Revista Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
V 4 N°2 julio-diciembre de 2015 • ISSN 0121-747X / ISSN-e 2357-5749 • Artículo Corto
Páginas 54 a 57

UN ERROR SISTEMÁTICO EN LOS TEXTOS DE CÁLCULO PARA INGENIERÍA [a]

A COMMON MISTAKE IN CALCULUS TEXTBOOKS FOR ENGINEERING

FERNANDO PUERTA ORTÍZ[b]

Recibido 15-10-2015, aceptado 11-11-2015, versión final 11-11-2015.
Artículo Corto

RESUMEN: En el presente artículo se pretende señalar un error que se comete cuando se definen dos conceptos fundamentales que se enseñan en los cursos de cálculo para ingeniería, en una y varias variables. El caso tratado en este artículo se centra en un par de conceptos comúnmente mal definidos: Las nociones de *máximos y de mínimos relativos o locales* de funciones en una y varias variables. Como punto de partida se toman dos textos clásicos, Leithold (1998) y Stewart (1999) libros guías durante muchos años, no únicamente en la Universidad Nacional de Colombia, sino también en otras universidades de prestigio, nacionales e internacionales.

PALABRAS CLAVE: Abierto relativo, función real, funciones reales de varias variables, máximo relativo, mínimo relativo.

ABSTRACT: This article intends to point out a common mistake in the teaching of two fundamental concepts that appear in the traditional courses of Calculus for engineering, in one and several variables. In the case discussed in this article, we focus on two concepts usually poorly defined: The notion of local or relative *maximum and local or relative minimum* of a function, in one and several variables. As a starting point, we take as reference two traditional texts, Leithold (1998) and Stewart (1999) books that have served for many years as a guide, not only at the Universidad Nacional de Colombia, but also in other prestigious universities, both national and international .

KEYWORDS: Open relative subset, real functions, real functions of several variables, relative maximum, relative minimum.

[a] Puerta, F. (2015). Un error sistemático en los textos de cálculo para ingeniería. *Revista de la Facultad de Ciencias*, 4 (**2**), 54–57.

[b] Profesor Asociado, Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
fpuerta@unal.edu.co

1. MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS O LOCALES

Los textos guías de cálculo para estudiantes de las carreras de Ingeniería, como Leithold (1998) y Stewart (1999), reflejan unos fallos que ameritan ser considerados y debatidos por la comunidad docente, tanto por la que realiza docencia básica como por aquellos profesores de matemáticas aplicadas, y todos aquellos interesados en la pedagogía de la disciplina. Tales definiciones rezan así: Una función real f (función con dominio y rango, subconjuntos de los números reales) tiene *máximo relativo o local* en un punto c de su dominio D_f si existe un intervalo abierto I, centrado en c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I. En tal caso se dice que $f(c)$ es un *valor máximo relativo o simplemente que es un máximo relativo.*

Análogamente, f tiene *mínimo relativo o local* en un punto c de su dominio D_f si existe un intervalo abierto I, centrado en c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I. En tal caso se dice que $f(c)$ es un valor mínimo relativo o simplemente que $f(c)$ es un mínimo relativo.

Estas definiciones se pueden también consultar en textos de cálculo para estudiantes de carreras de matemáticas puras y de ciencias básicas, como por ejemplo Apostol (1973), Kitchen (1986) y Spivak (1975).

En los textos de Análisis y en los últimos tres señalados, estos mismos conceptos se definen así: una función real f tiene *máximo relativo o local* en un punto c de su dominio D_f si *existe un intervalo abierto I, centrado en c tal que* $f(c) \geq f(x)$ *para todo* x *en* I $\cap D_f$. Análogamente, f tiene *mínimo relativo o local* en un punto c de su dominio D_f si existe un intervalo abierto I, centrado en c tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I $\cap D_f$. Justamente los conjuntos de la forma I $\cap D_f$, donde I es un intervalo abierto en el conjunto de los números reales, constituyen o conforman los que se denominan *abiertos relativos* en D_f, de ahí sus nombres de máximo y mínimo relativos o simplemente extremos relativos.

De las definiciones anteriores se infiere que todo máximo absoluto (o mínimo absoluto) son respectivamente máximo relativo, o mínimo relativo, donde una función real f tiene máximo absoluto (o mínimo absoluto) en un punto c de su dominio D_f si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D_f, o $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D_f, respectivamente.

Lo anterior, sin embargo, no resulta ser cierto si se tienen en cuenta las definiciones de los textos de Ingeniería inicialmente mencionados. Considere el siguiente ejemplo sencillo:

Sea f la función real definida como $f(x) = x$ en el intervalo cerrado $[0,1]$(en este caso $D_f = [0,1]$) (Entonces $f(0) = 0 \leq x = f(x) \leq 1 = f(1)$, para cada x en $[0,1]$). Luego f tiene mínimo absoluto en 0 y máximo absoluto en 1. Pero según las definiciones que se dan en los libros para Ingeniería, f no tendría mínimo relativo en 0 ni máximo relativo en 1, ya que no existen intervalos abiertos centrados en 0 ni en 1 donde f esté definida. En cambio con la definición correcta que aparece en los libros Apostol (1973), Kitchen (1986) y Spivak (1975) y de análisis, $f(0)$ también sería un mínimo relativo o local y $f(1)$ sería así mismo un máximo relativo o local: esto último se puede verificar tomando $I_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $I_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, pues se cumple que $f(0) \leq f(x)$ para cada x en $I_1 \cap [0,1]$(y también se cumple que $f(x) \leq f(1)$, para cada x en $I_2 \cap [0,1]$)(Figura 1).

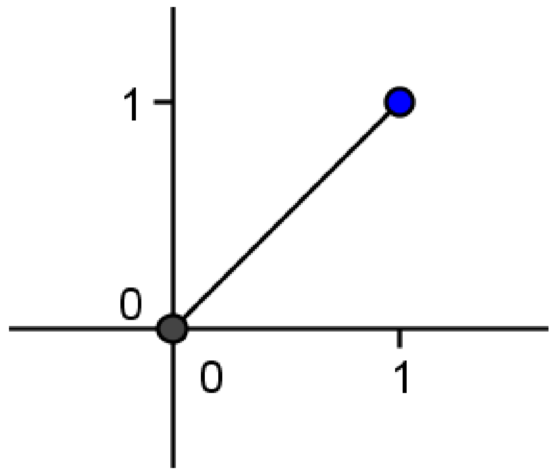

Figura 1: Mínimo y máximo tanto absolutos como relativos. Fuente: Elaboración propia

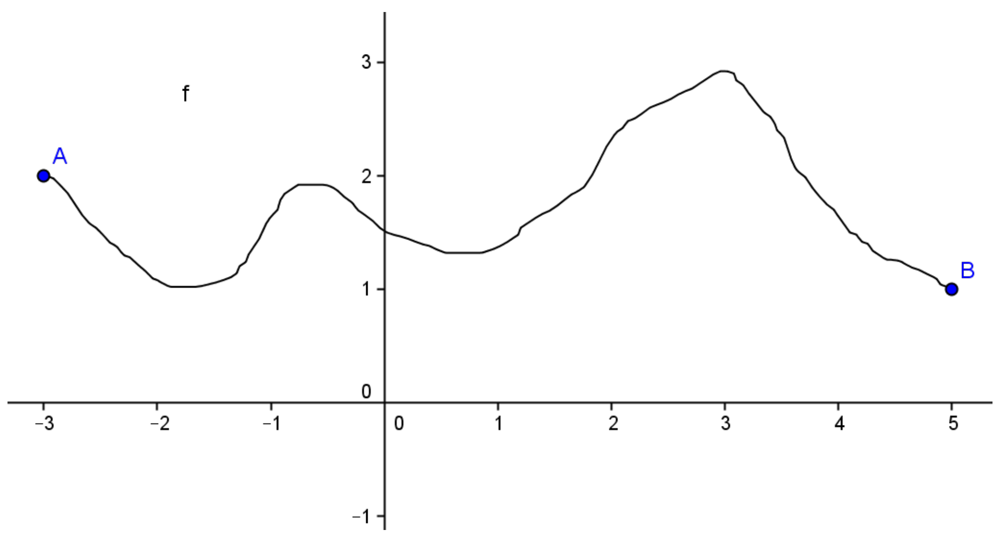

Figura 2: Máximo y mínimo relativos en los extremos del dominio. Fuente: Elaboración propia

Es de anotar que esas definiciones incorrectas se conservan en los textos de cálculo vectorial o cálculo en varias variables para campos escalares, que son funciones de varias variables a valor real, es decir, funciones definidas en un subconjunto de R^N y que toman valores en R. También conviene observar que habría extremos relativos de funciones reales que no lo serían, si se mantienen esas inconsistencias, cuando estos se presentan en los extremos del dominio. De modo que, por ejemplo, si el perfil de una región montañosa entre dos ciudades se describe como en la Figura 2, se tendría de acuerdo con las definiciones correctas, que habría máximo relativo en el extremo izquierdo y

mínimo relativo en el extremo derecho, así la montaña termine en acantilados, extremos que deberá tener en cuenta el piloto de cualquier avión para realizar un vuelo seguro.
Conviene aclarar o enfatizar que entonces, el Teorema de Fermat o de los extremos relativos, debe enunciarse así:
Si una función de valor real f tiene extremo relativo en algún punto c del interior de su dominio D_f (esto es, existe I, intervalo abierto centrado en c con $I \subseteq D_f$, I subconjunto de D_f) y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.
Nótese que en la Figura 1 la derivada de f a la derecha de 0 es 1 ($f'_+(0) = 1$); lo mismo que la derivada a izquierda en 1 es 1 ($f'_-(1) = 1$). Análogamente, las derivadas a derecha e izquierda de los extremos del dominio de la función f de la Figura 2, si existen, son números negativos.

Referencias

Apostol, Tom M (1973), Calculus, Volumen I, Editorial Reverté S.A., 813 p.

Kitchen, Joseph W. (1986), Cálculo, Mc Graw Hill, 863 p.

Leithold, Louis (1998), El Cálculo, Oxford University Press, 1360 p.

Spivak, Michael (1975), Calculus: Cálculo Infinitesimal, Editorial Reverté, 413 p.

Stewart, James (1999), Cálculo, Conceptos y Contextos, International Thomson Editores, 991 p.