y es menor que L (donde $L > 1$) entonces $Y \in VK$. Si $X \in TK$ y la longitud de la demostración de X es L entonces, X es un axioma o X es consecuencia de aplicar Mp en pasos anteriores de la demostración. En el primer caso se procede como en el caso base. En el segundo caso se tienen para alguna fórmula Y, demostraciones de Y y de $Y \supset X$, donde la longitud de ambas demostraciones es menor que L, utilizando la hipótesis inductiva se infiere que $Y \in VK$ y $Y \supset X \in VK$, por lo que en el mundo actual, M, de cualquier modelo se tienen $M(Y) = 1$ y $M(Y \supset X) = 1$, por $V \supset$ resulta que $M(X) = 1$, en consecuencia $X \in VK$. Utilizando el principio de inducción matemática, se ha probado que, para cada $X \in TK$, $X \in TK$ implica $X \in VK$.
Parte b. Supóngase que, Y es una *consecuencia* de $\{X_1, \ldots, X_n\}$, aplicando TD (Hecho 2.1) y *exp*, se tiene $(X_1 \bullet X_2 \bullet \ldots \bullet X_n) \supset Y \in TK$, por la parte a se infiere, $(X_1 \bullet X_2 \bullet \ldots \bullet X_n) \supset Y \in VK$, lo cual por definición significa que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ valida a Y. □

4. CARACTERIZACIÓN SEMÁNTICO-DEDUCTIVA KT4P

En esta sección, se presenta la caracterización de $KT4P$ con la semántica de la sección 3. La completitud se prueba en la proposición 4.7 (las fórmulas válidas de la semántica son teoremas de $KT4P$), y la caracterización se logra en la proposición 4.8 (los teoremas de $KT4P$ son las fórmulas válidas de la semántica y solo ellas).

Definición 4.1. *(Extensión localmente consistente y completa)., (Una extensión de un conjunto de fórmulas $\mathcal{C}$ de $KT4P$, se obtiene alterando el conjunto de fórmulas de $\mathcal{C}$ de tal manera que, se preserven los teoremas de $\mathcal{C}$, y que el lenguaje de la extensión coincida con el lenguaje de $KT4P$. Una extensión es localmente consistente si no existe ninguna $X \in FK$ tal que tanto X como $\sim X$ sean teoremas de la extensión. Un conjunto de fórmulas es localmente inconsistente si de ellas se deriva una contradicción local, es decir, se deriva $Z\bullet \sim Z$ para alguna $Z \in FK$. Una extensión es localmente completa si para toda $X \in FK$, o bien X es teorema de la extensión o bien $\sim X$ es teorema de la extensión. Para llegar a la demostración de completitud en la proposición 4.7, se sigue la estrategia del modelo canónico, presentada en Henkin (1949).*

Proposición 4.1. *(Extensión localmente consistente). Para $X \in FK$.*

a. $KT4P$ es localmente consistente.

b. Si $E \in EXT(K)$, $X \notin TK-E$ y $E_x \in EXT(K)$ se obtiene añadiendo $\sim X$ como nueva fórmula a E, entonces, E_x es consistente.

Prueba. Parte *a*. Supóngase que $KT4P$ no fuese localmente consistente, por lo que debe existir $X \in FK$ tal que $X, \sim X \in TK$, por la proposición 3.2, $X, \sim X \in VK$, pero esto es imposible, ya que si $\sim X \in VK$, entonces para todo modelo $(S, M_a, <, V)$, se tienen $V(M_a, \sim X) = 1$, es decir, según $V\sim$, $M_a(X) = 0$, por lo que $X \notin VK$, lo cual no es el caso. Por lo tanto, $KT4P$ es localmente consistente.
Parte *b*. Sea $X \notin TK-E$, y sea E_x la extensión obtenida añadiendo $\sim X$ como nueva fórmula a E. Supóngase que E_x es inconsistente, por lo que, para alguna $Z \in FK$, se tiene $Z, \sim Z \in TK-Ex$. Ahora bien, por el Hecho 2.2 se tiene que $\sim Z \supset (Z \supset X) \in TK$ y por lo tanto de $\sim Z \supset (Z \supset X) \in TK-E_x$, aplicando dos veces Mp se obtiene que $X \in TK-E_x$. Pero E_x tan sólo se diferencia de E en que tiene $\sim X$ como axioma adicional, así que 'X es un teorema de E_x' es equivalente a 'X es un teorema de E a partir del conjunto $\{\sim X\}$'. Por TD resulta que $\sim X \supset X \in TK-E$, y por PR se infiere que $X \in TK-E$, lo cual no es el caso, y por lo tanto, E_x es consistente.

Proposición 4.2. *(Extensión localmente consistente y completa)*
Si $E \in EXT(K)$ es localmente consistente entonces existe $E' \in EXT(E)$ que es localmente consistente y completa.

Prueba. Sea $X_0, X_1, X_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas de $KT4P$. Se construye una sucesión E'_0, E'_1, E'_2, $\ldots$ de extensiones de E como sigue: Sea $E'_0 = E$. Si $X_0 \in TK-E'_0$, sea $E'_1 = E'_0$, en caso contrario añádase $\sim X_0$ como nueva fórmula para obtener E'_1 a partir de E'_0. En general, dado $t \geq 1$, para construir

$E_t^{'}$ a partir de $E_{t-1}^{'}$, se procede así: si $X_{t-1} \in TK - E_{t-1}^{'}$, entonces $E_t^{'} = E_{t-1}^{'}$, en caso contrario, sea $E_t^{'}$ la extensión de $E_{t-1}^{'}$ obtenida añadiendo $\sim X_{t-1}$ como nueva fórmula. La prueba se realiza por inducción matemática sobre t.

Paso base. $t = 0$. Como E es consistente y $E_0^{'} = E$, por hipótesis, resulta que $E_0^{'}$ es consistente.

Paso inductivo. Hipótesis inductiva: $E_{t-1}^{'}$ es localmente consistente con $t \geq 1$. Por la proposición 4.1b, $E_t^{'}$ es localmente consistente.

Paso inductivo. Hipótesis inductiva: $E_{t-1}^{'}$ es localmente consistente con $t \geq 1$. Por la proposición 4.1b, $E_t^{'}$ es localmente consistente.

Por el principio de inducción matemática, se concluye que, todo $E_t^{'}$ es localmente consistente.

Se define $E^{'}$, como aquella extensión de E, la cual tiene como nuevas fórmulas a aquellas fórmulas que son nuevas fórmulas de al menos uno de los $E_t^{'}$. Si $E^{'}$ no es localmente consistente, entonces existe $X \in FK$ tal que, X, $\sim X \in TK - E^{'}$, pero las demostraciones de X y $\sim X$ en $E^{'}$ son sucesiones finitas de fórmulas, de modo que cada demostración solamente puede contener casos particulares de un número finito de axiomas o nuevas fórmulas de $E^{'}$, por lo que, debe existir un t, suficientemente grande, para que todas estas nuevas fórmulas utilizadas sean elementos de $E_t^{'}$, resultando que $X, \sim X \in TK - E_t^{'}$, lo cual es imposible ya que $E_t^{'}$ es localmente consistente. Por lo tanto, $E^{'}$ es localmente consistente.

Para probar que $E^{'}$ es completo, sea $X \in FK$. X debe aparecer en la lista X_0, X_1, X_2, …, supóngase que X es X_k. Si $X_k \in TK - E_k^{'}$, entonces $X_k \in TK - E^{'}$, puesto que $E^{'} \in EXT(E_k^{'})$, si $X_k \notin TK - E_k^{'}$, entonces de acuerdo con la construcción de $E_{k+1}^{'}$, $\sim X_k$ es una nueva fórmula de $E_{k+1}^{'}$, con lo que $\sim X_k \in TK - E_{k+1}^{'}$, y entonces $\sim X_k \in TK - E^{'}$. Así, en todo caso se tiene que $X_k \in TK - E^{'}$ o $\sim X_k \in TK - E^{'}$, por lo que $E^{'}$ es localmente completo. □

Proposición 4.3. *(Consistencia local subordinada). Sean Y, Z_1, …, $Z_k \in FK$.*
Si $\{+Z_1, \ldots, +Z_k, \otimes Y\}$ es localmente consistente entonces $\{Z_1, \ldots, Z_k, Y\}$ es localmente consistente.

Prueba. Supóngase que $\{Z_1, \ldots, Z_k, Y\}$ es localmente inconsistente en $KT4P$, por lo que existe una fórmula $W \in FK$ tal que, a partir de $\{Z_1, \ldots, Z_k, Y\}$ se infiere $W \bullet \sim W$ en $KT4P$, utilizando TD y Exp resulta que $(Z_1 \bullet \ldots \bullet Z_k \bullet Y) \supset (W \bullet \sim W) \in TK$ y por DI, en $KT4P$ resulta $\sim (Z_1 \bullet \ldots \bullet Z_k \bullet Y) \in TK$, lo cual por $N\bullet$ significa, $(Z_1 \bullet \ldots \bullet Z_k) \supset\sim Y \in TK$. Utilizando la proposición 2.1 resulta que $+((Z_1 \bullet \ldots \bullet Z_k) \supset\sim Y) \in TK$, por $Ax11$, el Hecho 2.4 n y Mp se infiere $+(Z_1 \bullet \ldots \bullet Z_k) \supset + \sim Y \in TK$, por el Hecho 2.4$b$ se obtiene $(+Z_1 \bullet \ldots \bullet +Z_k) \supset + \sim Y \in TK$, lo cual, por DN, $N \supset$ y la definición de $\otimes$, equivale a $\sim (+Z_1 \bullet \ldots \bullet +Z_k \bullet \otimes Y) \in TK$, por lo que $\{+Z_1, \ldots, +Z_k, \otimes Y\}$ es localmente inconsistente en $KT4P$. Se ha probado que, $\{Z_1, \ldots, Z_k, Y\}$ localmente inconsistente implica que $\{+Z_1, \ldots + Z_k, \otimes Y\}$ localmente inconsistente, es decir, $\{+Z_1, \ldots, +Z_k, \otimes Y\}$ localmente consistente implica $\{Z_1, \ldots, Z_k,\}$ localmente consistente. □

Definición 4.2. *(Subordinado). Sean $E, F \in EXT(K)$ localmente consistentes y completas. Se dice que F es subordinada de E si y solamente si existe $Y \in FK$, tal que $\otimes Y \in E$, y además para cada $Z \in FK$, tal que $+Z \in E$, se tiene que $Y, Z \in F$.*

Proposición 4.4. *(Extensión subordinada localmente consistente y completa) Para $E \in EXT(K)$, $X \in FK$. Si E es localmente consistente y completa y $\otimes X \in E$, entonces existe $F \in EXT(K)$ localmente consistente y completa tal que, $X \in F$ y F es subordinada de E.*

Prueba. Supóngase que $\otimes X \in E$. Sea $E_X = \{X\} \cup \{Z : +Z \in E\}$, como E es localmente consistente, entonces por la proposición 4.3 , E_X también es localmente consistente. Al adicionar a E_X los axiomas de $KT4P$ y todas sus consecuencias, se obtiene una extensión de $KT4P$ que incluye a E_X, utilizando la proposición 4.2, se construye una extensión localmente consistente y completa F de $KT4P$ la cual incluye a E_X. Como $X \in E_X$, también $X \in F$. Si $+W \in E$, por definición de E_X, $W \in E_X$, por lo que $W \in F$. Por lo que, F es subordinado de E. $\square$

Proposición 4.5. *(Propiedades de la subordinación). Para $E,F,G \in EXT(K)$ localmente consistentes y completas.*

a. *(Transitividad). Si G es subordinado de F y F es subordinado de E entonces G es subordinado de E.*

b. *(Reflexividad). F es subordinado de F.*

Prueba. Parte *a*, supóngase que G es subordinado de F y F es subordinado de E. Como G es subordinado de F entonces existe $\otimes Z \in F$ tal que $Z \in G$. Si $\otimes Z \notin E$, entonces al ser una extensión localmente completa, $\sim \otimes Z \in E$, por el Hecho 2.4*m*, resulta $+ \sim Z \in E$, por el Hecho 2.4*i*, se sigue $++ \sim Z \in E$, y al ser F subordinado de E resulta que $+ \sim Z \in F$, lo cual, por el Hecho 2.4*m*, significa que $\sim \otimes Z \in F$, pero esto es imposible ya que F es localmente consistente. Por lo que, $\otimes Z \in E$.
Sea $W \in FK$, tal que $+W \in E$, por el Hecho 2.4*i*, $+W \supset ++W \in E$, aplicando Mp, $++W \in E$, y como F es subordinado de E, se infiere que $+W \in F$, y como, G es subordinado de F, entonces $W \in G$. En resumen, existe $\otimes Z \in E$ tal que para cada fórmula $+W \in E$ se tiene que $Z \in G$ y $W \in G$, y por lo tanto, G es subordinado de E.
Parte *b*. Sea X el axioma $Ax1.1$, por lo que $X \in TK$, y como por el Hecho 2.4*e* se tiene $X \supset \otimes X$, resulta que $\otimes X \in TK$, entonces $X \in F$ y $\otimes X \in F$. Supóngase que $+W \in F$, por el Hecho 2.4*d* se tiene $+W \supset W$, resultando que $W \in F$. Por lo tanto, F subordinada de F. $\square$

Proposición 4.6. *(Construcción de un modelo). Si $E^{'} \in EXT(K)$ es localmente consistente, entonces existe un modelo en el cual todo $X \in TK - E^{'}$ es verdadero.*

Prueba. Se define el modelo $(S, ME_a, <, V)$ de la siguiente manera: sean $E, F, G, \ldots$, extensiones localmente consistentes y completas de $E^{'}$ (E_a la inicial y las demás subordinadas), presentadas en las proposiciones 4.2 y 4.4. A cada extensión F, se le asocia un mundo posible MF, sean S el conjunto de tales mundos posibles y ME_a el mundo actual. La relación de accesibilidad, $<$, se construye así: $MF < MG$ si y solamente si G es subordinado de F.
Para cada $MF \in S$ y para cada $X \in F$, $V(MF,X) = 1$ si $X \in F$ y $V(MF,X) = 0$ si $X \notin F$, donde F es la extensión localmente consistente y completa asociada a MF. Nótese que V es funcional, por ser F localmente consistente y completa. Para afirmar que M es un modelo, se deben garantizar las reglas 1 a 5 de la definición 3.2.

1. Por $Ax\lambda$ se tiene $\lambda \in TK$, por lo que $\lambda \in F$, es decir, $V(MF,\lambda) = 1$. Por lo tanto, se satisface la definición $V\lambda$.

2. Para el caso del condicional $X \supset Y$. Utilizando $N \supset$, $I\bullet$ y $E\bullet$, se tiene la siguiente cadena de equivalencias: $V(MF,X \supset Y) = 0$, es decir $\sim (X \supset Y) \in F$, o sea que $X\bullet \sim Y \in F$, resultando que $X \in F$ y $\sim Y \in F$, lo cual significa que $V(MF,X) = 1$ y $V(MF,Y) = 0$, por lo que se satisface la definición $V \supset$.

3. Para el caso de la conjunción $X \bullet Y$. Utilizando $I\bullet$ y $E\bullet$, se tiene la siguiente cadena de equivalencias: $V(MF,X \bullet Y) = 1$, es decir $X \bullet Y \in F$, por lo que $X \in F$ y $Y \in F$, lo cual significa que $V(MF,X) = 1$ y $V(MF,Y) = 1$, por lo que se satisface la definición $V\bullet$.

4. Para el caso de la disyunción $X \cup Y$. Utilizando $N\cup$, $I\bullet$ y $E\bullet$, se tiene la siguiente cadena de equivalencias: $V(MF,X \cup Y) = 0$, es decir $\sim (X \cup Y) \in F$, o sea que $\sim X\bullet \sim Y \in F$, de donde $\sim X \in F$ y $\sim Y \in F$, es decir $V(MF,X) = 0$ y $V(MF,Y) = 0$, por lo que se satisface la definición $V\cup$.

5. Para el caso de la regla $V-$. Sean MF es un mundo asociado a F, MG es un mundo asociado a G y $Z \in FK$. Supóngase que $V(MF,-Z) = 1$, por lo que $-Z \in F$, y por Hecho 2.4k $\otimes \sim Z \in F$, por la proposición 4.4, existe G subordinada de F, tal que $\sim Z \in G$, resultando que, $(\exists MG \in S)(MF < MG$ y $MG(Z) = 0)$.

Para probar la recíproca, supóngase que $(\exists MG \in S)(MF < MG$ y $MG(Z) = 0)$. Si $V(MF,-Z) = 0$, entonces resulta que $\sim -Z \in F$, y por Hecho 2.4c, $+Z \in F$, y como $MF < MG$, es decir, G es subordinada de F, entonces $Z \in G$, es decir, $MG(Z) = 1$, resultando, por la hipótesis, que G es localmente inconsistente, lo cual no es el caso. Por lo tanto, $V(MF,-Z) = 1$. Como ya se probó la recíproca, entonces, se satisface la definición $V-$.

Con base en el análisis anterior, se infiere que V es una valuación, y como las restricciones RT y RR, se garantizan por la proposición 4.5, se concluye finalmente que, M es un modelo.

Para finalizar la prueba, sea X un teorema de E', por lo que X está en E'. Por lo tanto, utilizando la definición de V, resulta que $V(ME_a,X) = 1$, es decir, X es verdadera en el modelo $M = (S,ME_a,<,V)$. □

Proposición 4.7. *(Completitud de $KT4P$) Para X,X_1, ..., $X_n \in FK$.*

a. Si $X \in VK$ entonces $X \in TK$.

b. Si $\{X_1,\ldots,X_n\}$ valida a Y entonces Y es una consecuencia de $\{X_1,\ldots,X_n\}$.

Prueba. Parte a. Si $X \notin TK$, entonces, por la proposición 4.1b, la extensión E', obtenida añadiendo $\sim X$ como nueva fórmula, es consistente. Así pues, según la proposición 4.6, existe un modelo M tal que todo teorema de E' es verdadero en M, y como $\sim X \in TK - E'$, entonces $\sim X$ es verdadero en M, es decir, X es falso en M, y por lo tanto, $X \notin VK$. Se ha probado que, $X \notin TK$ implica $X \notin VK$, es decir, $X \in VK$ implica $X \in TK$.

Parte b. Supóngase que $\{X_1,\ldots,X_n\}$ valida a Y, es decir, $(X_1 \bullet X_2 \bullet \ldots \bullet X_n) \supset Y \in VK$, por la parte a, se deriva que, $(X_1 \bullet X_2 \bullet \ldots \bullet X_n) \supset Y \in TK$. Si se asumen $\{X_1,\ldots,X_n\}$, por $Conj$ y Mp se infiere Y, por lo tanto,Y es una consecuencia de $\{X_1,\ldots,X_n\}$. □

Proposición 4.8. *(Caracterización semántico-deductiva de $KT4P$). Para X, Y,X_1, …, $X_n \in FK$.*

a. *$X \in VK$ si y solo si $X \in TK$.*

b. *$\{X_1,\ldots,X_n\}$ valida a Y si y solo si Y es una consecuencia de $\{X_1,\ldots,X_n\}$.*

Prueba. Consecuencia de las proposiciones 3.2 y 4.7. □

5. ALFAK EN EL ESTILO ORIGINAL DE CHARLES SANDERS PEIRCE

En esta sección, se presenta la versión inicial de los gráficos existenciales paraconsistentes, para el sistema AlfaK. Para la construcción de los gráficos existenciales, se utiliza una variante, de la notación propuesta por Peirce en el volumen 4, párrafo 378 de *Collected Papers* Peirce (1965).

Definición 5.1. *(Gráficos existenciales). El conjunto, GK, de gráficos existenciales para el sistema AlfaK, se construye a partir de un conjunto de gráficos atómicos, GA, y de la constante λ (gráfico vacío, $\lambda =' \_'$), de la siguiente manera.*

1. *$P \in GA$ implica $P \in GK$.*
2. *$\lambda \in GK$.*
3. *$X \in GK$ implica $\{X\} \in GK$.*
4. *$X,Y \in GK$ implica $XY, [X(Y)\_], [\_(X)(Y)\_] \in GK$.*
5. *Solo $1,2,3$ y 4 determinan GK.*

Definición 5.2. *(Tipos de curvas). En el gráfico $[X(Y)]$, o de manera más precisa $[X(Y)\_]$, la estructura $[\ldots]$, se llama rizo. La parte $[\ldots(\ldots)\_]$ del rizo (los corchetes), se llama curva externa del rizo. La parte $(\ldots)$ del rizo (los paréntesis), se llama curva interna del rizo o lazo. En $[X\,(Y)]$, X se denomina antecedente del rizo y Y consecuente del rizo.*

La parte que se encuentra entre ambas curvas $[X\,(\ldots)]$ (aquella donde se encuentra el antecedente X) se llama *región externa del rizo* o *región del antecedente*. La parte que se encuentra rodeada por la curva interna o lazo $[\ldots(Y)]$ (aquella donde se encuentra el consecuente Y) se llama *región interna del rizo* o *región del lazo* o *región del consecuente*. La línea que conecta la curva interna con la externa $[\ldots(\ldots)\_]$, se llama *enlace del rizo* (usualmente el enlace, no se hace explícito, pero está presente).
En el gráfico $\{Z\}$, la *estructura* $\{\ldots\}$, se llama *corte*. La parte que se encuentra rodeada por el corte $\{Z\}$ (aquella donde se encuentra Z) se llama *región interna del corte* o simplemente *región del corte*.

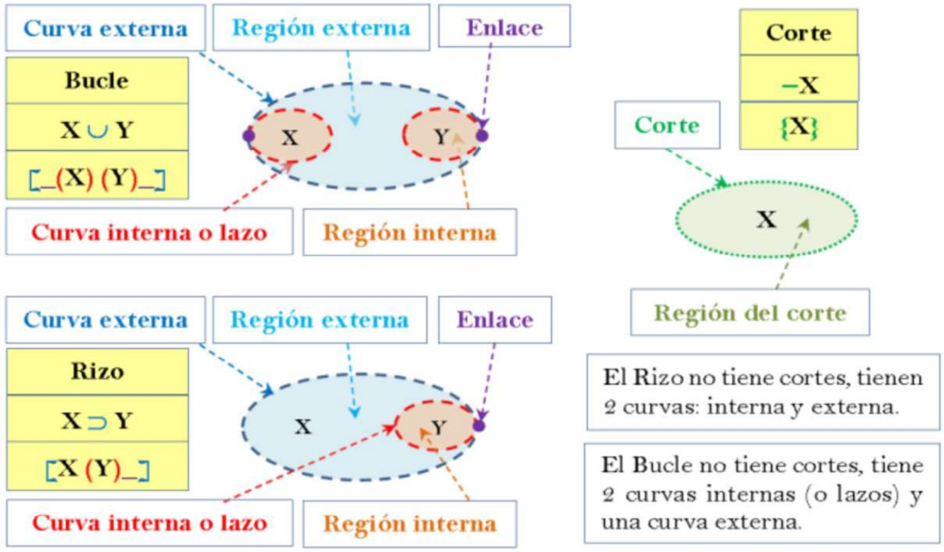

Figura 1: Curvas y regiones de los rizos, bucles y cortes. Oostra (2010).

Un rizo es el *ensamble* de dos *cortes encajados*, es decir, cuando se borra el enlace de un rizo $[X\,(Y)\_]$, se obtienen los *cortes encajados* $\{X\,\{Y\}\}$ (no hay cortes entre ellos). Cuando se *escribe el enlace* (es decir, se realiza el *ensamble*) entre los cortes encajados $\{X\,\{Y\}\}$, se dice que ha sido *ensamblado* el rizo $[X\,(Y)\_]$, o de manera más concisa $[X\,(Y)]$. Como se verá más adelante, el borrado y la escritura del enlace, no generan siempre gráficos lógicamente equivalentes.

En el gráfico $[(X)\,(Y)]$, o de manera más precisa $[\_(X)\,(Y)\_]$, la estructura $[\_(\ldots)\,(\ldots)\_]$, se llama *bucle*. Las partes $[(\ldots)\,(\ldots)]$ del *bucle* (los paréntesis), se llaman *curvas internas del bucle* o *lazos*. La parte $[\ldots]$ del *bucle* (los corchetes), se llama *curva externa del bucle*. En $[(X)\,(Y)]$, X y Y se denominan *disyuntos* del bucle.

La parte que se encuentra entre ambas curvas $[\_(\ldots)\,(\ldots)\_]$ se llama *región externa del bucle*. La parte que se encuentra rodeada por las curvas internas o lazos $[(X)\,(Y)]$ (aquella donde se encuentran los disyuntos X y Y) se llaman *regiones internas del bucle* o, cada una de ellas, *región interna del lazo* o *región del disyunto*. Las *líneas que conectan* las curvas internas con la externa $[\_(\ldots)\,(\ldots)\_]$, se llaman *enlaces del bucle* (usualmente esta línea no se hace explícita, pero está presente).

Un *bucle* es el *ensamble doble* de dos *cortes encajados en otro corte*, es decir, cuando se *borra un enlace del bucle* $[\_(X)\,(Y)\_]$, se obtiene el rizo $[\{X\}\,(Y)\_]$, cuando se *borra el enlace* de este rizo se obtienen los *cortes encajados* $\{\{X\}\,\{Y\}\}$. Cuando se escriben *los enlaces* (es decir, se realiza *el ensamble del bucle*) entre los cortes encajados $\{\{X\}\,\{Y\}\}$, se dice que ha sido *ensamblado* el bucle $[\_(X)\,(Y)\_]$, o de manera más concisa $[(X)\,(Y)]$. Un *bucle* es el *ensamble simple* de un *rizo*, es decir, cuando se *borra un enlace* de un bucle $[\_(X)\,(Y)\_]$, se obtiene el *rizo* $[\{X\}\,(Y)\_]$, o el *rizo* $[\_(Y)\,\{X\})]$.

La representación de los rizos y bucles, en el formato tradicional, se muestra en la Figuras 1 y 2.

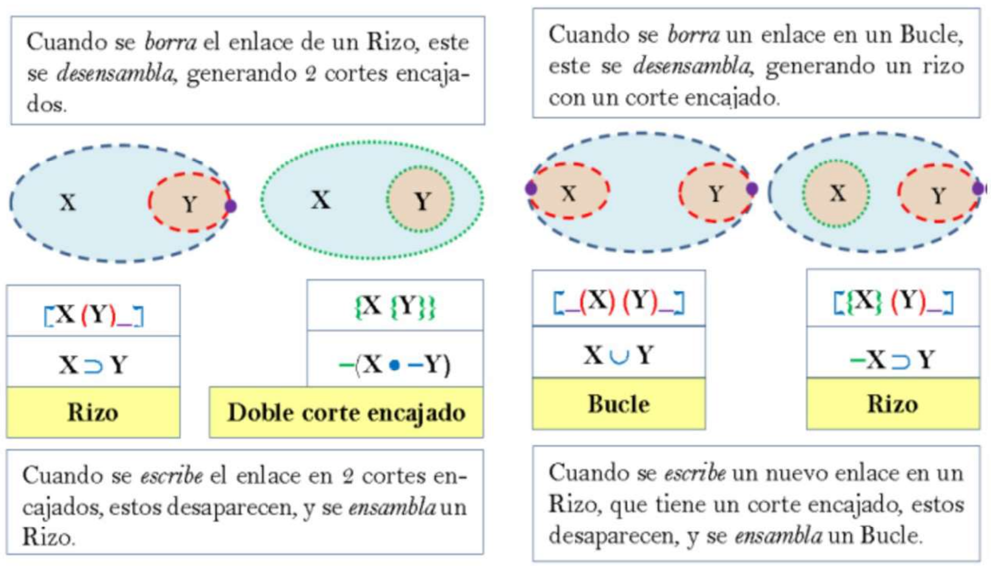

Figura 2: Transformación de bucle en rizo, y de rizo en doble corte encajado, Oostra (2010).

Definición 5.3. *(Tipos de regiones) Sean $X,Y,Z \in GK$. Se dice que un gráfico X se encuentra en una región par, denotado $X \in RP$ o X^{Rp}, si X se encuentra rodeado por un número par de curvas (internas, externas) y/o cortes. X se encuentra en una región impar, denotado $X \in RI$ o X^{Ri}, si X se encuentra rodeado por un número impar de curvas (internas, externas) y/o cortes.*
$X \in Rn$ o X^{R_n} significa que el gráfico X se encuentra en una región rodeada por n curvas y/o cortes ($n = 0,1,2,3,\ldots$), donde n puede ser par o impar.
$X \in RU$ o X^{Ru} significa que X se encuentra en una región de curvas, es decir, X está rodeado únicamente por curvas (no aparece ningún corte).

Notación. *(Rizo con región externa vacía y rizo para la afirmación alterna)* Para $X \in GK$.
$[(X)] = [\lambda(X)]$. $\quad *X = [\{X\}] = [\{X\}(\{\lambda\})]$, y se dice que $*X$ es un *gráfico fuerte*.

Definición 5.4. *(Sistema graficador AlfaK). El sistema deductivo AlfaK consta de:*

a. Axioma. Axλ. λ.

b. Reglas primitivas de transformación de gráficos (y algunas derivadas), donde $X,Y,Z \in GK$.

Borrado de gráficos.
1. $XZ| \Rightarrow X$. 2. $[Y\{XZ\}(W)]| \Rightarrow [Y\{X\}(W)]$. 3. $[(Y)(XZ)]| \Rightarrow [(Y)(X)]$.
Escritura de gráfico.
4. $[X(Y)]| \Rightarrow [XZ(Y)]$. 5. $[Y(W[X(K)])]| \Rightarrow [Y(W[XZ(K)])]$.
Borrado y escritura del enlace. En un rizo o bucle, un *enlace* puede ser *borrado* (generando el doble corte encajado o el rizo), o, en un doble corte encajado, un *enlace* puede ser *escrito* (ensamblando el rizo), o, en un rizo, el segundo enlace puede ser escrito (ensamblando el bucle), según se cumpla alguna de las siguientes

condiciones.

Borrado del enlace.

6. $[X\,[Z\,(Y)\,\_]\,(Z)]\,|\Rightarrow [X\,\{Z\,\{Y\}\}\,(Z)]$. 7. $[\_\,(*X)\,(Y)] \Rightarrow [\{*X\}\,(Y)]$.

Escritura del enlace.

8. $[(Z)\,\{X\}]\,|\Rightarrow [(Z)\,(X)\,\_]$. 9. $[(Y)\,X]\,|\Rightarrow [(Y)\,(\{X\})\,\_]$.

Borrado y escritura del enlace.

10. Regla derivada. $[*X\,(Y)] \Leftrightarrow [\_\,(\{X\})\,(Y)]$.

Borrado y escritura de rizos.

11. $X \Leftrightarrow [(X)]$. 12. $\{X\} \Leftrightarrow \{[(X)]\}$.

13. $[Y\,(X)] \Leftrightarrow [Y\,([(X)])]$. 14. $[(Y)\,(X)] \Leftrightarrow [(Y)\,([(X)])]$.

Borrado y escritura de la afirmación fuerte. Una *afirmación fuerte* puede ser borrada (sin borrar el grafico que afirma), o, la *afirmación fuerte* puede ser *escrita* a la izquierda del gráfico dado, según se cumpla alguna de las siguientes condiciones.

15. $\{X\} \Leftrightarrow \{*X\}$. 16. $\{[*X\,(Y)]\}\,|\Rightarrow \{[X\,(Y)]\}$. Iteración y desiteración de gráficos. Un *gráfico* se puede *iterar* en su misma región, o en una región de un rizo, que *no* sea parte del *gráfico* que se itera, o en una región de un corte, que *no* sea parte del *gráfico* que se itera, e inversamente, un *gráfico* que pueda ser considerado como escrito por iteración, se puede *desiterar*, si se cumple alguna de las siguientes condiciones.

Iteración y desiteración de un gráfico en región de curvas.

17. $Z\,[X\,(Y)] \Leftrightarrow Z\,[XZ\,(Y)]$. 18. $Z\,[Y\,(X)] \Leftrightarrow Z\,[Y\,(XZ)]$.

18.1 $Z\,[(Y)\,(X)] \Leftrightarrow Z\,[(Y)\,(XZ)]$. 19. $[YZ\,(X)] \Leftrightarrow [YZ\,(XZ)]$.

20. $[(Z\,[X\,(Y)])\,(W)] \Leftrightarrow [(Z\,[ZX\,(Y)])\,(W)]$.

Iteración y desiteración de un lazo.

21. $[(X)\,(X)] \Leftrightarrow [(X)]$.

Iteración y desiteración de un gráfico fuerte ($*Z$).

22. $*Z\,\{*ZY\} \Rightarrow *Z\,\{Y\}$ 23. $*Z\,\{Y\,[X\,(W)]\} \Leftrightarrow *Z\,\{Y\,[X*Z\,(W)]\}$.

Preservación de las transformaciones.

24. Regla derivada. $X >> Y$ implica $[W\,(ZX)]\,|\Rightarrow [W\,(ZY)]$.

Generación de reglas de graficación mediante la afirmación fuerte. A partir de las reglas de graficación, primitivas o derivadas, se generan nuevas reglas de graficación con la *afirmación fuerte*.

25. Regla derivada. $X \Rightarrow Y$ implica $*X \Rightarrow *Y$.

Afirmación fuerte de teoremas gráficos.

26. $Y \in TG$ implica $*Y \in TG$.

Reglas implícitas

Concatenación. Dos gráficos que se encuentren en una misma región, pueden se concatenados. E inversamente, dos gráficos que se encuentren concatenados, pueden ser separados, quedando ambos en la misma región.

27. $X,Y \Leftrightarrow YX$.

Conmutatividad. Dos gráficos concatenados pueden ser reescritos cambiando el orden de la concatenación.

28. $XY \Leftrightarrow YX$.
Asociatividad. En tres gráficos que se encuentren concatenados, es *irrelevante el orden* en que fueron concatenados. Inicialmente el primero se concatena con el segundo y este resultado se concatena con el tercero, o el primero se concatena con el resultado de concatenar el segundo con el tercero.
29. $XY,Z \Leftrightarrow X,YZ \Leftrightarrow XYZ$.
Notación. $X \Rightarrow Z$ significa que, mediante una *regla de transformación aplicada* al gráfico X, se infiere el gráfico Z. Si también Z se transforma en X, entonces se escribe $X \Leftrightarrow Z$. $X| \Rightarrow Z$ significa que, $X \Rightarrow Z$, pero en general, no vale $Z \Rightarrow X$. $X >> Z$ significa que X se transforma en Z utilizando un número finito de reglas de transformación.

Observación 5.1. *Las reglas* 27, 28 *y* 29*, reciben el nombre de reglas implícitas, puesto que, dada su obviedad y naturalidad gráfica, pueden no ser referenciadas, pero realmente son aplicadas.*

Definición 5.5. *(Teoremas de AlfaK). Sea $X \in GK$. X es un teorema gráfico de AlfaK, denotado $X \in TG$, si existe una demostración de X a partir del axioma $Ax\lambda$, utilizando las reglas de transformación de gráficos, es decir, X es la última fila de una secuencia finita de líneas, en la cual, cada una de las líneas es $Ax\lambda$, o se infiere de filas anteriores, utilizando las reglas de transformación. O dicho brevemente, $X \in TG$ si y solo si $\lambda >> X$. El número de líneas, de la secuencia finita, es referenciado como la longitud de la demostración de X.*

Proposición 5.1. *(Teorema de deducción gráfico y demostración indirecta). Para $X,Y,Z \in GK$.*

a. $TDG.XY >> Z$ *implica* $X >> [Y(Z)]$.

b. $TDG.Y >> Z$ *implica* $[Y(Z)]$.

c. $\{\_\} >> Z$.

d. $DI.X >> \{\_\}$ *implica* $\{X\}$.

e. $DI.\{X\} >> \{\_\}$ *implica* X.

Prueba. Parte *a*. Supóngase que $XY >> Z$. Si además se supone X, entonces resulta $Y >> Z$, aplicando la regla 24 se deriva $[Y(Y)] >> [Y(Z)]$. Además, por $Ax\lambda$ se tiene λ y por la regla 11 se obtiene $[\_(\lambda)]$, es decir, $[\_(\_)]$, aplicando la regla 4 resulta $[Y(\_)]$, utilizando la regla 19 se infiere $[Y(Y)]$, como ya se probó $[Y(Y)] >> [Y(Z)]$, se deduce $[Y(Z)]$. Por lo tanto, $X >> [Y(Z)]$, es decir, $XY >> Z$ implica $X >> [Y(Z)]$.
Parte *b*. Caso particular de la parte *a* (tomando $X = \lambda$).
Parte *c*. Supóngase que $\{\_\}$, por la regla 15 se infiere $\{*\lambda\}$. Por $Ax\lambda$ se tiene $\lambda \in TG$, utilizando la regla 26 se tiene $*\lambda \in TG$, por la regla 11 se obtiene $[(*\lambda)]$, utilizando la regla 4 se sigue $[\{Z\}(*\lambda)]$, aplicando la regla 8 se concluye $[(Z)(*\lambda)]$, utilizando la regla 7 se deriva $[(Z)\{*\lambda\}]$, y como se tienen $\{*\lambda\}$, por la regla 17 se deduce $[(Z)]$, por la regla 11 se afirma Z. Por lo tanto, $\{\_\} >> Z$.
Parte *d*. Supóngase que $X >> \{\_\}$, por la parte *c*., se tiene $\{\_\} >> \{X\}$, por lo que, $X >> \{X\}$, aplicando la parte *b*, se infiere $[X(\{X\})]$, utilizando la regla 9 se sigue $[(\{X\})(\{X\})]$, por la regla 21 se deriva $[(\{X\})]$,

lo cual por regla 11 significa $\{X\}$.
Parte *e*. Supóngase que $\{X\} >>> \{\_\}$, por la parte *c*, se tiene $\{\_\} >> X$, por lo que, $\{X\} >> X$, aplicando la parte *b*, se infiere $[\{X\}(X)]$, utilizando la regla 8 se sigue $[(X)(X)]$, por la regla 21 se deriva $[(X)]$, lo cual por la regla 11 significa X. □

6. EQUIVALENCIA ENTRE KT4P Y ALFAK

En esta sección, se presenta la equivalencia entre $KT4P$ y AlfaK, inicialmente, en la proposición 6.2, se prueba que los teoremas de $KT4P$ son teoremas gráficos de AlfaK, en la proposición 6.4, se prueba que los teoremas gráficos de $KT4P$ son válidos en la semántica de mundos posibles, finalmente, en la proposición 6.8, se prueba que los teoremas de $KT4P$ son exactamente los teoremas gráficos.

Definición 6.1. *(Interpretación de $KT4P$ en términos de AlfaK)*

a. *Por definición, FA = GA (las fórmulas atómicas son los mismos gráficos atómicos).*

b. *Función de traducción, $(\_)'$ de FK en GK. Sean $X,Y \in FK$ y $P \in FA$.*

   1. $P' = P$.
   2. $(X \supset Y) = \left[X'\left(Y'\right)\right]$.
   3. $(X \cup Y)' = \left[(X)' \cup (Y)'\right]$.
   4. $(-X)' = \left\{X'\right\}$.
   5. $(X \bullet Y)' = X'Y'$.
   6. $(+X)' = \left[\left(X'\right)\right] = *X'$.
   7. $\lambda' = \lambda$.

Proposición 6.1. *(Axiomas de $KT4P$ son teoremas de AlfaK) Sea $X \in FK$.*
Si X es axioma de $KT4P$ entonces $X' \in TG$.

Prueba. Utilizando $Ax\lambda$ y las reglas primitivas de la definición 5.4 se tienen:

1. $Ax\lambda.\lambda$. También es un axioma de AlfaK.

2. $Ax1$. $X \supset (Z \supset X)$. Por $Ax\lambda$ se tiene λ, por la regla 11 se infiere $[(\lambda)]$, es decir, $[()]$, utilizando la regla 4 se sigue $\left[X'\,()\right]$, aplicando la regla 19 resulta $\left[X'\left(X'\right)\right]$, por la regla 13 se infiere $\left[X'\left(\left[\left(X'\right)\right]\right)\right]$, finalmente por la regla 5 se concluye $\left[X\left(\left[Z'\left(X'\right)\right]\right)\right]$, es decir, $(Ax1)'$ es un teorema gráfico.

3. $Ax2$. $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$. Supóngase que $\left[X'\left(\left[Y'\left(Z'\right)\right]\right)\right]$, $\left[X'\left(Y'\right)\right]$ y X'. Por la regla 17 se deducen $\left[\left(\left[Y'\left(Z'\right)\right]\right)\right]$ y $\left[\left(Y'\right)\right]$, aplicando la regla 11 se siguen $\left[Y'\left(Z'\right)\right]$ y Y',

utilizando la regla 17 se infiere $\left[\left(Z'\right)\right]$ finalmente por la regla 11 se concluye Z'. Por TDG dos veces, se ha probado que $(Ax2)'$ es un teorema gráfico.

4. $Ax3$. $X \supset (X \cup Y)$ y $Ax4$. $X \supset (Y \cup X)$. Supóngase que X', por $Ax\lambda$, se tiene λ, por la regla 11 se obtiene $[(\lambda)]$, es decir, $[(\_)]$, utilizando la regla 4 se sigue $\left[\left\{Y'\right\}()\right]$, aplicando la regla 18 resulta $\left[\left\{Y'\right\}\left(X'\right)\right]$, finalmente, aplicando la regla 8 se concluye $\left[\left(Y'\right)\left(X'\right)\right]$. Por TDG, se ha probado que $(Ax3)'$ y $(Ax4)'$ son teoremas gráficos.

5. $Ax5$. $(X \supset Y) \supset ((Z \supset Y) \supset ((X \cup Z) \supset Y))$. Supóngase que $\left[X'\left(Y'\right)\right]$, $\left[Z'\left(Y'\right)\right]$ y $\left[\left(X'\right)\left(Z'\right)\right]$. Por la regla 18.1 se deriva $\left[\left(\left[X'\left(Y'\right)\right]X'\right)\left(Z'\right)\right]$, por la regla 20 se sigue $\left[\left(\left[\left(Y'\right)\right]X'\right)\left(Z'\right)\right]$, utilizando la regla 14 se obtiene $\left[\left(Y'X'\right)\left(Z'\right)\right]$, por la regla 3 resulta $\left[\left(Y'\right)\left(Z'\right)\right]$, utilizando la regla 18.1 se infiere $\left[\left(Y'\right)\left(\left[Z'\left(Y'\right)\right]Z'\right)\right]$, según la regla 20 $\left[\left(Y'\right)\left(\left[\left(Y'\right)\right]Z'\right)\right]$, por la regla 14 resulta $\left[\left(Y'\right)\left(Y'Z'\right)\right]$, utilizando la regla 3 se deriva $\left[\left(Y'\right)\left(Y'\right)\right]$, aplicando la regla 21 se concluye $\left[\left(Y'\right)\right]$, finalmente, por la regla 11 se obtiene Y'. Por lo tanto, según TDG se ha probado que $(Ax5)'$ es un teorema gráfico.

6. $Ax6$. $(X \bullet Y) \supset X$ y $Ax7$. $(X \bullet Y) \supset Y$. Supóngase que $X'Y'$, por la regla 1 se concluyen X' y Y'. Por TDG, se puede afirmar que $(Ax6)'$ y $(Ax7)'$ son teoremas gráficos.

7. $Ax8$. $(X \supset Y) \supset ((X \supset Z) \supset (X \supset (Y \bullet Z)))$. Supóngase que $\left[X'\left(Y'\right)\right]$, $\left[X'\left(Z'\right)\right]$ y X'. Por la regla 17 se infieren $\left[\left(Y'\right)\right]$ y $\left[\left(Z'\right)\right]$, por la regla 11 se derivan Y' y Z', utilizando la regla 27, se concluye $Y'Z'$. Por lo tanto, utilizando TDG se ha probado que $(Ax8)'$ es un teorema gráfico.

8. $Ax9$. $((X \supset Y) \supset X) \supset X$. Supóngase que $\left[\left[X'\left(Y'\right)\right]\left(X'\right)\right]$, aplicando la regla 6 resulta $\left[\left\{X'\left\{Y'\right\}\right\}\left(X'\right)\right]$, según la regla 2 se sigue $\left[\left\{X'\right\}\left(X'\right)\right]$, utilizando la regla 8 se deriva $\left[\left(X'\right)\left(X'\right)\right]$, por la regla 21 se obtiene $\left[\left(X'\right)\right]$, aplicando la regla 11 se concluye X'. Por lo tanto, utilizando TDG, se ha probado que $(Ax9)'$ es un teorema gráfico.

9. $Ax10$. $X \cup -X$. Por $Ax\lambda$ y la regla 11 se tiene $[(\lambda)]$, es decir, $[(\_)]$, aplicando la regla 4 se infiere $\left[X'()\right]$, por la regla 19 se deriva $\left[X'\left(X'\right)\right]$, utilizando la regla 9 se concluye $\left[\left(\left\{X'\right\}\right)\left(X'\right)\right]$. Por lo tanto, $(Ax10)'$ es un teorema gráfico.

10. $Ax11$. $(-X \supset -\lambda) \supset (-Y \supset -(X \supset Y))$, lo cual por la definición de $+$ y Exp equivale a $(+X \bullet -Y) \supset -(X \supset Y)$. Supóngase que $*X'$ y $\left\{Y'\right\}$, por la regla 12 se obtiene $\left\{\left[\left(Y'\right)\right]\right\}$, según la regla 23 resulta $\left\{\left[*X'\left(Y'\right)\right]\right\}$, aplicando la regla 16 se concluye $\left\{\left[X'\left(Y'\right)\right]\right\}$. Finalmente, por TDG se afirma que $[(+X \bullet -Y) \supset -(X \supset Y)]'$ es un teorema gráfico, se concluye finalmente que, $(Ax11)'$ es un teorema gráfico.

11. $Ax12$. $-+X \supset -X$. Supóngase que $\left\{*X'\right\}$, por la regla 15 se tiene $\left\{*X'\right\} \Leftrightarrow \left\{X'\right\}$, resultando $\left\{X'\right\}$. Por lo tanto, utilizando el Hecho 2.1c, $(Ax12)'$ es un teorema gráfico.

12. $Ax13$. $+X \supset (-X \supset Y)$. Supóngase que $*X'$ y $\left\{X'\right\}$, por la regla 15 se infiere $\left\{*X'\right\}$, aplicando la regla 22 se sigue $\{\_\}$, es decir, $\{\lambda\}$, por la regla 15 se infiere $\{*\lambda\}$. Por $Ax\lambda$ se tiene $\lambda \in TG$, utilizando la regla 26 se tiene $*\lambda \in TG$, por la regla 11 se obtiene $[(*\lambda)]$, utilizando la regla 4 se sigue $\left[\left\{Y'\right\}(*\lambda)\right]$, aplicando la regla 8 se concluye $\left[\left(Y'\right)(*\lambda)\right]$, utilizando la regla 7 se deriva $\left[\left(Y'\right)\{*\lambda\}\right]$, y como se tienen $\{*\lambda\}$, por la regla 17 se deduce $\left[\left(Y'\right)\right]$, por la regla 11 se afirma Y'. Finalmente, por TDG dos veces, se concluye que $(Ax13)'$ es un teorema gráfico.

13. $Ax14$. Si X es axioma de AlfaK entonces $+X$ es axioma de AlfaK. Corresponde a la regla 26: Si X' es un teorema gráfico entonces $*X'$ es un teorema gráfico. Por lo tanto, $(Ax14)'$ es válido en AlfaK. □

Proposición 6.2. *(Los teoremas de $KT4P$ son teoremas gráficos). Para $X \in FK$.*

a. Si $X \in TK$ entonces $X' \in TG$.

b. Si Y es consecuencia de X entonces $X' >> Y'$.

Prueba. Parte a. Inducción sobre la longitud de la demostración de X en $KT4P$.
Paso base. Si la longitud de la demostración es 1, entonces X es un axioma, por la proposición 6.1 $X' \in TG$.
Paso inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que: si $Y \in TK$ y la longitud de la demostración de Y es menor que L entonces Y' es un teorema gráfico. Supóngase $X \in TK$ y que la longitud de la demostración de X es L, por lo que X es un axioma o se obtiene de pasos anteriores utilizando Mp. En el primer caso se procede como en el paso base. En el segundo caso se tienen Y y $Y \supset Z$ en pasos previos de la demostración de X, es decir, las longitudes de las demostraciones de Y y $Y \supset X$ son menores que L, por la hipótesis inductiva resulta que $Y' \in TG$ y $\left[Y'\left(X'\right)\right] \in TG$, por la regla 17 resulta $\left[\left(X'\right)\right] \in TG$, finalmente, aplicando la regla 11, se concluye que $X' \in TG$.
Por el principio de inducción matemática, se probado que los teoremas de AlfaK son teoremas gráficos.
Parte b. Si Y es *consecuencia* de X, entonces $X \supset Y \in TK$, por la parte a, $\left[X'\left(Y'\right)\right] \in TG$, es decir, $\lambda >> \left[X'\left(Y'\right)\right]$, si se supone X', por la regla 17 se sigue $\left[\left(Y'\right)\right]$, aplicando la regla 11 resulta Y', por lo que $X' >> Y'$. □

Definición 6.2. *(Interpretación de AlfaK en términos de $KT4P$).*
Función de traducción, $(\_)''$ de GK en FK. Sean $X, Y \in GK$, $P \in GA$

1. $P'' = P$.

2. $[X\,(Y)]'' = X'' \supset Y''$.

3. $[(X)\,(Y)]'' = X'' \cup Y''$.

4. $\{X\}^{''} = -X^{''}$.

5. $(XY)^{''} = X^{''} \bullet Y^{''}$.

6. $(*X)^{''} = \sim -X^{''} = +X^{''}$.

7. $\lambda^{''} = \lambda$.

Proposición 6.3. *(Las reglas primitivas de AlfaK son reglas válidas en la semántica de $KT4P$). Para $X,Y,Z \in GK$.*
Si $X \Rightarrow Y$ entonces, de $X^{''}$ se infiere válidamente $Y^{''}$.

Prueba. Basta con validar las reglas primitivas de la definición 5.4.
Regla 1: $XZ| \Rightarrow X$. Por $Ax6$ y $Ax7$ se tienen $\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) \supset X^{''}$, y $\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) \supset Z^{''}$, es decir, $(XZ)^{''} \Rightarrow X^{''}$, y $(XZ)^{''} \Rightarrow Z^{''}$. Por lo tanto, (Regla 1)$^{''}$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 2: $[Y\{XZ\}(W)]| \Rightarrow [Y\{X\}(W)]$. Supóngase que $M\left(\left(Y' \bullet -\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right)\right) \supset W^{''}\right) = 1$. Supuesto 2, $M\left(Y^{''} \bullet -X^{''}\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(Y^{''}\right) = 1$ y$M\left(-X^{''}\right) = 1$, aplicando $V-$ existe $P \in S, M < P$ y $P\left(X^{''}\right) = 0$, por $V\bullet$ se deriva que $P\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) = 0$, de nuevo por $V-$ se infiere $M\left(-\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right)\right) = 1$, como se tiene $M\left(Y^{''}\right) = 1$, por $V\bullet$ se deriva $M\left(Y^{''} \bullet -\left(X^{''} Z^{''}\right)\right) = 1$, utilizando el supuesto inicial, según $V \supset$ se afirma $M\left(W^{''}\right) = 1$. Aplicando TDG, se concluye que $M\left(Y^{''} \bullet -X^{''}\right) = 1$ implica $M\left(W^{''}\right) = 1$, lo cual por $V \supset$ significa $M\left(\left(Y^{''} \bullet -X^{''}\right) \supset W^{''}\right) = 1$. Por lo tanto, $(Regla 2)^{''}$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 3: $[(Y)(XZ)]| \Rightarrow [(Y)(X)]$. Supuesto 1, $M\left(Y^{''} \cup \left(X^{''} \bullet Z^{''}\right)\right) = 1$. Supuesto 2, $M\left(Y^{''} \cup X^{''}\right) = 0$, por $V\cup$ resulta que $M\left(Y^{''}\right) = 0$ y $M\left(X^{''}\right) = 0$, utilizando el supuesto 1, y aplicando $V \supset$ se infiere $M\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) = 1$, lo cual por $V\bullet$ implica que $M\left(X^{''}\right) = 1$, lo cual no es el caso, por lo que $M\left(Y^{''} \cup X^{''}\right) = 1$. Por lo tanto, $(Regla 3)^{''}$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 4: $[X(Y)]| \Rightarrow [XZ(Y)]$. Supóngase que $M\left(X^{''} \supset Y^{''}\right) = 1$. Si $M\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue que $M\left(X^{''}\right) = 1$, y como $M\left(X^{''} \supset Y^{''}\right) = 1$, utilizando $V \supset$ se infiere que $M\left(Y^{''}\right) = 1$, por lo que, $M\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) = 1$ implica $M\left(Y^{''}\right) = 1$, y por lo tanto, según $V \supset$ se obtiene, $M\left(\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) \supset Y^{''}\right) = 1$. En consecuencia, $(Regla 4)^{''}$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 5: $[Y(W[X(K)])]| \Rightarrow [Y(W[XZ(K)])]$. Supuesto 1,$M\left(Y^{''} \supset \left(W^{''} \bullet \left(X^{''} \supset K^{''}\right)\right)\right) = 1$. Supuesto 2, Y, por $V \supset$ y supuesto 1 se deriva $M\left(W^{''} \bullet \left(X^{''} \supset K^{''}\right)\right) = 1$, utilizando $V\bullet$ se obtiene $M\left(W^{''}\right) = 1$ y $M\left(X^{''} \supset K^{''}\right) = 1$. Supuesto 3, $M\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) = 1$, por $V\bullet$ resulta $M\left(X^{''}\right) = 1$, y como se tiene $M\left(X^{''} \supset K^{''}\right) = 1$, por $V \supset$ se deriva $M\left(K^{''}\right) = 1$, por lo que, $M\left(X^{''} \bullet Z^{''}\right) = 1$ implica $M\left(K^{''}\right) = 1$, lo cual por $V\supset$ significa que $M\left(\left(\left(X''\bullet Z''\right)\supset K\right)\right)=1$, y como se tiene $M\left(W''\right)=1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(W''\bullet\left(\left(X''\bullet Z''\right)\supset K\right)\right)=1$. Descargando el supuesto 2 se deduce $M\left(Y''\supset\left(W''\bullet\left(\left(X''\bullet Z''\right)\supset K\right)\right)\right)=1$. Por lo tanto, (Regla 5)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 6: $[X\,[Z\,(Y)\_\,]\,(Z)]\,|\Rightarrow[X\,\{Z\,\{Y\}\}\,(Z)]$. Supóngase que $M\left(\left(X''\bullet\left(Z''\supset Y''\right)\right)\supset Z''\right)=1$. Supuesto 2, $M\left(\left(X''\bullet-\left(Z''\bullet-Y''\right)\right)\supset Z''\right)=0$, por $V\supset$ se obtiene $M\left(X''\bullet-\left(Z''\bullet-Y''\right)\right)=1$ y $M\left(Z''\right)=0$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(-\left(Z''\bullet-Y''\right)\right)=1$ y $M\left(X''\right)=1$, como $M\left(Z''\right)=0$, utilizando el supuesto inicial, por $V\supset$ resulta $M\left(X''\bullet\left(Z''\supset Y''\right)\right)=0$, y como $M\left(X''\right)=1$, por $V\bullet$ se deriva $M\left(Z''\supset Y''\right)=0$, lo cual por $V\supset$ significa $M\left(Y''\right)=0$ y $M\left(Z''\right)=1$, lo cual no es el caso, por lo que, $M\left(\left(X''\bullet-\left(Z''\bullet-Y''\right)\right)\supset Z''\right)=1$. Por lo tanto, (Regla 6)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 7: $[(*X)\,(Y)]\Rightarrow[\{*X\}\,(Y)]$. Supóngase que $M\left(+X''\cup Y''\right)=1$. Supuesto 2, $M\left(-+X''\right)=1$, aplicando $V-+$ se sigue $M\left(+X''\right)=0$, aplicando $V\cup$, en el supuesto inicial se infiere $M\left(Y''\right)=1$, por lo que, $M\left(-+X''\right)=1$ implica $M\left(Y''\right)=1$, utilizando $V\supset$ se concluye que $M\left(-+X''\supset Y''\right)=1$. Por lo tanto, (Regla 7)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 8: $[(Y)\,\{X\}]\,|\Rightarrow[(Y)\,(X)]$. Supuesto 1, $M\left(-X''\supset Y''\right)=1$. Supuesto 2, $M\left(X''\cup Y''\right)=0$, lo cual por $V\cup$ significa $M\left(X''\right)=0$ y $M\left(Y''\right)=0$, utilizando el supuesto 1 y $V\supset$ implica que $M\left(-X''\right)=0$, por $V-$ se sigue para todo modelo N, si $M<N$ entonces $N\left(X''\right)=1$, por la restricción RR se sabe que $M<M$, de donde $M\left(X''\right)=1$, lo cual no es el caso, en consecuencia, $M\left(X''\cup Y''\right)=1$. Por lo tanto, (Regla 8)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 9: $[(Y)\,X]\,|\Rightarrow[(Y)\,(\{X\})]$. Supuesto 1, $M\left(X''\supset Y''\right)=1$. Supuesto 2, $M\left(Y''\cup-X''\right)=0$, por $V\cup$ se infiere $M\left(Y''\right)=0$ y $M\left(-X''\right)=0$, aplicando $V-$ y la restricción RR se sigue $M\left(X''\right)=1$, por el supuesto 1 y $V\supset$ se genera $M\left(Y''\right)=1$, lo cual es imposible, entonces $M\left(Y''\cup-X''\right)=1$. Por lo tanto, (Regla 9)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 11: $X\Leftrightarrow[(X)]$. Supóngase que $M\left(X''\right)=1$. Por $V\supset$ resulta que $M\left(\lambda''\supset X''\right)=1$. Para la recíproca, supóngase que $M\left(\lambda''\supset X''\right)=1$, como por $V\lambda$ se tiene que $M\left(\lambda''\right)=1$, utilizando $V\supset$ se deriva $M\left(X''\right)=1$. Se ha probado que, $M\left(X''\right)=1$ es equivalente a $M\left(\lambda''\supset X''\right)=1$. Por lo tanto, (Regla 11)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 12: $\{X\}\Leftrightarrow\{[(X)]\}$. $M\left(-X''\right)=1$ equivale a, existe $P\in S$, $P<M$ y $P\left(X''\right)=0$, por la regla

$(\text{Regla } 11)''$, probada en el párrafo anterior, es equivalente a existe $P \in S$, $P < M$ y $P\left(\lambda'' \supset X''\right) = 0$, lo cual por $V-$ equivale a $M\left(-\left(\lambda'' \supset X''\right)\right) = 1$. Por lo tanto, $(\text{Regla } 12)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 13: $[Y(X)] \Leftrightarrow [Y([(X)])]$. $M\left(Y'' \supset X''\right) = 1$ por $V \supset$ equivale a, $M\left(Y''\right) = 1$ implica $M\left(X''\right) = 1$, aplicando $(\text{Regla } 11)''$ (probado más arriba) equivale a, $M(Y) = 1$ implica $M\left(\lambda'' \supset X''\right) = 1$, de nuevo por $V \supset$ es equivalente a $M\left(Y \supset \left(\lambda'' \supset X''\right)\right) = 1$. Por lo tanto, $(\text{Regla } 13)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 14: $[(Y)(X)] \Leftrightarrow [(Y)([(X)])]$. $M\left(Y'' \cup X''\right) = 1$ por $V\cup$ equivale a, $M\left(Y''\right) = 1$ o $M\left(X''\right) = 1$, aplicando $(\text{Regla } 11)''$ (probado más arriba) equivale a, $M(Y) = 1$ o $M\left(\lambda'' \supset X''\right) = 1$, de nuevo por $V\cup$ es equivalente a $M\left(Y \cup \left(\lambda'' \supset X''\right)\right) = 1$. Por lo tanto, $(\text{Regla } 14)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 15: $\{X\} \Leftrightarrow \{*X\}$. Supóngase que, $M\left(-+X''\right) = 0$, aplicando $V-+$ se sigue que $\left(+X''\right) = 1$, por $V+$ se tiene que, para todo $N \in S$, $M < N$ implica $N\left(X''\right) = 1$, lo cual por $V-$ significa que $M\left(-X''\right) = 0$, por lo que, $M\left(-+X''\right) = 0$ implica $M\left(-X''\right) = 0$, es decir, $M\left(-X''\right) = 1$ implica $M\left(-+X''\right) = 1$. Para probar la recíproca, supóngase que, $M\left(-+X''\right) = 1$, por $V-+$ se deriva $M\left(+X''\right) = 0$, lo cual por $V+$ significa que, existe $P \in S$, $M < P$ y $P\left(X''\right) = 0$, utilizando $V-$ se infiere $M\left(-X''\right) = 1$, por lo que, $M\left(-+X''\right) = 1$ implica $M\left(-X''\right) = 1$. Como también se tiene la recíproca, entonces $M\left(-+X''\right) = 1$ equivale a $M\left(-X''\right) = 1$. Por lo tanto, $(\text{Regla } 15)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 16: $\{[*X(Y)]\} \mid \Rightarrow \{[X(Y)]\}$. Supóngase que $M\left(-\left(+X'' \supset Y''\right)\right) = 1$. Por $V-$ significa existe $P \in S$, $M < P$ y $P\left(+X'' \supset Y''\right) = 0$, lo cual por $V \supset$ significa $P\left(+X''\right) = 1$ y $P\left(Y''\right) = 0$, y por $V+$ se infiere, para todo $N \in S$, $P < N$ implica $N\left(X''\right) = 1$, como por la restricción RR, $P < P$ resulta que $P\left(X''\right) = 1$. Si se tuviese que $M\left(-\left(X'' \supset Y''\right)\right) = 0$, entonces por $V \supset$ se tendría para todo $N \in S$, $M < N$ implica $M\left(X'' \supset Y''\right) = 1$, en particular, como $M < P$, entonces $P\left(X'' \supset Y''\right) = 1$, y como ya se obtuvo $P\left(X''\right) = 1$, por $V \supset$ se deduce $P\left(Y''\right) = 1$, lo cual no es el caso, por lo que $M\left(-\left(X'' \supset Y''\right)\right) = 1$. Por lo tanto, $(\text{Regla } 16)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 17: $Z[X(Y)] \Leftrightarrow Z[XZ(Y)]$. Supóngase que $M\left(Z'' \bullet \left(X'' \supset Y''\right)\right) = 1$, por $V\bullet$ equivale a $M\left(Z''\right) = 1$ y $M\left(X'' \supset Y''\right) = 1$. Supóngase que $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(X''\right) = 1$, como se tiene $M\left(X'' \supset Y''\right) = 1$, por $V \supset$ se infiere $M\left(Y''\right) = 1$, por lo que $M\left(\left(X'' \bullet Z''\right) \supset Y''\right) = 1$, como además se tiene $M\left(Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se concluye $M\left(Z'' \bullet \left(\left(X'' \bullet Z''\right) \supset Y''\right)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación directa de $(\text{Regla } 17)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Para la implicación recíproca, supóngase que $M\left(Z'' \bullet \left(\left(X'' \bullet Z''\right) \supset Y''\right)\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(Z''\right) = 1$ y $M\left(X'' \bullet Z'' \supset Y''\right) = 1$. Supuesto 2, $M\left(X''\right) = 1$, y como $M\left(Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se obtiene $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 1$, pero $M\left(\left(X'' \bullet Z''\right) \supset Y''\right) = 1$, aplicando $V \supset$ se infiere $M\left(Y''\right) = 1$, por lo que, $M\left(X''\right) = 1$ implica $M\left(Y''\right) = 1$, lo cual por $V \supset$ significa $M\left(X'' \supset Y''\right) = 1$, como $M\left(Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se deriva $M\left(Z'' \bullet (X \supset Y)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación recíproca de $(\text{Regla } 17)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 18: $Z[Y(X)] \Leftrightarrow Z[Y(XZ)]$. Supóngase que $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \supset X''\right)\right) = 1$, lo cual por $V\bullet$ implica $M\left(Z''\right) = 1$ y $M\left(Y'' \supset X''\right) = 1$. Supuesto 2, $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \supset \left(X'' \bullet Z''\right)\right)\right) = 0$, y como $M\left(Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(Y'' \supset \left(X'' \bullet Z''\right)\right) = 0$, aplicando $V \supset$ se deriva $M\left(Y''\right) = 1$ y $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 0$. Se tienen $M\left(Y'' \supset X''\right) = 1$ y $M\left(Y''\right) = 1$, por $V \supset$ resulta $M\left(X''\right) = 1$, pero $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 0$, según $V\bullet$ se infiere $M\left(Z''\right) = 0$, lo cual no es el caso, por lo que el supuesto 2 es falso, es decir $M\left(Y'' \supset \left(X'' \bullet Z''\right)\right) = 1$, y como $M\left(Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \supset \left(X'' \bullet Z''\right)\right)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación directa de $(\text{Regla } 18)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Para la implicación recíproca, supóngase que $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \supset \left(X'' \bullet Z''\right)\right)\right) = 1$, lo cual por $V\bullet$ significa, $M\left(Z''\right) = 1$ y $M\left(Y'' \supset \left(X'' \bullet Z''\right)\right) = 1$, por $V \supset$ resulta que, $M\left(Y''\right) = 1$ implica $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 1$, pero de $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 1$ por $V\bullet$ se deriva $M\left(X''\right) = 1$, luego, $M\left(Y''\right) = 1$ implica $M\left(X''\right) = 1$, es decir $M\left(Y'' \supset X''\right) = 1$, y como $M\left(Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue que $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \supset X''\right)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación recíproca de $(\text{Regla } 18)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 18.1: $Z[(Y)(X)] \Leftrightarrow Z[(Y)(XZ)]$. Supóngase que $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \cup X''\right)\right) = 1$, lo cual por $V\bullet$ implica $M\left(Z''\right) = 1$ y $M\left(Y'' \cup X''\right) = 1$. Supuesto 2, $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \cup \left(X'' \bullet Z''\right)\right)\right) = 0$, y como $M\left(Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(Y'' \cup \left(X'' \bullet Z''\right)\right) = 0$, aplicando $V\bullet$ se deriva $M\left(Y''\right) = 0$ y $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 0$, pero $M\left(Z''\right) = 1$, aplicando $V\bullet$ se deriva $M\left(X''\right) = 0$, y como $M\left(Y'' \cup X''\right) = 1$, por $V\cup$ se obtiene $M\left(Y''\right) = 1$, lo cual no es el caso, por lo que, $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \cup \left(X'' \bullet Z''\right)\right)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación directa de $(\text{Regla } 18.1)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Para la implicación recíproca, supóngase que $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \cup \left(X'' \bullet Z''\right)\right)\right) = 1$, lo cual por $V\bullet$ significa, $M\left(Z''\right) = 1$ y $M\left(Y'' \cup \left(X'' \bullet Z''\right)\right) = 1$, por $V\cup$ resulta que, $M\left(Y''\right) = 1$ o $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 1$, pero de $M\left(X'' \bullet Z''\right) = 1$ por $V\bullet$ se deriva $M\left(X''\right) = 1$, luego, $M\left(Y''\right) = 1$ o $M\left(X''\right) = 1$, es decir $M\left(Y'' \cup X''\right) = 1$, y como $M\left(Z''\right) = 1$, aplicando $V\bullet$ se concluye que $M\left(Z'' \bullet \left(Y'' \cup X''\right)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación recíproca de $(\text{Regla } 18.1)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 19: $[YZ(X)] \Leftrightarrow [YZ(XZ)]$. Supóngase que $M\left(\left(Y'' \bullet Z''\right) \supset X''\right) = 1$. Supuesto 2, $M\left(Y'' \bullet Z''\right) = 1$,

por $V\supset$ resulta $M\left(X''\right)=1$, del supuesto 2 por $V\bullet$ se deriva $M\left(Z''\right)=1$, y al tener $M\left(X''\right)=1$, de nuevo por $V\bullet$ se deduce $M\left(X''\bullet Z''\right)=1$, por lo que, $M\left(Y''\bullet Z''\right)=1$ implica $M\left(X''\bullet Z''\right)=1$, lo cual por $V\supset$ significa $M\left(\left(Y''\bullet Z''\right)\supset\left(X''\bullet Z''\right)\right)=1$. Por lo tanto, la implicación directa de (Regla 19)$''$ es una regla válida en $KT4P$.
Para la implicación recíproca, supóngase que $M\left(\left(Y''\bullet Z''\right)\supset\left(X''\bullet Z''\right)\right)=1$. Si $M\left(Y''\bullet Z''\right)=1$, por $V\supset$ se sigue $M\left(X''\bullet Z''\right)=1$, por $V\bullet$ se infiere $M\left(X''\right)=1$, de donde, $M\left(Y''\bullet Z''\right)=1$ implica $M\left(X''\right)=1$, lo cual por $V\supset$ significa $M\left(\left(Y''\bullet Z''\right)\supset X''\right)=1$. Por lo tanto, la implicación recíproca de (ID.G.3 Regla 19)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 20: $[(Z[X(Y)])(W)]\Leftrightarrow[(Z[ZX(Y)])(W)]$. Supóngase que $M\left(\left(Z''\bullet\left(X''\supset Y''\right)\right)\cup W''\right)=1$. Supuesto 2 $M\left(\left(Z''\bullet\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)\right)\cup W''\right)=0$, por $V\cup$ se obtienen $M\left(Z''\bullet\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)\right)=0$ y $M\left(W''\right)=0$, lo cual junto al supuesto inicial, por $V\cup$ implica $M\left(Z''\bullet\left(X''\supset Y''\right)\right)=1$, por $V\bullet$ implica $M\left(Z''\right)=1$y$M\left(X''\supset Y''\right)=1$, y como se tiene $M\left(Z''\bullet\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)\right)=0$ por $V\bullet$ se deriva $M\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)=0$, por $V\supset$ resultan $M\left(Z''\bullet X''\right)=1$ y $M\left(Y''\right)=0$, y como $M\left(X''\supset Y''\right)=1$, por $V\supset$ se afirma $M\left(X''\right)=0$, pero de $M\left(Z''\bullet X''\right)=1$, se sigue por $V\bullet$ que $M\left(X''\right)=1$, generando contradicción, por lo que, el supuesto 2 es falso, es decir $M\left(\left(Z''\bullet\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)\right)\cup W''\right)=1$. Por lo tanto, la implicación directa de (Regla 20)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Para la implicación recíproca, supóngase que $M\left(\left(Z''\bullet\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)\right)\cup W''\right)=1$. Supuesto 2, $M\left(\left(Z''\bullet\left(X''\supset Y''\right)\right)\cup W''\right)=0$, por $V\cup$ se sigue $M\left(Z''\bullet\left(X''\supset Y''\right)\right)=0$ y $M\left(W''\right)=0$, este resultado con el supuesto inicial y $V\cup$ implica $M\left(Z''\bullet\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)\right)=1$, es decir $M\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)=1$ y $M\left(Z''\right)=1$, como $M\left(Z''\bullet\left(X''\supset Y''\right)\right)=0$, por $V\bullet$ se infiere $M\left(X''\supset Y''\right)=0$, es decir $M\left(X''\right)=1$ y $M\left(Y''\right)=0$, al tener $M\left(X''\right)=M\left(Z''\right)=1$, por $V\bullet$ resulta $M\left(X''\bullet Z''\right)=1$, pero $M\left(\left(Z''\bullet X''\right)\supset Y''\right)=1$, entonces por $V\supset$ se deduce $M\left(Y''\right)=1$, lo cual no es el caso, por lo que $M\left(\left(Z''\bullet\left(X''\supset Y''\right)\right)\cup W''\right)=1$. Por lo tanto, la implicación recíproca de (Regla 20)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 21: $[(X)(X)]\Leftrightarrow[(X)]$. Supóngase que $M\left(X''\cup X''\right)=1$. Si se tuviese que $M\left(X''\right)=0$, por $V\cup$ se tendría $M\left(X''\right)=1$, contradicción, por lo que $M\left(X''\right)=1$. Para la recíproca, supóngase que $M\left(X''\right)=1$, pero $M\left(X''\cup X''\right)=0$, por $V\cup$ resulta $M\left(X''\right)=0$, contradicción, por lo que $M\left(X''\cup X''\right)=1$. Por lo tanto, (Regla 21)$''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 22: $*X\{*XY\}|\Rightarrow *X\{Y\}$. Supóngase que, $M\left(+X''\bullet-\left(+X''\bullet Y''\right)\right)=1$, por $V\bullet$ se sigue

$M\left(+X''\right) = 1$ y $M\left(-\left(+X'' \bullet Y''\right)\right) = 1$, lo cual según $V-$ significa que existe $P \in S$, $M < P$ y $P\left(+X'' \bullet Y''\right) = 0$. Supuesto 2, $M\left(+X'' \bullet -Y''\right) = 0$, y como $M\left(+X''\right) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $M\left(-Y''\right) = 0$, aplicando $V-$, resulta que para cada $N \in S$, $M < N$ implica $N\left(Y''\right) = 1$, y como $M < P$, entonces $P\left(Y''\right) = 1$, pero $P\left(+X'' \bullet Y''\right) = 0$, por $V\bullet$ se deriva $P\left(+X''\right) = 0$, por $V+$ se infiere que existe $Q \in S$, $P < Q$ y $Q\left(X''\right) = 0$, como $M < P$ y $P < Q$ por la restricción RT se sigue $M < Q$, por $V+$ se concluye que $M\left(+X''\right) = 0$, lo cual no es el caso, por lo que, $M\left(+X'' \bullet -Y''\right) = 1$. En consecuencia, $M\left(+X'' \bullet -\left(+X'' \bullet Y''\right)\right) = 1$ implica $M\left(+X'' \bullet -Y''\right) = 1$. Por lo tanto, $(\text{Regla } 22)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 23: $*Z\{Y[X(W)]\} \Leftrightarrow *Z\{Y[X * Z(W)]\}$. Supóngase que $M\left(+Z'' \bullet -\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right)\right) = 1$, por $V\bullet$ se siguen $M\left(+Z''\right) = 1$ y $M\left(-\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right)\right) = 1$, por $V-$ se sigue la existencia de $P \in S, M < P$ y $P\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right) = 0$.

Supuesto 2, $M\left(+Z'' \bullet -\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right)\right) = 0$, como $M\left(+Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ resulta $M\left(-\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right)\right) = 0$, aplicando $V-$ se infiere para cada $N \in S$, $M < N$ implica $N\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right) = 1$, en particular, como $M < P$ entonces $P\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right) = 1$, es decir, por $V \bullet P\left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right) = 1$ y $P\left(Y''\right) = 1$, pero $P\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right) = 0$, por $V\bullet$ se afirma $P\left(X'' \supset W''\right) = 0$, lo cual por $V \supset$ significa $P\left(X''\right) = 1$ y $P\left(W''\right) = 0$, pero $P\left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right) = 1$, por $V \supset$ se afirma $P\left(X'' \bullet +Z''\right) = 0$, pero $P\left(X''\right) = 1$, por $V\bullet$ resulta $P\left(+Z''\right) = 0$ aplicando $V+$ se tiene que existe $Q \in S$, $P < Q$ y $Q\left(Z''\right) = 0$, pero como $M < P$ y $P < Q$, por la restricción RT se deriva que $M < Q$, además se sabe que $M\left(+Z''\right) = 1$, por $V+$ significa que para todo $N \in S$, $M < N$ implica $N\left(Z''\right) = 1$, en particular, como $M < Q$, entonces $Q\left(Z''\right) = 1$, lo cual no es el caso, y entonces, $M\left(+Z'' \bullet -\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación directa de $(\text{Regla } 23)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Para probar la recíproca, supóngase que $M\left(+Z'' \bullet -\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right)\right) = 1$, según $V\bullet$ se tienen $M\left(-(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right) = 1$ y $M\left(+Z''\right) = 1$, aplicando $V-$ se sigue que existe $P \in S$, tal que $M < P$ y $P\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right) = 0$. Supuesto 2, $M\left(+Z'' \bullet -\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right)\right) = 0$, como $M\left(+Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se infiere $M\left(-\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right)\right) = 0$, utilizando $V-$ se obtiene para cada $N \in S$, $M < N$ implica $N\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right) = 1$, en particular, como $M < P$ entonces $P\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right) = 1$, aplicando $V\bullet$, resulta $P\left(X'' \supset W''\right) = 1$ y $P\left(Y''\right) = 1$, pero $P\left(Y'' \bullet \left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right)\right) = 0$, utilizando $V\bullet$ se afirma que $P\left(\left(X'' \bullet +Z''\right) \supset W''\right) = 0$, por $V \supset$ resulta $P\left(X'' \bullet +Z''\right) = 1$ y $P\left(W''\right) = 0$, y al tener $P\left(X'' \supset W''\right) = 1$ por $V \supset$ se sigue $P\left(X''\right) = 0$, pero, como

$P\left(X'' \bullet +Z''\right) = 1$, por $V\bullet$ se infiere $P\left(X''\right) = 1$, lo cual es imposible, por lo que el supuesto 2 no es el caso, es decir, $M\left(+Z'' \bullet -\left(Y'' \bullet \left(X'' \supset W''\right)\right)\right) = 1$. Por lo tanto, la implicación recíproca de $(Regla23)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 26: $Y \in TG$ implica $*Y \in TG$. Si $+Y''$ es inválida, entonces existe un modelo, $(S, Ma, <, V)$, tal que $Ma(+Y'') = 0$, por $V+$ se infiere que existe $Q \in S$, $Ma < Q$ y $Q(Y'') = 0$, lo cual implica que Y'' es falsa en el modelo $(S - \{Ma\}, Q, <, V)$, es decir, Y'' es inválida. Por lo tanto, $+Y''$ es inválida implica que Y'' es inválida, o de forma equivalente, Y'' es válida implica que $+Y''$ es válida. En consecuencia,(Regla 26)$''$ se satisface en $KT4P$.

Regla 27:$X,Y \Leftrightarrow YX$. Por $V\bullet$, $M(X'') = 1$ y $M(Y'') = 1$ es equivalente a $M(X'' \bullet Y'') = 1$. Por lo tanto, $(Regla27)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 28: $YX \Leftrightarrow YX$. Por $V\bullet$, $M(X'' \bullet Y'') = 1$ es equivalente a $M(X'') = 1$ y $M(Y'') = 1$, lo cual es equivalente a (tienen el mismo significado) $M(Y'') = 1$ y $M(X'') = 1$, y esto por $V\bullet$, es equivalente a $M(Y'' \bullet X'') = 1$. Por lo tanto, $(Regla28)''$ es una regla válida en $KT4P$.

Regla 29: $XY,Z \Leftrightarrow X$, $YZ \Leftrightarrow XYZ$. Aplicando $V\bullet$, se tiene la siguiente cadena de equivalencias, $M((X'' \bullet Y'') \bullet Z'') = 1$, significa $M(X'' \bullet Y'') = 1$ y $M(Z'') = 1$, es decir, $M(X'') = 1$ y $M(Y'') = 1$, y además $M(Z'') = 1$, lo cual significa lo mismo que $M(X'') = 1$, y además, $M(Y'') = 1$ y $M(Z'') = 1$, o sea, $M(X'') = 1$, y $M(Y'' \bullet Z'') = 1$, lo cual es equivalente a $M(X'' \bullet (Y'' \bullet Z'')) = 1$. Por lo tanto, $(Regla29)''$ es una regla válida en $KT4P$. $\square$

Proposición 6.4. *(Los teoremas gráficos son válidos en la semántica de $KT4P$.) Para $X,Y \in GK$.*

a. Si $X \in TG$ entonces $X'' \in VK$.

b. Si $X >> Y$ entonces X'' valida a Y''.

Prueba. Parte *a*. Por inducción sobre la longitud, L, de la demostración de X en AlfaK.
Paso base. $L = 1$, por lo que X es un axioma, es decir, $X = \lambda$, por lo que $X'' = \lambda'' = \lambda$ y por $V\lambda$, $\lambda \in VK$.
Paso inductivo. Como hipótesis inductiva se tiene que, si $Y \in TG$ y la longitud de la demostración de Y es menor que$L$, entonces $Y'' \in VK$. Supóngase que la longitud de la demostración de X es L. Si X es un axioma, se procede como en el paso base, en caso contrario, X se infiere de pasos anteriores utilizando las reglas de construcción de gráficos, se tiene Z y se aplica la regla $Z \Rightarrow X$, para inferir X. Como la longitud de la demostración de Z es menor que L, por la hipótesis inductiva se afirma que $Z'' \in VK$, como $Z \Rightarrow X$ es una de las reglas de AlfaK, por la proposición 6.3, se garantiza que de X'' se infiere válidamente Z'', por lo tanto, $X'' \in VK$.

Por el principio de inducción matemática, se ha probado que los teoremas gráficos son válidos.
Parte *b*. Si $X >> Y$, es decir, $[X(Y)] \in TG$, por la parte *a* se sigue $X'' \supset Y'' \in VK$, es decir, X'' valida a Y''. $\square$

Proposición 6.5. *(Los teoremas gráficos son teoremas de $KT4P$). Para $X,Y \in GK$.*

a. *Si $X \in TG$ entonces $X^{''} \in TK$.*

b. *Si $X >> Y$ entonces $Y^{''}$ es consecuencia de $X^{''}$.*

Prueba. Parte *a*. Por la Proposición 4.8*a* se tiene que, $X^{''} \in VK$ si y solo si $X^{''} \in TK$, y por la Proposición 6.4*a* se tiene que, si $X \in TG$ entonces $X^{''} \in VK$. Por lo tanto, si $X \in TG$ entonces $X^{''} \in TK$.
Parte *b*. Consecuencia de las proposiciones 4.8*b* y 6.4*b*. □

Proposición 6.6. *(Los teoremas gráficos son teoremas de $KT4P$). Para $X,Y \in GK$*

a. *Si $X \in TG$ entonces $X^{''} \in TK$.*

b. *Si $X >> Y$ entonces $Y^{''}$ es consecuencia de $X^{''}$.*

Prueba. Parte *a*. Por la Proposición 4.8*a* se tiene que, $X^{''} \in VK$ si y solo si $X^{''} \in TK$, y por la Proposición 6.4*a* se tiene que, si $X \in TG$ entonces $X^{''} \in VK$. Por lo tanto, si $X \in TG$ entonces $X^{''} \in TK$.
Parte *b*. Consecuencia de las proposiciones 4.8*b* y 6.4*b*. □

Definición 6.3. *(Composición de las funciones de traducción) Sean $T1 = (\_)^{'} : FK \to GK$ y $T2 = (\_)^{''} : GK \to FK$, las funciones de traducción presentadas en definiciones 6.1 y 6.2.*
Se definen: la función compuesta $T1oT2 : GK \to GK$ tal que $(T1oT2)(X) = T1(T2((X))$, la función compuesta, $T2oT1 : FK \to FK$ tal que $(T2oT1)(X) = T2(T1(X))$, la función identidad en FK, $Id_{FK} : FK \to FK$ tal que $(Id_{FK})(X) = X$, la función identidad en GK, $Id_{GK} : GK \to GK$ tal que $(Id_{GK})(X) = X$.

Definición 6.4. *(Complejidad de los gráficos) Sean $P \in GA$, $X,Y \in GK$.*
La función, C, complejidad de un gráfico, asigna a cada gráfico un entero no negativo, de la siguiente forma:

1. $C(P) = C(\lambda) = 0$ 2. $C(\{X\}) = 1 + C(X)$. 3. $C(XY) = 1 + \max\{C(X), C(Y)\}$.
4. $C([(X)(Y)]) = 2 + \max\{C(X), C(Y)\}$. 5. $C([X(Y)]) = 1 + \max\{C(X), C(Y) + 1\}$.

Definición 6.5. *(Complejidad de las fórmulas) Sean $P \in FA$; $X,Y \in FK$.*
La función, K, complejidad de una fórmula, asigna a cada fórmula un entero no negativo, de la siguiente forma:

1. $K(P) = K(\lambda) = 0$. 2. $K(-X) = 1 + K(X)$. 3. $K(X \bullet Y) = K(X \cup Y) = K(X \supset Y) = 1 + \max\{K(X), K(Y)\}$.

Proposición 6.7. *(Funciones de traducción inversas). Sean $P \in GA$, $P \in FA, G, G1, G2 \in GK$ y $X, X1, X2 \in FK$.*

a. $T1oT2 = Id_{GK}$. *b.* $T2oT1 = Id_{FK}$.
c. $T1$ *es la función inversa de* $T2$. *d.* $T2$ *es la función inversa de* $T1$.

Prueba. Parte *a*. Inducción sobre la complejidad, C, del gráfico G.
Paso base. $C(G) = 0$, entonces hay dos casos.
Caso 1: $G = P.(T1oT2)(P) = T1(T2(P)) = T1(P) = P$.

Caso 2: $G=\lambda$. $(T1oT2)(\lambda)=T1(T2(\lambda))=T1(\lambda)=\lambda$.
Paso inductivo. $C(G)\geq 1$. Como hipótesis inductiva se tiene que

$$(T1oT2)(G1)=G1,\,(T1oT2)(G2)=G2.$$

Hay cuatro casos. Caso 3:

$$G=\{G1\}.(T1oT2)(\{G1\})=T1(T2(\{G1\}))=T1(-T2(G1))=\{T1(T2(G1))\}=\{G1\}.$$

Caso 4: $G=G1G2$.

$$(T1oT2)(G1G2)=T1(T2(G1G2))=T1(T2(G1)\bullet T2(G2))=T1(T2(G1))T1(T2(G2))=G1G2.$$

Caso 5:

$$\begin{aligned} G=[G1(G2)]\,(T1oT2)([G1(G2)]) &= T1(T2([G1(G2)]))=T1(T2(G1)\supset T2(G2)) \\ &=[T1(T2(G1))(T1(T2(G2)))]=[G1(G2)] \end{aligned} \tag{1}$$

Caso 6:

$$\begin{aligned} G=[(G1)(G2)].(T1oT2)([(G1)(G2)]) &= T1(T2([(G1)(G2)]))=T1(T2(G1)\cup T2(G2)) \\ &=[(T1(T2(G1)))(T1(T2(G2)))]=[(G1)(G2)] \end{aligned} \tag{2}$$

Por el principio de inducción matemática se ha probado que $(T1oT2)=Id_{GK}$.
Parte b. Inducción sobre la complejidad, K, de la fórmula X.
Paso base. $K(X)=0$, entonces hay dos casos.
Caso 1: $X=P.(T2oT1)(P)=T2(T1(P))=T2(P)=P$.
Caso 2: $X=\lambda$. $(T2oT1)(\lambda)=T2(T1(\lambda))=T2(\lambda)=\lambda$.
Paso inductivo. $K(X)\geq 14$. Como hipótesis inductiva se tiene que

$$(T2oT1)(X1)=X1,\,(T2oT1)(X2)=X2.$$

Hay cuatro casos. Caso 3.

$$X=-X1.\,(T2oT1)(-X1)=T2(T1(-X1))=T2(\{T1(X1)\})=-(T2oT1)(X1)=-X1.$$

Caso 4. $X=X1\bullet X2$.

$$\begin{aligned} (T2oT1)(X1\bullet X2)=T2(T1(X1\bullet X2))=T2(T1(X1)T1(X2))=T2(T1(X1))\bullet T2(T1(X2)) \\ =X1\bullet X2 \end{aligned} \tag{3}$$

Caso 5. $X=X1\supset X2$.

$$\begin{aligned} (T2oT1)(X1\supset X2)=T2(T1(X1\supset X2))=T2([T1(X1)(T1(X2))]) \\ =T2(T1(X1))\supset T2(T1(X2))=X1\supset X2 \end{aligned} \tag{4}$$

Caso 6. $X = X1 \cup X2$.

$$\begin{aligned}(T2oT1)(X1 \cup X2) &= T2(T1(X1 \cup X2)) = T2([(T1(X1))(T1(X2))]) \\ &= T2(T1(X1)) \cup T2(T1(X2)) = X1 \cup X2.\end{aligned} \tag{5}$$

Por el principio de inducción matemática se ha probado que $(T2oT1) = Id_{FK}$.
Partes c y d. Consecuencia directa de las partes a y b. □

Proposición 6.8. *(KT4P y AlfaK son isomorfos) $G, H \in GK$ y $X, Y \in FK$.*
a. $G \in TG$ si y solo si $G^{''} \in TK$. *b. $X^{'} \in TG$ si y solo si $X \in TK$.*
c. $G >> H$ si y solo si $H^{''}$ es consecuencia de $G^{''}$.
d. $X^{'} >> Y^{'}$ si y solo si Y es consecuencia de X.

Prueba. Parte a. Por la proposición 6.6a se tiene que, si $G \in TG$ entonces $G^{''} \in TK$, además, por la proposición 6.2a se tiene que, si $G^{''} \in TK$ entonces $\left(G^{''}\right)^{'} \in TG$, pero por la proposición 6.7a se sabe que, $\left(G^{''}\right)^{'} = G$, resultando que, si $G^{''} \in TK$ entonces $G \in TG$, y como se tiene la recíproca, se concluye que, $G \in TG$ si y solo si $G^{''} \in TK$.
Parte b. Por la proposición 6.2a se tiene que, si $X \in TK$ entonces $X^{'} \in TG$, además, por la proposición 6.6a se tiene que, si $X^{'} \in TG$ entonces $(X^{'})^{''} \in TK$, pero por la proposición 6.7b se sabe que, $\left(X^{'}\right)^{''} = X$, resultando que, si $X^{'} \in TG$ entonces $X \in TK$, y como se tiene la recíproca, se concluye que, $X^{'} \in TG$ si y solo si $X \in TK$.
Parte c. Por la proposición 6.2 y las reglas 17 y 11, $G >> H$ equivale a $[G(H)] \in TG$, lo cual por la parte a, equivale a $G^{''} \supset H^{''} \in TK$, y por TD, Mp y la definición 2.3, equivale a $H^{''}$ es consecuencia de $G^{''}$.
Parte d. Por la proposición 6.2 y las reglas 17 y 11, $X^{'} >> Y^{'}$ equivale a $\left[X^{'}\left(Y^{'}\right)\right] \in TG$, lo cual por la parte b, equivale a $X \supset Y \in TK$, y por TD, Mp y la definición 2.3, equivale a Y es consecuencia de X. □

Hecho 6.1. *(Reglas derivadas en AlfaK). Las reglas* 10*,* 24 *y* 25 *son derivadas.*

Prueba. Por la proposición 6.8, basta observar que, las traducciones de estas reglas son válidas en $KT4P$. □

7. ALFAK EN EL ESTILO ORIGINAL DE CHARLES SANDERS PEIRCE

En esta sección, se presenta el sistema AlfaK_P, de gráficos existenciales paraconsistentes, en el formato original de Peirce (borrado en regiones pares, escritura en regiones impares, iteración, desiteración), con reglas para los rizos y bucles. En la proposición 7.4, se prueba que los teoremas gráficos de AlfaK son teoremas gráficos de AlfaK_P, en la proposición 7.5, se prueba la recíproca, concluyéndose en la proposición 7.6 la equivalencia de éstos.

Proposición 7.1. *(Interiorizando las inferencias en $KT4P$). Para $X,Y,Z,W,V \in FK$.*
Si $X \supset Y \in VK$ entonces:

$a.$ $(X \bullet Z) \supset (Y \bullet Z) \in VK.$
$b.$ $-(Y \bullet Z) \supset -(X \bullet Z) \in VK.$
$c.$ $((Z \bullet Y) \supset W) \supset ((Z \bullet X) \supset W) \in VK.$
$d.$ $-(W \bullet -(X \bullet Z)) \supset -(W \bullet -(Y \bullet Z)) \in VK.$
$e.$ $-((X \bullet Z) \supset W) \supset -((Y \bullet Z) \supset W) \in VK.$
$f.$ $((Z \bullet (X \supset W)) \supset V) \supset ((Z \bullet (Y \supset W)) \supset V) \in VK.$
$g.$ $(W \supset (X \bullet Z)) \supset (W \supset (Y \bullet Z)) \in VK.$
$h.$ $((W \bullet -(X \bullet Z)) \supset V) \supset ((W \bullet -(Y \bullet Z)) \supset V) \in VK.$

Prueba. Supóngase que $X \supset Y \in VK$, por las proposiciones 2.1 y 4.8 se infiere que $+(X \supset Y) \in VK$, por lo que, se tiene el resultado inicial, para todo modelo, $(S, Ma, <, V)$, y para cada $M \in S$, $M(+(X \supset Y)) = 1$ y $M(X \supset Y) = 1$.
Parte a. Supóngase que $M(X \bullet Z) = 1$, por $V\bullet$ se tiene $M(X) = 1$, $M(Z) = 1$, y como $M(X \supset Y) = 1$, por $V \supset$ se sigue $M(Y) = 1$, utilizando $V\bullet$ se deriva $M(Y \bullet Z) = 1$. Se ha probado, $M(X \bullet Z) = 1$ implica $M(Y \bullet Z) = 1$, lo cual por $V \supset$ significa que $M((X \bullet Z) \supset (Y \bullet Z)) = 1$, para todo $M \in S$. Por lo tanto, $(X \bullet Z) \supset (Y \bullet Z) \in VK$.
Parte b. Supóngase que $M(-(Y \bullet Z)) = 1$, entonces por $V-$, existe $P \in S, M < P$ y $P(Y \bullet Z) = 0$. Supuesto 2, $M(-(X \bullet Z)) = 0$, por $V-$ se sigue que, para cada $N \in S$, $M < N$ implica $N(X \bullet Z) = 1$, y como $M < P$ entonces $P(X \bullet Z) = 1$, por $V\bullet$ se tiene $P(X) = 1$ y $P(Z) = 1$, como $P(Y \bullet Z) = 0$, por $V\bullet$ se deriva $P(Y) = 0$, pero como $P(X) = 1$, y por el resultado inicial, $P(X \supset Y) = 1$, entonces por $V \supset$, se obtiene $P(Y) = 1$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $M(-(X \bullet Z)) = 1$. Se ha probado que, $M(-(Y \bullet Z)) = 1$ implica $M(-(X \bullet Z)) = 1$, lo cual por $V \supset$ significa que $M(-(Y \bullet Z) \supset -(X \bullet Z)) = 1$, para todo $M \in S$. Por lo tanto, $-(Y \bullet Z) \supset -(X \bullet Z) \in VK$.
Parte c. Supóngase que $M((Z \bullet Y) \supset W) = 1$. Supuesto 2, $M((Z \bullet X) \supset W) = 0$, por $V \supset$ se obtiene $M(Z \bullet X) = 1$ y $M(W) = 0$, por $V\bullet$ se sigue $M(Z) = 1$ y $M(X) = 1$, como $M((Z \bullet Y) \supset W) = 1$ y $M(W) = 0$, por $V \supset$ resulta $M(Z \bullet Y) = 0$, y como $M(Z) = 1$, por $V\bullet$ se obtiene $M(Y) = 0$, pero se tiene $M(X) = 1$, y por el resultado inicial, $M(X \supset Y) = 1$, entonces por $V \supset$, se obtiene $M(Y) = 1$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $M(Z \bullet X \supset W) = 1$. Se ha probado que, $M(Z \bullet Y \supset W) = 1$ implica $M(Z \bullet X \supset W) = 1$, lo cual por $V \supset$ significa que $M((Z \bullet Y \supset W) \supset (Z \bullet X \supset W)) = 1$, para todo $M \in S$. Por lo tanto, $(Z \bullet Y \supset W) \supset (Z \bullet X \supset W) \in VK$.
Parte d. Supóngase que $M(-(W \bullet -(X \bullet Z))) = 1$, entonces por $V-$, existe $P \in S, M < P$ y $P(W \bullet -(X \bullet Z)) = 0$. Supuesto 2, $M(-(W \bullet -(Y \bullet Z))) = 0$, por $V-$ se sigue que, para cada $N \in S$, $M < N$ implica $N(W \bullet -(Y \bullet Z)) = 1$, y como $M < P$ entonces $P(W \bullet -(Y \bullet Z)) = 1$, por $V\bullet$ se tiene $P(W) = 1$ y $P(-(Y \bullet Z)) = 1$, por $V-$ se sigue que, existe $Q \in S$, $P < Q$ y $Q(Y \bullet Z) = 0$, como $P(W) = 1$ y $P(W \bullet -(X \bullet Z)) = 0$, por $V\bullet$ se deriva $P(-(X \bullet Z)) = 0$, lo cual por $V-$ se deriva que, para cada $N \in S$, $P < N$ implica que $N(X \bullet Z) = 1$, como $P < Q$, en particular, $Q(X \bullet Z) = 1$, por $V\bullet$ se sigue $Q(X) = 1$ y $Q(Z) = 1$, por el resultado inicial, se tiene $Q(X \supset Y) = 1$, por $V \supset$ se sigue $Q(Y) = 1$, y como $Q(Z) = 1$, por $V\bullet$ se deriva $Q(Y \bullet Z) = 1$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $M(-(W \bullet -(Y \bullet Z))) = 1$. Se ha probado que, $M(-(W \bullet -(X \bullet Z))) = 1$ implica $M(-(W \bullet -(Y \bullet Z))) = 1$, lo cual por $V \supset$ significa que $M(-(W \bullet -(X \bullet Z)) \supset -(W \bullet -(Y \bullet Z))) = 1$, para todo $M \in S$. Por lo tanto, $-(W \bullet -(X \bullet Z)) \supset -(W \bullet -(Y \bullet Z)) \in VK$.
Parte e. Supóngase que $M(-((X \bullet Z) \supset W)) = 1$, entonces por $V-$, existe $P \in S, M < P$ y $P((X \bullet Z) \supset W) =$

0, lo cual por $V\supset$ significa $P(X\bullet Z)=1$ y $P(W)=0$, por $V\bullet$ se sigue $P(X)=1$ y $P(Z)=1$. Supuesto 2, $M(-((Y\bullet Z)\supset W))=0$, por $V-$ se sigue que, para cada $N\in S$, $M<N$ implica $N((Y\bullet Z)\supset W)=1$, y como $M<P$ entonces $P((Y\bullet Z)\supset W)=1$, por el resultado inicial, se tiene que $P(X\supset Y)=1$, y como $P(X)=1$, por $V\supset$ se infiere $P(Y)=1$, al tener $P(Z)=1$, por $V\bullet$ se tiene $P(Y\bullet Z)=1$, este resultado junto con el hecho $P((Y\bullet Z)\supset W)=1$, genera $P(W)=1$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $M(-((Y\bullet Z)\supset W))=1$. Se ha probado que, $M(-((X\bullet Z)\supset W))=1$ implica $M(-((Y\bullet Z)\supset W))=1$, lo cual por $V\supset$ significa que $M(-((X\bullet Z)\supset W)\supset-((Y\bullet Z)\supset W))=1$, para todo $M\in S$. Por lo tanto, $-((X\bullet Z)\supset W)\supset-((Y\bullet Z)\supset W)\in VK$.

Parte f. Supóngase que $M((Z\bullet(X\supset W))\supset V)=1$. Supuesto 2, $M((Z\bullet(Y\supset W))\supset V)=0$, por $V\supset$ se obtiene $M(Z\bullet(Y\supset W))=1$ y $M(V)=0$, por $V\bullet$ se sigue $M(Z)=1$ y $M(Y\supset W)=1$. Al tener $M((Z\bullet(X\supset W))\supset V)=1$ y $M(V)=0$, por $V\supset$ se deriva $M(Z\bullet(X\supset W))=0$, como se tiene $M(Z)=1$, por $V\bullet$ se deduce $M(X\supset W)=0$, por $V\supset$ significa $M(X)=1$, $M(W)=0$, por el resultado inicial, se sabe que $M(X\supset Y)=1$, y como $M(X)=1$, por $V\supset$ se deriva $M(Y)=1$, lo cual junto con $M(Y\supset W)=1$, por $V\supset$ se obtiene $M(W)=1$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $M((Z\bullet(Y\supset W))\supset V)=1$. Se ha probado que, $M((Z\bullet(X\supset W))\supset V)=1$ implica $M((Z\bullet(Y\supset W))\supset V)=1$, lo cual por $V\supset$ significa que $M(((Z\bullet(X\supset W))\supset V)\supset((Z\bullet(Y\supset W))\supset V))=1$, para todo $M\in S$. Por lo tanto, $((Z\bullet(X\supset W))\supset V)\supset((Z\bullet(Y\supset W))\supset V)\in VK$.

Parte g. Supóngase que $M(W\supset(X\bullet Z))=1$. Supuesto 2, $M(W)=1$, por $V\supset$ se tiene $M(X\bullet Z)=1$, por $V\bullet$ se sigue $M(X)=1$ y $M(Z)=1$, por el resultado inicial, se tiene que $M(X\supset Y)=1$, y como $M(X)=1$, por $V\supset$ resulta $M(Y)=1$, y por $V\bullet$ se obtiene $M(Y\bullet Z)=1$, resultando que, $M(W)=1$ implica $M(Y\bullet Z)=1$, lo cual por $V\supset$, significa $M(W\supset(Y\bullet Z))=1$. Se ha probado que, $M(W\supset(X\bullet Z))=1$ implica $M(W\supset(Y\bullet Z))=1$, lo cual por $V\supset-$ significa que $M((W\supset(X\bullet Z))\supset(W\supset(Y\bullet Z)))=1$, para todo $M\in S$. Por lo tanto, $(W\supset(X\bullet Z))\supset(W\supset(Y\bullet Z))\in VK$.

Parte h. Supóngase que $M((W\bullet-(X\bullet Z))\supset V)=1$. Supuesto 2, $M((W\bullet-(Y\bullet Z))\supset V)=0$, por $V\supset$ se infiere $M(W\bullet-(Y\bullet Z))=1$ y $M(V)=0$, por $V\bullet$ se sigue $M(W)=1$ y $M(-(Y\bullet Z))=1$, aplicando $V-$, existe $P\in S$, $M<P$ y $P(Y\bullet Z)=0$, como $M((W\bullet-(X\bullet Z))\supset V)=1$ y $M(V)=0$, por $V\supset$ se deriva $M(W\bullet-(X\bullet Z))=0$, y como $M(W)=1$, por $V\bullet$ se deduce $M(-(X\bullet Z))=0$, por $V-$, para cada $N\in S$, $M<N$ implica $N(X\bullet Z)=1$, y como $M<P$, entonces, en particular $P(X\bullet Z)=1$, por $V\bullet$ significa $P(X)=1$ y $P(Z)=1$, por el resultado inicial, se sabe que $P(X\supset Y)=1$, y como $P(X)=1$, por $V\supset$ resulta $P(Y)=1$, y como $P(Z)=1$, por $V\bullet$ se sigue $P(Y\bullet Z)=1$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $M((W\bullet-(Y\bullet Z))\supset V)=1$.

Se ha probado que, $M((W\bullet-(X\bullet Z))\supset V)=1$ implica $M((W\bullet-(Y\bullet Z))\supset V)=1$, lo cual por $V\supset$ significa que $M(((W\bullet-(X\bullet Z))\supset V)\supset((W\bullet-(Y\bullet Z))\supset V))=1$, para todo $M\in S$. Por lo tanto, h. $((W\bullet-(X\bullet Z))\supset V)\supset((W\bullet-(Y\bullet Z))\supset V)\in VK$. □

Proposición 7.2. *(Interiorizando las inferencias en AlfaK). Para $X,Y,Z,W,V\in GK$.*
Si $X>>Y$ entonces:

$a.\ XZ >> YZ.$	$b.\ \{YZ\} >> \{XZ\}.$
$c.\ [ZY(W)] >> [ZX(W)].$	$d.\ \{W\{XZ\}\} >> \{W\{YZ\}\}.$
$e.\ \{[XZ(W)]\} >> \{[YZ(W)]\}.$	$f.\ [Z[X(W)](V)] >> [Z[Y(W)](V)].$
$g.\ [W(XZ)] >> [W(YZ)].$	$h.\ [W\{XZ\}(V)] >> [W\{YZ\}(V)].$

Prueba. Si $X >> Y$, por la proposición 5.1b (TDG), se infiere que $[X(Y)] \in TG$. Considerando este hecho, las partes $a, b, \ldots, h$ de esta proposición (proposición 7.2), son consecuencia directa de las proposiciones 6.8 y 7.1. □

Proposición 7.3. *(Inferencias gráficas en regiones pares e impares). Para $X, Y, Z, W, V \in GK$.*
Si $X >> Y$ entonces
$a.$ $X >> Y$ en cualquier región par. *$b.$ $Y >> X$ en cualquier región impar.*

Prueba. Inducción en el número, n, de cortes que rodean a X.
Paso base. $n = 0$. $XZ >> YZ$ se satisface por la proposición 7.2 parte a.
$n = 1$. Hay dos posibilidades, $\{XZ\}$ y $[ZX(W)]$. Por la proposición 7.2 partes b y c, se tiene que $\{YZ\} >> \{XZ\}$ y $[ZY(W)] >> [ZX(W)]$, por lo que, la proposición se satisface cuando $n = 1$.
$n = 2$. Hay cinco posibilidades, $\{W\{XZ\}\}$, $\{[XZ(W)]\}$, $[Z[X(W)](V)]$, $[W(XZ)]$ y $[W\{XZ\}(V)]$. Por la proposición 7.2 partes d, f,…, h, se tiene que, $\{W\{XZ\}\} >> \{W\{YZ\}\}$, $\{[XZ(W)]\} >> \{[YZ(W)]\}$, $[Z[X(W)](V)] >> [Z[Y(W)](V)]$, $[W(XZ)] >> [W(YZ)]$ y $[W\{XZ\}(V)] >> [W\{YZ\}(V)]$, por lo que, la proposición se satisface cuando $n = 2$.
Paso inductivo. Parte a. Como hipótesis inductiva se tiene que, si X está rodeada por $2n$ cortes, entonces $X >> Y$. Por la proposición 7.2 partes $d, f, \ldots, h$, se tiene que, $\{W\{XZ\}\} >> \{W\{YZ\}\}$, $\{[XZ(W)]\} >> \{[YZ(W)]\}$, $[Z[X(W)](V)] >> [Z[Y(W)](V)]$, $[W(XZ)] >> [W(YZ)]$ y $[W\{XZ\}(V)] >> [W\{YZ\}(V)]$, en la región rodeada por $2n$ cortes, y estos son los únicos casos por los cuales a X, se le pueden agregar otros dos cortes. Por lo tanto, si X está rodeada por $2n+2$ cortes, es decir, por $2(n+1)$ cortes, entonces $X >> Y$.
Parte b. Como hipótesis inductiva se tiene que, si X está rodeada por $2n+1$ cortes, entonces $Y >> X$. Por la proposición 7.2 partes $d, f, \ldots, h$, se tiene que, $\{W\{YZ\}\} >> \{W\{XZ\}\}$, $\{[YZ(W)]\} >> \{[XZ(W)]\}$, $[Z[Y(W)](V)] >> [Z[X(W)](V)]$, $[W(YZ)] >> [W(XZ)]$ y $[W\{YZ\}(V)] >> [W\{XZ\}(V)]$, en la región rodeada por $2n+1$ cortes, y estos son los únicos casos por los cuales a X, se le pueden agregar otros dos cortes. Por lo tanto, si X está rodeada por $2n+1+2$ cortes, es decir, por $2(n+1)+1$ cortes, entonces $Y >> X$.
Por el principio de inducción matemática, se ha probado la proposición. □

Definición 7.1. *(Sistema graficador AlfaK_P al estilo Peirciano) El sistema graficador AlfaK_P, es el sistema AlfaK al estilo Peirciano. En este sistema, se presentan las reglas de inferencia, haciendo referencia la paridad de las regiones en las cuales se aplican (subíndice* 1 *indica que la región es impar, subíndice* 2 *indica que la región es par). En este formato fueron presentados originalmente, los sistemas de gráficos existenciales, por su creador Charles Sanders Peirce, ver Roberts (1992).*

El sistema deductivo AlfaK_P consta del *axioma*. $Ax\lambda.\lambda$. La hoja de aserción donde se dibujan los gráficos existenciales.
El sistema graficador AlfaK_P consta de las siguientes *reglas primitivas de transformación de gráficos (y algunas derivadas)*.

1. Escritura y borrado de gráficos
   Borrado de gráficos. Un gráfico puede ser *borrado* cuando se encuentra en región par.

   $$1p.\text{ En región par, } (XY)_2 \,|\Rightarrow X_2$$

   Escritura de gráficos. En una región *impar* puede ser escrito cualquier gráfico.

   $$2p.\text{ En región impar, } X_1 \,|\Rightarrow (XY)_1$$

2. Escritura y borrado de enlaces
   Escritura de segundo enlace en un rizo. En un rizo, el segundo *enlace* puede ser *escrito* (ensamblando un bucle), cuando el antecedente es un corte y la región externa es *impar*.

   $$3p.\ [(Y)\{X\}_1]\,|\Rightarrow [(Y)(X)\__1]\text{, cuando } \{X\} \text{ está en región impar.}$$

   Borrado de segundo enlace de un bucle. En un bucle, el *segundo enlace* que se encuentre región *par* puede ser *borrado* (ensamblando un rizo).

   $$4p.\text{ Regla derivada. } [(Y)(X)\__2]\,|\Rightarrow [(Y)\{X\}_2]\text{, cuando el enlace está en región par.}$$

   Borrado y escritura de segundo enlace de bucle. En un bucle, el *segundo enlace* puede ser *borrado* (generando un rizo), cuando el disyunto es fuerte. Y recíprocamente, en un rizo, si el antecedente es un corte fuerte, entonces, el *segundo enlace* puede ser *escrito* (ensamblando un bucle).

   $$5p.\ [(Y)(*X)\_] \Leftrightarrow [(Y)\{*X\}]\text{, en cualquier región.}$$

   Borrado y escritura de enlace de rizo. Si en un rizo, el enlace se encuentra en región *impar*, entonces puede ser *borrado*, cuando el consecuente es fuerte.

   $$6p.\text{ Regla derivada. } [Y(*X)\_1]\,|\Rightarrow \{Y\{*X\}_1\}\text{, cuando el enlace está en región impar.}$$

   Escritura de enlace en doble corte encajado. Si en un doble corte encajado, la región externa es *par* y la región interna es fuerte, entonces, el enlace puede ser *escrito* (generando un rizo).

$7p$. Regla derivada. $\{Y\{*X\}_2\} | \Rightarrow [Y(*X)\_{}_2]$, cuando $\{*X\}$ está en región par.

Borrado de enlace de rizo en región externa de un rizo. En cualquier región que incluya un rizo, cuyo antecedente es otro rizo, ocurre que, si el enlace del rizo encajado es *par*, entonces puede ser *borrado*.

$8p$. $[X[Z(Y)\_{}_2](Z)] | \Rightarrow [X\{Z\{Y\}_2\}(Z)]$, cuando el enlace está en región par.

Borrado y escritura de enlace de rizo con antecedente fuerte. En cualquier región que incluya un rizo, cuyo antecedente es fuerte, puede *escribirse* el segundo enlace, ensamblando un bucle (el nuevo disyunto, es el corte del gráfico que estaba fuertemente afirmado). Y recíprocamente, si en un bucle, un disyunto es un corte, entonces este enlace puede ser *borrado*, generando un rizo (el antecedente es la afirmación fuerte del gráfico que estaba en la región del corte).

$9p$. $[*X(Y)] \Leftrightarrow [\_(\{X\})(Y)]$, en cualquier región.

Escritura de segundo enlace en un rizo. En cualquier región que incluya un rizo, con región de enlace impar, puede *escribirse* el segundo enlace, ensamblando un bucle (el nuevo disyunto es el corte del antecedente).

$10p$. $[X_1(Y)] | \Rightarrow [\_{}_1(\{X\})(Y)]$, cuando el enlace está en región impar.

3. Escritura y borrado de rizos
   Borrado y escritura de rizos. En cualquier región, par o impar, puede ser escrito o borrado un rizo.

$11p$. $X \Leftrightarrow [(X)]$, en cualquier región.

4. Escritura y borrado de doble corte
   Borrado del doble corte en región par. En cualquier región *par*, al gráfico $\{\{\{X\}\}\}$, se le puede *borrar* el doble corte.

$12p$. Regla derivada. En región par, $\{\{\{X\}_2\}\} | \Rightarrow \{X\}_2$

Escritura del doble corte en región impar. En cualquier región *impar*, al gráfico $\{X\}$, se le puede *escribir* (rodear con) un doble corte.

$13p$. Regla derivada. En región impar, $\{X\}_1 | \Rightarrow \{\{X\{\}_1\}\}$

Escritura del doble corte de gráfico fuerte que esté en región par. En un *gráfico fuerte* que se encuentre en región *par*, puede ser *escrito* un *doble corte*.

$$14p. \text{ Regla derivada. En región par, } *X2| \Rightarrow \{\{*X_2\}\}$$

Borrado y escritura de doble corte en cuádruple corte. En cualquier región, en un *cuádruple corte* puede ser *borrado* un doble corte, además, en un *doble corte* puede ser *escrito* otro doble corte.

$$15p. \text{ Regla derivada. } \{\{\{\{X\}\}\}\} \Leftrightarrow \{\{X\}\}, \text{ en cualquier región.}$$

5. Escritura y borrado de afirmación fuerte
   Borrado de la afirmación fuerte. La afirmación fuerte puede ser borrada en cualquier región par.

$$16p. \text{ En región par, } *X_2| \Rightarrow X_2$$

Escritura de la afirmación fuerte. La afirmación fuerte puede ser escrita en región impar.

$$17p. \text{ Regla derivada. En región impar, } X_1| \Rightarrow *X_1$$

Borrado y escritura de la afirmación fuerte duplicada. En cualquier región, a una *afirmación fuerte* se le puede *escribir* otra *afirmación fuerte*. En una afirmación *fuerte duplicada*, se puede *borrar* una de ellas.

$$18p. \text{ Regla derivada. } *X \Leftrightarrow **X, \text{ en cualquier región.}$$

Borrado y escritura de la afirmación fuerte en región de corte. En cualquier región de corte, una *afirmación fuerte* se puede *borrar*. En una región de corte, se puede *escribir* una *afirmación fuerte*.

$$19\text{p. } \{*X\} \Leftrightarrow \{X\} \text{ , en cualquier región.}$$

6. Iteración y desiteración de gráficos
   Iteración y desiteración de gráficos en región de solo curvas. Un *gráfico* se puede *iterar* o *desiterar* en cualquier región, par o impar, si la región solo se encuentra rodeada por cero o más curvas (no se encuentra rodeada por algún corte).

$$20p. \; X \text{ en región de curvas } Ru, \; Y\,(X)^{Ru} \Leftrightarrow Y\,(XY)^{Ru}$$

Iteración y desiteración de gráficos fuertes en región de corte.
Un *gráfico fuerte* se puede *iterar* o *desiterar* en cualquier región, par o impar, *aún* si la región se encuentra rodeada por algún corte.

$$21p. \; *Y\,(X)^{Rn} \Leftrightarrow *Y\,(*YX)^{Rn}, \text{ en cualquier región } Rn.$$

Iteración y desiteración de gráficos en región de doble corte. Un *gráfico* se puede *iterar* o *desiterar* en cualquier región de doble corte.

$22p$. Regla derivada. $\{Y\{X\}\} \Leftrightarrow \{Y\{YX\}\}$, en cualquier región.

Iteración y desiteración de lazo. En cualquier región, par o impar. Si en un bucle, las regiones de ambos lazos son iguales, se puede desiterar uno de los lazos (generando un rizo con región externa vacía). Y recíprocamente, en un rizo con región externa vacía, se puede iterar el lazo (ensamblándose un bucle con ambos lazos iguales).

$23p$. $[(X)(X)] \Leftrightarrow [(X)]$, en cualquier región.

7. Preservación de las transformaciones
   Preservación directa de las transformaciones. Supóngase que un *gráfico inicial* se transforma en uno *terminal*. Entonces, en una región par, el *gráfico inicial* puede ser reemplazado por el *gráfico terminal*.

   $24p$. $X >> Y$ implica que, para X en región par, $X_2 >> Y$

   Preservación inversa de las transformaciones. Supóngase que un *gráfico inicial* se transforma en uno*terminal*. Entonces, en una región impar, el *gráfico terminal* puede ser reemplazado por el *gráfico inicial*.

   $25p$. Regla derivada. $X >> Y$ implica que, para Y en región impar, $Y_1 >> X$

8. Afirmación fuerte de teoremas gráficos
   Los teoremas gráficos pueden ser fuertemente afirmados. En cualquier región, los teoremas gráficos, al ser fuertemente afirmados, generan un nuevo teorema.

   $26p$. $Y \in TG$ implica $*Y \in TG$, en cualquier región.

9. Reglas implícitas
   Concatenación. Dos gráficos que se encuentren en una misma región, pueden se concatenados. E inversamente, dos gráficos que se encuentren concatenados, pueden ser separados en la misma región.

   $27p$. $X, Y \Leftrightarrow YX$, en cualquier región.

   Conmutatividad. Dos gráficos concatenados pueden ser reescritos cambiando el orden.

   $28p$. $XY \Leftrightarrow YX$, en cualquier región.

Asociatividad. En tres gráficos que se encuentren concatenados, es *irrelevante* el orden en que fueron concatenados. Inicialmente el primero se concatena con el segundo y este resultado se concatena con el tercero, o el primero se concatena con el resultado de concatenar el segundo con el tercero.

$$29p.\ XY,Z \Leftrightarrow X,YZ \Leftrightarrow XYZ, \text{ en cualquier región.}$$

Observación 7.1. *Respecto a la regla* $20p$*, en AlfaK,* $\{[X(Y)]\}$ *no implica* $\{[+X(Y)]\}$*, el corte debe ser más interno. Respecto a la regla* $22p$*, en AlfaK,* $Y\{YX\}$ *no implica* $Y\{X\}$*. Respecto a la regla* $25p$*, como caso particular se tiene:* $X >> Y$ *implica* $*X \Rightarrow *Y$.

Proposición 7.4. *(AlfaK_P valida a AlfaK). Para* $X, Y \in GK$

a. *Los teoremas de AlfaK son teoremas de AlfaK_P.*

b. $X >> Y$ *en AlfaK implica* $X >> Y$ *en AlfaK_P.*

Prueba. Parte a. Supóngase las reglas primitivas, del sistema AlfaK, presentadas en la definición 5.4. A partir de ellas se prueban las reglas primitivas de AlfaK_P, presentadas en la definición 7.1. En la prueba de todas las reglas, para hacer la generalización a regiones pares e impares, se utiliza la proposición 7.3.
Regla $1p$ se sigue de la regla 1. Regla $2p$ se sigue de la regla $1p$ y la proposición 7.1. Regla $3p$ se sigue de la regla 8. Regla $5p$ se sigue de la regla 7. Regla $8p$ se sigue de la regla 6. Regla $9p$ se sigue de la regla 10 (cuya validez está garantizada por Hecho 6.1).
Regla $10p$. Supóngase que, $M\left(X'' \supset Y''\right) = 1$. Supuesto 2, $M\left(Y'' \cup -X''\right) = 0$, por $V\cup$ se sigue que $M\left(Y''\right) = 0$ y $M\left(-X''\right) = 0$, por $V-$ se tiene que, para cada $N \in S$, $M < N$ implica $N\left(X''\right) = 1$, como $M < M$, entonces, $M\left(X''\right) = 1$, y como $M\left(X' \supset Y''\right) = 1$, por $V \supset$ resulta $M\left(Y''\right) = 1$, lo cual no es el caso, por lo que, $M\left(Y'' \cup -X''\right) = 1$. Por lo tanto, $((X \supset Y) \supset (Y \cup -X))'' \in VK$, es decir, $[X1(Y)] >> [\_1(\{X\})(Y)]$. La regla $10p$ se sigue de este resultado.
Regla $11p$. Se sigue de la regla 11.
Regla $16p$. Por el Hecho $2.4d$ se tiene $+X' \supset X' \in TK$, lo cual por la proposición 4.8, implica que $+X' \supset X' \in VK$, es decir, $+X'$ valida a X', por la proposición $6.8c$, resulta $*X >> X$. La regla $16p$ se sigue de este resultado.
Regla $19p$. Se sigue de la regla 15 y la proposición 7.2.
Regla $20p$. Se sigue de las reglas 17 a 20 y la proposición 7.2.
Regla $21p$. Se sigue de las reglas $20p$, 22 y 23 y la proposición 7.2.
Regla $23p$. Se sigue de la regla 21 y la proposición 7.2. Regla $24p$. Se sigue de la proposición $7.3a$.
Regla $26p$. Se sigue de la regla 26 y la proposición 7.2.
Regla $27p$. Se sigue de la regla 27 y la proposición 7.2. Regla $28p$. Se sigue de la regla 28 y la proposición 7.2. Regla $29p$. Se sigue de la regla 29 y la proposición 7.2.
Parte b. $X >> Y$ en AlfaK, por TDG significa que $[X(Y)]$ es teorema de AlfaK, por la parte a, se sigue que $[X(Y)]$ es teorema de AlfaK_P. Si se supone X, por la regla $21p$ se obtiene $[(Y)]$, aplicando la regla $11p$ se deriva Y, por lo tanto, $X >> Y$ en AlfaK_P. $\square$

Proposición 7.5. *(AlfaK valida a AlfaK_P) Los teoremas de AlfaK_P son teoremas de AlfaK.*

Prueba. Supóngase las reglas primitivas, del sistema AlfaK_P, presentadas en la definición 7.1. A partir de ellas se prueban las reglas primitivas de AlfaK, presentadas en la definición 5.4.
Reglas 1, 2 y 3. Casos particulares de la regla $1p$.
Reglas 4 y 5. Casos particulares de la regla $2p$.
Regla 6. Caso particular de la regla $8p$.
Regla 7. Caso particular de la regla $5p$.
Regla 8. Caso particular de la regla $3p$.
Regla 9. Caso particular de la regla $10p$.
Reglas 11, 12, 13 y 14. Casos particulares de la regla $11p$.
Regla 15. Caso particular de la regla $19p$.
Regla 16. Caso particular de la regla $16p$.
Reglas 17, 18, 18.1, 19 y 20. Casos particulares de la regla $20p$.
Regla 21. Caso particular de la regla $23p$.
Reglas 22 y 23. Casos particulares de la regla $21p$.
Regla 26. Caso particular de la regla $26p$.
Regla 27. Caso particular de la regla $27p$.
Regla 28. Caso particular de la regla $28p$.
Regla 29. Caso particular de la regla $29p$. □

Proposición 7.6. *(AlfaK equivalente a AlfaK_P). Para $X,Y \in GK$.*

a. X es teorema de AlfaK_P si y solo si X es teorema de AlfaK.

b. $X >> Y$ en AlfaK si y solo si $X >> Y$ en AlfaK_P.

Prueba. Consecuencia directa de las proposiciones 7.4 y 7.5. □

Hecho 7.1. *(Reglas derivadas en AlfaK_P).*
Las reglas $4p$, $6p$, $7p$, $12p$, $13p$, $14p$, $15p$, $17p$, $18p$, $22p$ y $25p$ de AlfaK_P son derivadas en AlfaK y en AlfaK_P.

Prueba. Por las proposiciones 6.8 y 7.6, basta observar que, las traducciones de estas reglas son válidas en AlfaK. □

8. CONCLUSIONES

En esta sección, se presentan algunas conexiones de AlfaK_P con los gráficos existenciales gama de Peirce y con el sistema Gamma-LD, (Sierra, 2021), también se define un operador de incompatibilidad, como versión

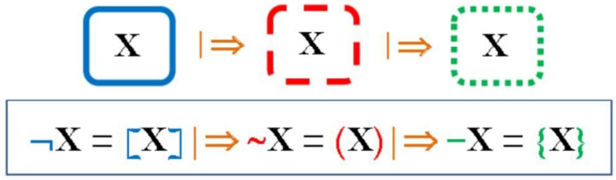

Figura 3: Negaciones paracompleta, clásica y paraconsistente. Fuente: Elaboración propia.

del operador de buen comportamiento en las lógicas paraconsistentes, finalmente, se utiliza AlfaK para dar solu-ción a una versión de la paradoja del mentiroso.

8.1. Conclusión 1

(Respecto al corte paraconsistente). Para $X \in FK$, el corte paraconsistente $\left\{X'\right\}$, es decir $-X$, el cual por el Hecho 2.4k, significa que $\otimes \sim X$, y esto semánticamente afirma que es posible la negación clásica de X, lo cual coincide con la interpretación del *corte quebrado* en los gráficos gama de Peirce en Zeman (1963). Además, por el Hecho 2.4c se tiene $\sim -(\sim X) \equiv +(\sim X)$, pero en el sistema Gamma-LD presentado en Sierra (2021), se tiene que $+\sim X$ es la negación intuicionista generalizada, es decir, $+\sim X \equiv \neg X$, resultando que, $\sim - \sim X \equiv \neg X$, o de manera gráfica, $(\left\{\left(X'\right)\right\}) \Leftrightarrow \left[X'\right]$. De la negación intuicionista también se tiene $+\sim(\sim X) \equiv \neg(\sim X)$, y entonces por DN, $+X \equiv \neg \sim X$, utilizando $Tras$, resulta $\sim +X \equiv \sim \neg \sim X$, por el Hecho 2.4$c$ se sigue, $-X \equiv \sim \neg \sim X$, o de manera gráfica, $\left(\left[\left(X'\right)\right]\right) \Leftrightarrow \left\{X'\right\}$, lo cual significa que, en gamma-LD, y por lo tanto en el sistema gama de Peirce, se encuentran las tres negaciones: clásica, paraconsistente y paracompleta (negación intuicionista generalizada), más aún, se tiene que $\left[X'\right] >> \left(X'\right) >> \left\{X'\right\}$, lo cual, con los gráficos tradicionales, puede ser representado como se muestra en la Figura 3.
Para pasar de un corte al otro, simplemente se definen reglas de borrado de cortes:

$$\textit{Borrado inicial o suave}: \left[X'\right] >> \left(X'\right).\ \textit{Borrado secundario o fuerte}: \left(X'\right) >> \left\{X'\right\}.$$

En Sierra (2021), cuando se restringe el lenguaje de *LD* al lenguaje de *LI*, entonces la restricción asociada a los gráficos Gamma-*LD*, llamada Alfa-*LI*, coincide con los gráficos existenciales intuicionistas presentados en Oostra (2010).
De manera similar, cuando se restringe el lenguaje de *LD* al lenguaje de $KT4P$, entonces la restricción asociada a los gráficos Gamma-*LD*, debe coincidir con los gráficos existenciales paraconsistentes AlfaK.

Definición 8.1. *(Fórmulas fuertemente inconsistentes) Sea $X \in FK$. X es fuertemente inconsistente, significa que se tiene $X \supset -\lambda$, es decir, que se tiene $\sim X$. En caso contrario, X es fuertemente consistente.*

8.2. Conclusión 2

(Respecto a la afirmación fuerte). Para $X \in FK$, por el Hecho 2.4c, se tiene $+X \equiv (-X \supset -\lambda) \equiv\sim -X$, lo cual en AlfaK se representa como $\left[\left\{X'\right\}(\{\_\})\right]$, y significa que $\left\{X'\right\}$, es decir, $-X$ es fuertemente inconsistente. Si se supone $+X$, se sigue $-X \supset -\lambda$, por el Hecho 2.4o, se tiene $-\lambda \supset Z$, resultando por *SH* que $-X \supset Z$, es decir, $\left\{X'\right\} >> Z'$. En resumen, cuando se tiene $+X$, entonces, si se deriva $-X$, el sistema colapsa (se pueden inferir todas las fórmulas), es decir, $-X$ se comporta como si fuera la negación clásica en presencia de contradicciones.

En las lógicas paraconsistentes, por ejemplo, en las primeras lógicas paraconsistentes presentadas por Newton da Costa en da Costa (1993), se utilizan el llamado operador de *buen comportamiento*, con cual simplemente se permite que la negación paraconsistente de una fórmula dada se comporte como la negación clásica, es decir, la negación paraconsistente de la fórmula dada sea fuertemente inconsistente. En el caso de AlfaK, el análogo al buen comportamiento se define a continuación, en términos de la afirmación fuerte.

Definición 8.2. *(Operador incompatibilidad con la negación) Sea $X \in FK$.*
X es incompatible con su negación, denotado X^I o IX, significa que, $X \supset +X$, es decir, $X^I \equiv (X \supset +X)$.
En AlfaK, X'^I se representa como $\left[X'\left(*X'\right)\right]$, es decir, $\left[X'\left(\left[\left\{X'\right\}(\{\_\})\right]\right)\right]$.

Proposición 8.1. *(Caracterización semántica del operador de incompatibilidad con la negación). Sean $X \in FK, (S, Ma, <, V)$ un modelo de $KT4P$ y $M \in S$.*

a. *VI. $M\left(X^I\right) = 0$ equivale a $M(X) = 1$ y $(\exists P \in S)(M < P\, y\, P(X) = 0)$.*

b. *VI. $M(X^I) = 1$ equivale a, si $M(X) = 1$ entonces $(\forall N \in S)(M < N\, implica\, N(X) = 1)$.*

c. *VI. $M(X^I) = 1$ equivale a, si $(\exists P \in S)$ $(M < P\, y\, P(X) = 0)$ entonces $M(X) = 0$.*

Prueba. Parte a. $M(X^I) = 0$, por definición equivale a $M(X \supset +X) = 0$, por $V \supset$ resulta equivalente a, $M(X) = 1$ y $M(+X) = 0$, por $V+$ equivale a $M(X) = 1$ y $(\exists P \in S)(M < P \text{ y } P(X) = 0)$.
Las partes b y c son consecuencias directas de la parte a. □

Proposición 8.2. *(Iteración y desiteración de gráficos incompatibles con la negación). Sean $X, Y \in FK$.*
Si un gráfico es incompatible con su negación, se puede iterar o desiterar en cualquier región, par o impar.

$$30p. \textit{ Si } Y^I \textit{ entonces } Y\,(X)^{Rn} \Leftrightarrow Y\,(YX)^{Rn}, \textit{ en cualquier región } Rn.$$

Prueba. Considerando la regla 20p, las proposiciones 7.2 a 7.4, y que solo interesa la iteración en región par y la desiteración en impar (ya que iteración en impar y la desiteración en par, son realmente las reglas de escritura 2p y borrado 1p), entonces para probar 30p, es suficiente con garantizar que, las siguientes fórmulas son consecuencias de Y^I:

a. $(Y \bullet --X) \supset (Y \bullet --(X \bullet Y))$.

b. $(Y \bullet (-X \supset Z)) \supset (Y \bullet (-(X \bullet Y) \supset Z))$.

c. $(Y \bullet -(X \supset Z)) \supset (Y \bullet -((X \bullet Y) \supset Z))$.

Parte *a*. Supóngase que $M\left(Y^I\right) = 1$ y $M(Y \bullet --X) = 1$, por $V\bullet$ se tiene $M(Y) = 1$ y $M(--X) = 1$, por $V-$ resulta que existe $P \in S$, $M < P$ y $P(-X) = 0$. Supuesto 2, $M(--(X \bullet Y)) = 0$, por $V-$ y $M < P$, resulta que $P(-(X \bullet Y)) = 1$, y entonces existe $Q \in S$, $P < Q$ y $Q(X \bullet Y) = 0$, y como $M\left(Y^I\right) = M(Y) = 1$, por la proposición 8.1*b* se infiere que, para todo $N \in S$, $M < N$ implica $N(Y) = 1$, y como $M < P$ y $P < Q$, por la restricción RT, se sigue $M < P$, y así $Q(Y) = 1$, pero $Q(X \bullet Y) = 0$, aplicando $V\bullet$ se deriva $Q(X) = 0$, pero $P(-X) = 0$ y $P < Q$, aplicando $V-$ se infiere $Q(X) = 1$, lo cual no es el caso, por lo que, $M(--(X \bullet Y)) = 1$, y como $M(Y) = 1$, por $V\bullet$ se concluye que $M(Y \bullet --(X \bullet Y)) = 1$.
Parte *b*. Supóngase que $M\left(Y^I\right) = M(Y \bullet (-X \supset Z)) = 1$, por $V\bullet$ se tiene $M(Y) = 1$ y $M(-X \supset Z) = 1$. Supuesto 2, $M(-(X \bullet Y) \supset Z) = 0$, según $V \supset$ se obtiene $M(-(X \bullet Y)) = 1$ y $M(Z) = 0$, aplicando $V-$, existe $P \in S$, $M < P$ y $P(X \bullet Y) = 0$, como $M\left(Y^I\right) = M(Y) = 1$ y $M < P$, por la proposición 8.1*b* se infiere que, $P(Y) = 1$, pero $P(X \bullet Y) = 0$, por $V\bullet$ se deriva que $P(X) = 0$, como $M(-X \supset Z) = 1$ y $M(Z) = 0$, por $V \supset$ resulta $M(-X) = 0$, por $V-$ y $M < P$, se deriva $P(X) = 1$, lo cual no es el caso, por lo que, $M(-(X \bullet Y) \supset Z) = 1$, y como $M(Y) = 1$, por $V\bullet$ se concluye que $M(Y \bullet (-(X \bullet Y) \supset Z)) = 1$.
Parte *c*. Supóngase que $M\left(Y^I\right) = M(Y \bullet -(X \supset Z)) = 1$, por $V\bullet$ se tiene $M(Y) = 1$ y $M(-(X \supset Z)) = 1$, aplicando $V-$, existe $P \in S$, $M < P$ y $P(X \supset Z) = 0$, por $V \supset$ se obtienen $P(X) = 1$ y $P(Z) = 0$. Supuesto 2, $M(-((X \bullet Y) \supset Z)) = 0$, por $V-$ y $M < P$ se sigue que, $P((X \bullet Y) \supset Z) = 1$, y como $P(Z) = 0$, por $V \supset$ se infiere que $P(X \bullet Y) = 0$, pero $P(X) = 1$, utilizando $V\bullet$ se sigue $P(Y) = 0$, y como $M\left(Y^I\right) = 1$ y $M < P$, por la proposición 8.1*c* se infiere que, $M(Y) = 0$, lo cual no es el caso, por lo que, $M(-((X \bullet Y) \supset Z)) = 1$, y como $M(Y) = 1$, por $V\bullet$ se concluye que $M(Y \bullet -((X \bullet Y) \supset Z)) = 1$. □

Proposición 8.3. *(Relación entre afirmación fuerte e incompatibilidad con la negación). Sean* $X \in FK$.
$+X| \Rightarrow X^I$.

Prueba. Supóngase que $+X$, por $Ax1$ y Mp se infiere $X \supset +X$, es decir, X^I. La recíproca, se refuta con el modelo $(\{Ma, P\}, Ma, <, V)$, donde $Ma < Ma$, $Ma < P$, $P < P$, $Ma\left(X^I\right) = 1$ y $Ma(+X) = Ma(X) = P(X) = 0$. □

8.3. Conclusión 3

(Respecto a las aplicaciones). Muchas *paradojas lógicas* involucran los conceptos de verdad o falsedad, por ejemplo, la siguiente variante de la paradoja del mentiroso Bochenski (1976) y Smullyan (1997). Considérese la situación en la cual se tiene una oración que se muestra en la Figura 4

1. Cuando se identifican en la *lógica clásica*, ser el caso con verdadero (Z) y no ser el caso con falso $(\sim Z)$, entonces se tiene la paradoja: si Z (la oración es el caso), como se tiene que $Z \equiv \sim Z$ (la oración dice que es falsa), entonces resulta que $\sim Z$ (también es falsa), y si $\sim Z$ (la oración es falsa), como

Figura 4: Variante de la paradoja del mentiroso, Smulllyan (1997).

se tiene que $Z \equiv\sim Z$ (la oración dice que es falsa), entonces resulta que Z (es el caso). Es decir, $(Z \supset\sim Z) \bullet (\sim Z \supset Z)$, por Imp y DN se deriva $(\sim Z \cup \sim Z) \bullet (Z \cup Z)$, resultando $Z \bullet \sim Z$. Como la lógica clásica no soporta las contradicciones, resulta inútil en este caso.

2. Cuando se identifican en la *lógica intuicionista*, ser el caso como verdadero (Z), y no ser el caso con falso $(\neg Z)$, entonces se tiene la paradoja: Si se supone que Z (la oración es el caso), como se tiene que $Z \leftrightarrow \neg Z$ (la oración dice que es falsa), entonces se deriva $\neg Z$ (la oración es falsa), por lo que, $Z \rightarrow \neg Z$. Si se supone que $\neg Z$ (la oración es falsa), y como se sabe que $Z \leftrightarrow \neg Z$ (la oración dice que es falsa), se infiere Z (Z es el caso), por lo que $\neg Z \rightarrow Z$. Se ha probado que, $(Z \rightarrow \neg Z) \wedge (\neg Z \rightarrow Z)$.

De van Dalen (2013), se sabe que la lógica intuicionista está caracterizada por una semántica de mundos posibles (similar a la semántica de $KT4P$), en la cual, se tiene la regla $V\neg : V(M, \neg X) = 1$ si y solo si para todo $N \in S$, $M < N$ implica que $V(N, X) = 0$, la regla $V \rightarrow$: $V(M, X \rightarrow Y) = 1$ si y solo si para todo $N \in S$, $M < N$ implica que $V(N, X \supset Y) = 1$, y además la relación de accesibilidad es reflexiva y transitiva.
Supóngase que $V(M, Z \rightarrow \neg Z) = 1$, $V(M, \neg Z \rightarrow Z) = 1$, pero $V(M, Z) = 0$, aplicando $V \rightarrow$ y reflexividad, resulta que $V(M, \neg Z) = 0$, por $V\neg$, se deriva que existe $P \in S$, $M < P$ y $V(P, Z) = 1$, y como se tiene $V(M, Z \rightarrow \neg Z) = 1$, utilizando $V \rightarrow$ y $M < P$ se obtiene que $V(P, \neg Z) = 1$, lo cual por $V\neg$ y reflexividad significa que $V(P, Z) = 0$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $V(M, Z \rightarrow \neg Z) = V(M, \neg Z \rightarrow Z) = 1$ implica $V(M, Z) = 1$.
Supóngase que $V(M, Z \rightarrow \neg Z) = 1, V(M, \neg Z \rightarrow Z) = 1$, pero $V(M, \neg Z) = 0$, por $V\neg$ se sigue que existe $P \in S, M < P$ y $V(P, Z) = 1$, como $V(M, Z \rightarrow \neg Z) = 1$, por $V \rightarrow$ y $M < P$ se deduce $V(P, \neg Z) = 1$, lo cual por $V\neg$ y reflexividad significa $V(P, Z) = 0$, lo cual no es el caso, por lo tanto, $V(M, Z \rightarrow \neg Z) = V(M, \neg Z \rightarrow Z) = 1$ implica $V(M, \neg Z) = 1$.
Se tiene entonces que, de $(Z \rightarrow \neg Z) \wedge (\neg Z \rightarrow Z)$, se deriva la contradicción $Z \wedge \neg Z$, pero la lógica intuicionista no es paraconsistente (no soporta las contradicciones, ya que tiene como teorema $Z \rightarrow (\neg Z \rightarrow X)$) Heyting (1956). Por lo tanto, la lógica intuicionista, resulta inútil en el caso de esta paradoja. □

Hecho 8.1. *(Las fórmulas fuertemente inconsistentes no tienen modelos) Para $X \in FK$.*
Si existe un modelo $(S, M, <, V)$ de $KT4P$ y $V(M, X) = 1$ entonces X es fuertemente consistente en $KT4P$.

Prueba. Sea X fuertemente inconsistente en $KT4P$, por lo que $X \supset -\lambda \in FK$, por la proposición 4.8$a$ se infiere $X \supset -\lambda \in VK$, es decir, para todo modelo M, $V(M, X \supset -\lambda) = 1$. Si hay un modelo tal que $V(M, X) = 1$, entonces por $V \supset$ se sigue que $V(M, -\lambda) = 1$, lo cual por $V-$ implica que existe $P \in S$, $M < P$ y $V(P, \lambda) = 0$, lo cual contradice $V\lambda$. Por lo tanto, no existe tal modelo. Se ha probado que, si X es fuertemente inconsistente en $KT4P$ entonces no existe un modelo $(S, M, <, V)$ de $KT4P$ tal que

$V(M,X)=1$, es decir, si existe un modelo $(S,M,<,V)$ de $KT4P$, tal que $V(M,X)=1$, entonces X es fuertemente consistente en $KT4P$. $\square$

Proposición 8.4. *(Solución a la variante de la paradoja del mentiroso) En el sistema $KT4P$, representando lo que dice la oración es el caso como Z, la oración Z es verdadera como $+Z$, y la oración Z es falsa, es decir, Z no es verdadera (o Z puede ser refutada) como $-Z$, entonces la situación (se tiene una oración que dice: esta oración es falsa) queda representada por la fórmula $Z \equiv -Z$, la cual en $KT4P$ no es fuertemente inconsistente y se pueden obtener conclusiones válidas.*

Prueba en AlfaK_P: Se tiene $Z \equiv -Z$ en $KT4P$, por lo que, en AlfaK_P se tienen $\left[Z'\left(\left\{Z'\right\}\right)\right]$ y $\left[\left\{Z'\right\}\left(Z'\right)\right]$. Supóngase que $*Z'$, por la regla de borrado $16p$ se obtiene Z', aplicando la regla de desiteración $20p$, en la primera premisa, se infiere $\left[\_\left(\left\{Z'\right\}\right)\right]$, utilizando la regla de borrado de rizo $11p$, se deduce $\left\{Z'\right\}$, por la regla de escritura en región de corte $19p$, se deriva $\left\{*Z'\right\}$, como se tiene $*Z'$, utilizando la regla de desiteración $21p$, se sigue $\{\_\}$, aplicando la proposición $5.1d$, demostración indirecta gráfica, se concluye, $\left\{*Z'\right\}$, por la regla de borrado en región de corte $19p$, se deriva $\left\{Z'\right\}$, aplicando la regla de desiteración $20p$, en la segunda premisa, se infiere $\left[\left(Z'\right)\right]$, utilizando la regla de borrado de rizo $11p$, se deduce Z', finalmente, por la regla de concatenación $27p$, se ha probado $Z'\left\{Z'\right\}$, es decir, $Z \bullet -Z$, por lo que, Z es el caso, pero es falsa y no es verdadera, ya que es refutable.

De acuerdo con el Hecho 8.1, para garantizar que no hay paradoja, es decir que $Z \equiv -Z$ no es fuertemente inconsistente, basta verificar que $Z \equiv -Z$ tiene un modelo. Considere el modelo $(\{MA, M1\}, MA, <, V)$ tal que, $MA < MA$, $M1 < M1$, $MA < M1$, $V(MA,+Z) = V(M1,Z) = V(M1,+Z) = 0$ y $V(MA,Z) = V(MA,-Z) = V(M1,-Z) = 1$. Por lo tanto, $V(MA, Z \equiv -Z) = 1$. Es decir, $Z \equiv -Z$ tiene un modelo, y por lo tanto es fuertemente consistente en $KT4P$ y no hay paradoja. $\square$

Comentario. En Sierra (2021), se presenta otra solución a la variante de la paradoja del mentiroso, presentada más arriba, utilizando el sistema de gráficos existenciales Gamma-LD. Los resultados obtenidos contrastan fuertemente: en Gamma-LD se infiere que Z no es el caso, Z no es falsa y Z no es verdadera, mientras que en AlfaK se infiere que Z es el caso, Z es falsa y Z no es verdadera. Esto se debe al contraste de los enfoques de las lógicas paracompletas versus las lógicas paraconsistentes, por ejemplo, en AlfaK se tiene $\left[\left(Y'\right)\left\{X'\right\}\right] \mid\Rightarrow \left[\left(Y'\right)\left(X'\right)\right]$, es decir, $-X \supset Y \mid\Rightarrow X \cup Y$, mientras que en Alfa intuicionista se tiene $\left[\left(Y'\right)\left(X'\right)\right] \mid\Rightarrow \left[\left(Y'\right)\left[X'\right]\right]$, es decir, $X \vee Y \mid\Rightarrow \neg X \to Y$.

Agradecimientos

El autor agradece a los profesores Arnold Oostra Van Noppen de la Universidad del Tolima, Fernando Zalamea Traba de la Universidad Nacional de Colombia y Yuri Poveda Quiñones de la Universidad Tecnológica de Pereira, por sus inspiradoras publicaciones sobre los gráficos existenciales de Peirce; a la profesora María Elena Álvarez Ospina de la Universidad EAFIT y a la Ingeniera Gloria Rúa Marín egresada de la Universidad EAFIT, por sus inspiradoras motivaciones sobre gráficos existenciales paraconsistentes y paracompletos.

Referencias

Bochenski, I. (1976). Historia de la lógica formal. Ed. Gredos. Madrid.

Brady, G. & Trimble, T. (2000). A categorical interpretation of C.S. Peirce's propositional logic Alpha. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 149, 213-239.

da Costa, N. (1993). Sistemas formais inconsistentes. Ed. UFPR. Universidade Federal Do Paraná. Curitiba. Brasil.

Doop, J. (1969). Nociones de lógica formal. Ed. Tecnos S.A. Madrid.

Hamilton, A. (1978). Logic for mathematicians. Cambridge University Press. Cambridge.

Henkin, L. (1949). The completeness of the first order functional calculus. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(**3**), 159 –166.

Heyting, A. (1956). Intuitionism: An introduction (Studies in logic and the foundations of mathematics). North-holland publishing company.

Oostra, A. (2010). Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista. *Cuadernos de Sistemática Peirceana*, 2, 25-60.

Oostra, A. (2011). Gráficos existenciales beta intuicionistas. *Cuadernos de Sistemática Peirceana*, 3, 53-78.

Oostra, A. (2012). Los gráficos existenciales gama aplicados a algunas lógicas modales intuicionistas. *Cuadernos de Sistemática Peirceana*, 4, 27-50.

Oostra A. (2021). Equivalence Proof for Intuitionistic Existential Alpha Graphs. Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2021. *Lecture Notes in Computer Science*, 12909. Springer, Cham.

Peirce, C. (1965). Charles S. Peirce, Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Charles Hartshorne, Paul Weiss and Arthur W. Burks (Eds.). Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press (1931–1958).

Roberts, D. (1992). The existential graphs in Computters Math. *Applie*, 23, 6-9, 639-663.

Sierra, M. (2010). Argumentación deductiva con diagramas y árboles de forzamiento. Fondo Editorial Universidad EAFIT. Medellín.

Sierra, M. (2021). Lógica doble LD y gráficos existenciales gamma LD. *Revista Facultad de Ciencias Básicas*, 17, 2.

Smullyan, R. (1997). Como se llama este libro. Ed. Cátedra. Madrid.

van Dalen, D. (2013). Logic and structure. Springer-Verlag. London.

Zalamea, F. (2010). Los gráficos existenciales Peirceanos. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Zeman, J. (1963). The Graphical Logic of C.S. Peirce, Ph.D. Thesis, University of Chicago.