

APROXIMACIÓN AL USO DE UNA REGLA DE PARADA ÓPTIMA SOBRE SISTEMAS COHERENTES ^a

APPROXIMATION TO THE USE OF AN OPTIMAL STOPPING RULE FOR COHERENT SYSTEMS

NELFI GERTRUDIS GONZÁLEZ ÁLVAREZ ^b

Recibido 25-02-2015, aceptado 14-05-2015, versión final 14-12-2015.

Artículo Investigación

RESUMEN: En este trabajo se introducen varias aplicaciones de la regla de parada óptima denominada regla ILA (*Infinitesimal Look Ahead rule*) en la solución de problemas de optimización en procesos de mantenimiento, de burn-in y de garantías sobre sistemas coherentes observados al nivel de sus componentes. Estas aplicaciones corresponden a extensiones propuestas en este trabajo de problemas formulados previamente en la literatura de confiabilidad, con el fin de modelar los procesos de falla/repaso y las funciones de costo asociados, cuando el sistema coherente es observado bajo una filtración completa.

PALABRAS CLAVE: Modelo general de tiempo de vida, reparo mínimo, semi-martingala regular, sistema coherente, tasa de falla.

ABSTRACT: In this paper is introduced some applications of the optimal stopping rule known as ILA rule (*Infinitesimal Look Ahead rule*) in solving optimization problems in maintenance, burn-in and guarantees processes on coherent systems observed at the level of components. These applications correspond to extensions proposed in this work for problems formulated previously in literature of reliability, in order to model the processes of failure/repair and their associated cost functions, when the system is observed under a complete filtration.

KEYWORDS: Coherent system, failure rate, general lifetime model, minimal repair, smooth semimartingale.

^aGonzález, N. (2015). Aproximación al uso de una regla de parada óptima sobre sistemas coherentes. *Revista de la Facultad de Ciencias*, 4 (2), 103–136.

^bPh. D. en Ciencias Estadística, Profesora Asociada Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Medellín. ngonzale@unal.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En confiabilidad la consideración de estructuras de costos y/o de utilidades, o de los riesgos derivados de la ocurrencia de eventos de falla críticos, conduce al planteamiento de problemas donde una solución óptima es necesaria, bien sea en las estrategias de mantenimiento preventivo, o en la cobertura de garantías o en procedimientos de fabricación que aplican burn-in.

En un problema de optimización se halla una solución que maximiza o minimiza una función objetivo (irrestringida o sujeta a alguna restricción). En particular nuestro interés se centra en la determinación de cuándo parar un proceso estocástico asociado a la función objetivo que se pretende optimizar, el cual es observado sobre un sistema coherente de componentes, es decir un sistema donde todas las componentes son relevantes y el desempeño del sistema puede mejorarse al mejorar el desempeño de sus componentes.

El tratamiento clásico dado a este tipo de problema considera la maximización o minimización de una función determinística del tiempo, la cual involucra en general valores esperados que son calculados considerando distribuciones estadísticas de variables aleatorias que no son observadas dinámicamente en el tiempo, y que por tanto, tampoco considera la relación entre un sistema y sus componentes bajo tal dinámica temporal. Este tipo de aproximación es conocida como *aproximación estadística* o *de caja negra*. Por el contrario, cuando un proceso estocástico es observado sobre un sistema coherente, considerando en el tiempo el funcionamiento no sólo del sistema como un todo sino también a nivel de las componentes, tal aproximación es denominada *aproximación física*. Ambas aproximaciones involucran niveles de información completamente diferentes respecto al sistema y de lo que acontece a su interior.

En la aproximación estadística el tiempo de vida de un sistema de componentes es descrito mediante una función de distribución de probabilidad univariada o mediante una distribución bivariada que asocia la edad del sistema y su uso. En el caso de dependencia estadística entre los tiempos de falla de las componentes, se postula una distribución de probabilidad multivariada de la cual se derivan las distribuciones marginales de las componentes y del tiempo de vida del sistema de acuerdo a su estructura (serie, paralelo, y configuraciones más complejas). En lo que sigue, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, 1_A es la variable indicadora del conjunto o evento A , \mathcal{M}_0^2 la clase de martingalas cuadrado integrables de media cero y la abreviación (P-c.s) indica que una condición dada se cumple casi seguramente según una medida de probabilidad P . Sea ζ el tiempo de vida del sistema, una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) ; la filtración o historia considerada bajo la aproximación estadística es generada únicamente por ζ , es decir, por $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, con

$$\mathcal{G}_t = \sigma(\zeta \wedge t) = \sigma\{1_{\{\zeta > s\}}, 0 \leq s \leq t\}. \tag{1}$$

En este caso, la tasa de falla asociada corresponde a $\lambda(t)$, una función determinística del tiempo, de forma que si ζ es una variable aleatoria absolutamente continua, entonces el proceso puntual simple $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$ admite la siguiente representación Semimartingala regular o SSM ^c,

$$N_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda(s) ds + M_t^g, \tag{2}$$

donde M_t^g es una \mathbb{G} -martingala cuadrado integrable de media cero (es decir, $M_t^g \in \mathcal{M}_0^2$).

Existen procedimientos en mantenimiento, garantías o burn-in que consideran separadamente cada componente de un sistema coherente, lo cual origina procesos de costos individuales que luego se suman para obtener un costo total. Sin embargo estos procedimientos no son equivalentes a los de la aproximación física antes mencionada.

El modelo estocástico que permite la aproximación física es conocido como el modelo general de tiempo de vida (Jensen, 1989; Aven & Jensen, 2013). En este modelo el proceso de falla de un sistema coherente es representado por un proceso de conteo definido bajo la historia o filtración generada por la observación del sistema al nivel de sus componentes, es decir, bajo $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{1_{\{T_i > s\}}, 0 \leq s \leq t, i = 1, \dots, m\}, \tag{3}$$

donde m corresponde al número de componentes en el sistema y T_i la variable aleatoria que representa el tiempo de vida de la componente i -ésima. El modelo general de tiempo de vida es el proceso puntual simple $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$ admitiendo la siguiente representación SSM,

$$N_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_t^f, \tag{4}$$

con M_t^f una \mathbb{F} -martingala tal que $M_t^f \in \mathcal{M}_0^2$, y $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ la \mathbb{F} -intensidad de falla, un proceso estocástico no negativo progresivamente medible y ζ un \mathbb{F} -tiempo de parada totalmente inaccesible (es decir, un tiempo de parada que ocurre de manera repentina sin previsión de su ocurrencia).

Para entender la diferencia entre la aproximación física y la estadística considere el siguiente ejemplo (Aven & Jensen, 2013): Sea un sistema coherente de $m = 2$ componentes en paralelo, $\zeta = T_1 \vee T_2$, $T_i \sim \exp(\alpha_i)$, $i = 1, 2$ e independientes. La *aproximación estadística* asigna a ζ una tasa de falla dada por,

^cUna Semimartingala regular o *Smooth Semimartingale (SSM)* es un proceso estocástico que puede considerarse como la versión estocástica de una función derivable.

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}, \quad (5)$$

que nada dice sobre la estructura del sistema y tampoco incorpora la información del estado de las componentes en el tiempo t . De otro lado, la *aproximación física* usa la información sobre el estado de los componentes en un tiempo t y define el proceso de intensidad $\lambda_t = \alpha_1 1_{\{T_2 \leq t\}} + \alpha_2 1_{\{T_1 \leq t\}}$, en $\{\zeta > t\}$, es decir,

$$\lambda_t = \begin{cases} 0, & \text{en } \{T_1 > t, T_2 > t\}, \\ \alpha_1 & \text{en } \{T_1 > t, T_2 \leq t\}, \\ \alpha_2 & \text{en } \{T_1 \leq t, T_2 > t\}. \end{cases} \quad (6)$$

Entre la aproximación física y la estadística se pueden considerar niveles intermedios, pues no siempre es posible observar la información completa sobre un sistema coherente, es decir, bajo la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, sino bajo alguna filtración definida por algún nivel de información parcial sobre el estado del sistema y sus componentes, digamos, bajo $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$, con $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t$, en la cual la intensidad de falla del sistema sería^d $\lambda_t^a = E[\lambda_t | \mathcal{A}_t]$, y

$$N_t^a = E[N_t | \mathcal{A}_t] = 1_{\{\zeta \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s^a ds + M_t^a, \quad M_t^a \in \mathcal{M}_0. \quad (7)$$

Por ejemplo, en el sistema en paralelo presentado previamente, si sólo se tuviese información del estado del sistema y de la componente 1, es decir, bajo la sub filtración $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{A}_t = \sigma\{1_{\{\zeta > s\}}, 1_{\{T_1 > s\}}, 0 \leq s \leq t\}. \quad (8)$$

Entonces $\lambda_t^a = E[\lambda_t | \mathcal{A}_t]$ corresponde a,

$$\lambda_t^a = E[\alpha_1 1_{\{T_2 \leq t\}} + \alpha_2 1_{\{T_1 \leq t\}} | \mathcal{A}_t] = \alpha_1 P(T_2 \leq t) 1_{\{T_1 > t\}} + \alpha_2 1_{\{T_1 \leq t\}}. \quad (9)$$

Por tanto, se puede derivar la tasa de falla ordinaria como la filtración de λ_t en el menor nivel de información sobre el estado del sistema, es decir, $\lambda(t) = E[\lambda_t | \mathcal{G}_t]$ y el proceso puntual simple dado en (2).

Desde que diferentes niveles de información conducen a diferentes intensidades con las cuales los procesos de falla/reparo ocurren, entonces las propiedades estadísticas de cualquier función estocástica asociada al proceso de falla/reparo ejecutado sobre un sistema coherente también cambian según el nivel de información y estos cambios a su vez tendrán efectos en la definición de procedimientos y políticas óptimas orientados a mantener la confiabilidad de productos que corresponden a sistemas de componentes.

^dResultado del teorema de proyección en teoría de filtración. Ver Brémaud (1981) y Jensen (1989).

El objetivo básico de este artículo es presentar e ilustrar la solución desde la aproximación física y usando la regla de parada óptima denominada ILA o *Infinitesimal-look-ahead* (Jensen, 1989; Aven & Jensen, 2013), de algunos problemas clásicos de optimización en el ámbito del mantenimiento preventivo, burn-in y garantías, tratados usualmente desde la aproximación estadística. Sin embargo, estos resultados también pudieran ser extendidos a cualquier filtración, desde que se verifiquen las condiciones enunciadas para las soluciones óptimas, considerando los procesos de tasa de falla correspondientes a la filtración usada. Con este fin, este artículo está organizado como sigue. La Sección 2 presenta dos problemas básicos de optimización formulados en Jensen (1989) y Aven & Jensen (2013): en el primero el objetivo es determinar el tiempo óptimo para parar un proceso estocástico de modo que sea máxima la esperanza del proceso parado en tal tiempo y la solución es denominada la regla ILA. En el segundo problema el objetivo es hallar un tiempo de parada óptimo para minimizar la razón de las esperanzas de dos procesos estocásticos, y su solución óptima es definida también a través de la regla de parada ILA, reformulando el objetivo de minimización en términos de uno de maximización próximo al primer problema planteado. En la Sección 3 se presenta inicialmente una aplicación del problema básico 1 en la definición de una política óptima de mantenimiento por edad previamente propuesta en la literatura de confiabilidad y posteriormente se propone una extensión de esta política considerando un modelo generalizado de sustitución por edad, luego, se contrasta la solución bajo la filtración trivial \mathbb{G} (aproximación estadística) versus la solución bajo la filtración completa \mathbb{F} (aproximación física); en la Sección 4 se muestra otra aplicación de la solución del problema básico 1 esta vez proponiendo la extensión en la formulación de dos políticas óptimas de burn-in estudiadas clásicamente desde la aproximación estadística bajo una filtración trivial \mathbb{G} en la cual se considera una función de tasa de falla con forma de bañera, a una aproximación física usando una filtración \mathbb{F} completa bajo la cual es definido un proceso de intensidad de falla cuyas realizaciones son con forma de bañera. En la Sección 5, se propone una extensión de una política de garantía tipo reparación-sustitución gratis (FRW) bajo una aproximación física y se formula y se desarrolla la solución de la determinación del tiempo óptimo de garantía usando lo establecido en el problema básico 2 presentado en la Sección 2. Finalmente, en la Sección 6 se presentan las principales conclusiones de lo desarrollado en este artículo y unas consideraciones finales que pueden orientar el trabajo futuro en este campo.

2. PARADA ÓPTIMA DE UN PROCESO: REGLA ILA

Siguiendo a Jensen (1989) y Aven & Jensen (2013), sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad completo con filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, una familia de sub σ -álgebras de \mathcal{F} satisfaciendo las condiciones de Dellacherie, es decir, crecientes, continuas a derecha y completas. Considere los siguientes dos problemas en los cuales una regla de parada óptima es usada en la definición del tiempo óptimo en el cual debe pararse cierto proceso estocástico observado bajo la filtración \mathbb{F} .

2.1. Problema básico 1

Sea ζ un \mathbb{F} -tiempo de parada. Considere inicialmente el problema de determinar un punto óptimo en el tiempo, τ^* , que maximice alguna función de utilidad. Tal punto será un tiempo de parada que maximiza $E[Z_t]$ para algún proceso $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$, es decir, $E[Z_{\tau^*}] = \sup_t E[Z_t]$. Para resolver este problema de optimización se recurre a la representación SSM del proceso Z y se busca a τ^* dentro de una clase apropiada de tiempos de parada $\mathcal{C}_\zeta^{\mathbb{F}}$ en la que se cumple que Z_{τ^*} es un SSM. Sea

$$\mathcal{C}_\zeta^{\mathbb{F}} = \{\tau : \tau \text{ es un } \mathbb{F}\text{-tiempo de parada, } \tau < \infty, E[Z_\tau] > -\infty\}. \quad (10)$$

Para encontrar una solución del problema de parada óptima es necesario establecer alguna condición sobre el proceso Z , en particular se considera la condición denominada *caso monótono* (Jensen, 1989; Aven & Jensen, 2013):

Caso monótono: Suponga que $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ es un \mathbb{F} -SSM, es decir, un proceso que admite la representación,

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t^z, \quad (11)$$

donde $(f_t)_{t \geq 0}$ es un proceso \mathbb{F} -progresivamente medible tal que $E[\int_0^t |f_s| ds] < \infty, \forall t \geq 0$, $(M_t^z)_{t \geq 0}$ es una \mathbb{F} -martingala de media cero y $E[|Z_0|] < \infty$. Entonces el caso monótono corresponde a la siguiente condición,

$$\{f_t \leq 0\} \subset \{f_{t+u} \leq 0\} \quad \forall t, u \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \{f_t \leq 0\} = \Omega. \quad (12)$$

La regla ILA o *Infinitesimal-look-ahead* (Jensen, 1989; Aven & Jensen, 2013): Es el \mathbb{F} -tiempo de parada ξ que corresponde al primer tiempo t en que se verifica la condición del caso monótono, es decir,

$$\xi = \inf \{t : f_t \leq 0\}, \quad (13)$$

de forma que una vez que f_t cruza cero desde arriba en el instante $t = \xi$, este proceso permanecerá siendo negativo $\forall t \geq \xi$. Ver Figura 1.

La regla ILA es una solución óptima en el problema de hallar $\tau^* \in \mathcal{C}_\zeta^{\mathbb{F}}$, tal que $E[Z_{\tau^*}] = \sup_t E[Z_t]$, bajo la siguiente condición:

Teorema 2.1. (Jensen, 1989; Aven & Jensen, 2013). Sea $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un \mathbb{F} -SSM dado por (11) y ξ el tiempo de parada ILA en (13). Si la martingala M_t^z es uniformemente integrable, entonces bajo el caso monótono se cumple que $\tau^* = \xi$,

$$E[Z_\xi] = E[Z_{\tau^*}] = \sup \{E[Z_\tau] : \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{\mathbb{F}}\}. \quad (14)$$

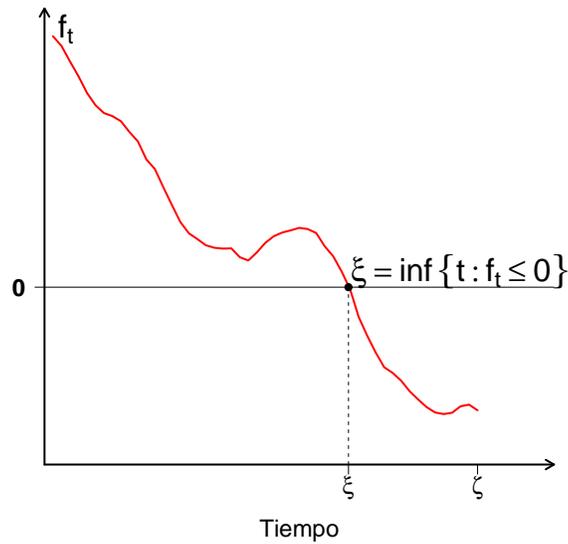


Figura 1: Ejemplo Regla ILA

2.2. Problema básico 2

Siguiendo a Jensen (1989) y Aven & Jensen (2013), considere el siguiente supuesto,

Suposición A: Sean Z_t y X_t dos \mathbb{F} -SSM (los procesos Z y X son adaptados a la filtración \mathbb{F} , es decir, son observables de acuerdo a la información acumulada en \mathbb{F}) con las representaciones,

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t^z, \quad (15)$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t g_s ds + M_t^x, \quad (16)$$

tales que $E[Z_0] > 0$, $E[X_0] \geq 0$, $g_s > 0$, $s \in \mathbb{R}^+$ y $M_{t \wedge \zeta}^z$ y $M_{t \wedge \zeta}^x$ son \mathbb{F} -martingalas de media cero uniformemente integrables.

Sea τ un \mathbb{F} -tiempo de parada. Se desea minimizar la función

$$K_\tau = \frac{E[Z_\tau]}{E[X_\tau]}, \quad (17)$$

para $\tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}}$,

$$\mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}} \{ \tau : \tau \text{ es un } \mathbb{F}\text{-tiempo de parada } \tau \leq \zeta, E[Z_\tau] > -\infty, E[|X_\tau|] < \infty \}, \quad (18)$$

es decir, se desea hallar τ^* , tal que

$$K^* = K_{\tau^*} = \inf \left\{ K_\tau : \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}} \right\}. \quad (19)$$

En la solución del problema 2 se podría usar la regla ILA reemplazando el problema de minimización en (19), por uno de maximización equivalente (Jensen, 1989; Aven & Jensen, 2013). Para ello, note que,

$$K^* \leq \frac{\mathbb{E}[Z_\tau]}{\mathbb{E}[X_\tau]}, \quad \forall \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}} \text{ es equivalente a } K^* \mathbb{E}[X_\tau] - \mathbb{E}[Z_\tau] \leq 0, \quad \forall \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}}$$

y en la última desigualdad, la igualdad estricta se sostiene sólo para un tiempo de parada óptimo, así el problema de maximización equivalente a (19) consiste en hallar $\tau^* \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}}$, tal que

$$\mathbb{E}[Y_{\tau^*}] = \sup \left\{ \mathbb{E}[Y_\tau] : \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}} \right\} \text{ donde } Y_t = K^* X_t - Z_t \text{ y } K^* = \inf \left\{ K_\tau : \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}} \right\}. \quad (20)$$

Para el proceso $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, con $t \in \{\zeta > t\}$, la representación SSM es dada por

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (K^* g_s - f_s) ds + M_t^y, \text{ con } Y_0 = K^* X_0 - Z_0 \text{ y } M_t^y = K^* M_t^x - M_t^z. \quad (21)$$

En este caso, para que el Teorema 2.1 sea aplicable es necesario que $(K^* g_t - f_t)$ satisfaga el caso monótono y desde que se pruebe que M_t^y es una martingala de media cero uniformemente integrable, la regla ILA $\tau^* = \inf \{t \in \mathbb{R}^+ : K^* g_t - f_t \leq 0\}$ será la solución óptima; sin embargo, este tiempo de parada óptimo depende de una cantidad desconocida K^* , la cual debe ser determinada de la igualdad $\mathbb{E}[Y_{\tau^*}] = 0$. Por otro lado, el caso monótono se cumplirá sólo si la razón $r_t = f_t/g_t$ es creciente (P-c.s) y tal que $f_0/g_0 < K^*$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} r_t > K^*$ pero dado que K^* es desconocido, será necesario usar límites que acoten a K^* y exigir que por lo menos r_t sea creciente en tal intervalo. Luego, para hallar τ^* como una regla de parada óptima, se establecen los siguientes resultados (Jensen, 1990):

Lema 2.1. Bajo la suposición (A), y si además se cumple que

$$q = \inf \left\{ \frac{f_t(\omega)}{g_t(\omega)} : 0 \leq t < \zeta(\omega), \omega \in \Omega \right\} > -\infty, \quad (22)$$

entonces, $k_l \leq K^* \leq k_u$, donde estos límites son dados por

$$k_l = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[Z_0 - qX_0]}{\mathbb{E}[X_\zeta]} + q, & \text{si } \mathbb{E}[Z_0 - qX_0] > 0 \\ \frac{\mathbb{E}[Z_0]}{\mathbb{E}[X_0]}, & \text{si } \mathbb{E}[Z_0 - qX_0] \leq 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$k_u = \frac{\mathbb{E}[Z_\zeta]}{\mathbb{E}[X_\zeta]}. \quad (24)$$

Teorema 2.2. Bajo la suposición (A), considere el tiempo de parada,

$$\rho_k = \inf \{t \in \mathbb{R}^+ : k g_t - f_t \leq 0\} \wedge \zeta, \quad \inf \emptyset = \infty, \quad k \in \mathbb{R} \quad (25)$$

y los límites k_l y k_u dados en el Lema 2.1. Sea además el proceso $(r_t)_{t \geq 0}$, con $r_t = f_t/g_t$. Si r_t es (k_l, k_u) -creciente c.s en $\{\zeta > t\}$, esto es,

$$\forall t \in \{\zeta > t\}, h \geq 0, r_t \geq k_l \text{ implica que } r_{t+h} \geq r_t \wedge k_u, \tag{26}$$

entonces

$$\tau^* = \rho_{k^*} \text{ con } k^* = \inf \{k \in \mathbb{R} : kE[X_{\rho_k}] - E[Z_{\rho_k}] \geq 0\} = K^*. \tag{27}$$

El resultado del Teorema 2.2 es ilustrado en la Figura 2.

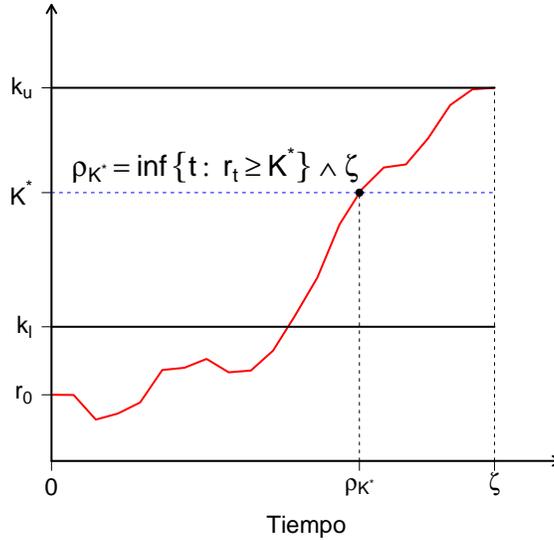


Figura 2: Ilustración regla ILA en Teorema 2.2

Observe que en la solución del problema 2 bajo el Teorema 2.2, no es necesario considerar todos los tiempos de parada $\tau \in \mathcal{C}_{\zeta}^{k, \mathbb{F}}$, sino únicamente la clase de tiempos de parada en (25), y el nivel óptimo de la razón r_t , $k^* = K^*$ es determinado de la igualdad,

$$E[Y_{\rho_{k^*}}^{k^*}] = \sup \{E[Y_{\rho_k}^k] = kE[X_{\rho_k}] - E[Z_{\rho_k}]\} = E[Y_{\tau^*}] = \sup \{E[Y_{\tau}] : \tau \in \mathcal{C}_{\zeta}^{k, \mathbb{F}}\} = 0$$

con Y_t^k , el proceso definido como $Y_t^k = kX_t - Z_t$, es decir,

$$Y_t^k = Y_0^k + \int_0^t (kg_s - f_s) ds + M_t^{y^k} \text{ con } Y_0^k = kX_0 - Z_0, M_t^{y^k} = kM_t^x - M_t^z, \tag{28}$$

y bajo la suposición (A), $\forall k \in \mathbb{R}$, $M_t^{y^k}$ es una \mathbb{F} -martingala de media cero uniformemente integrable.

Corolario 2.1. Sean f_t y g_t determinísticos y $t_k = \inf \{t : r_t = \frac{f_t}{g_t} \geq k\}$, $k \in \mathbb{R}$. Si $X_0 \equiv 0$, entonces $\tau^* = t^* \wedge \zeta$ es óptimo, con $t^* = t_{K^*} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ y

$$K^* = \inf \left\{ k \in \mathbb{R} : \int_0^{t_k} (kg_s - f_s) P(\zeta > s) ds \geq E[Z_0] \right\}. \tag{29}$$

Si además $r_t \equiv r_0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, r_0 una constante, entonces,

$$K^* = \frac{\mathbb{E}[Z_0]}{\mathbb{E}[X_\zeta]} + r_0 \text{ y } \tau^* = \zeta. \quad (30)$$

3. POLÍTICA ÓPTIMA DE MANTENIMIENTO BASADA EN LA EDAD

3.1. Política óptima bajo la filtración \mathbb{G}

En la literatura de confiabilidad se han formulado varias políticas de mantenimiento preventivo que tratan de reducir la ocurrencia de fallas en un sistema o devolverlo al estado operativo cuando éste ya ha fallado. Un tipo de política básica ha sido postulada (Barlow & Proschan, 1975; Aven & Jensen, 2013), denominada *Política de sustitución por edad*, en la cual un sistema es sustituido cuando falla o bien cuando alcanza una edad T , y por tanto el tiempo de operación para la i -ésima unidad o sistema corresponde a $\tau_i = \zeta_i \wedge T$.

Si en la política de sustitución por edad puede asumirse que la sucesión de tiempos de vida ζ_1, ζ_2, \dots , conforma una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas o iid, con función de distribución de probabilidad $F(t)$, entonces también los tiempos de operación τ_i constituyen una sucesión de variables aleatorias iid. Si además el costo para un ciclo dado puede describirse por el proceso estocástico $(Z_t)_{t \geq 0}$,

$$Z_t = c_1 + c_2 1_{\{\zeta \leq t\}}, \quad (31)$$

esto es, cuando hay una sustitución sin falla se incurre en un costo c_1 mientras que si hay una falla entonces se incurre en un costo $c_1 + c_2$, entonces el costo incurrido en el i -ésimo ciclo de operación sería dado por $Z_{\tau_i} = c_1 + c_2 1_{\{\zeta \leq \tau_i\}}$ y por tanto el costo total después de n ciclos correspondería a $\sum_{i=1}^n Z_{\tau_i}$ observado en un tiempo total de operación correspondiente a $\sum_{i=1}^n \tau_i$. De esta forma, el costo promedio por ciclo sería,

$$\text{CPC}_n = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{\tau_i}}{\sum_{i=1}^n \tau_i}. \quad (32)$$

De la condición iid en $(\tau_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$, se tiene un proceso de renovación asociado a tal sucesión y como un resultado de la teoría de procesos de renovación, se obtiene que,

$$\text{CU}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{CPC}_n = \frac{\mathbb{E}[Z_\tau]}{\mathbb{E}[\tau]} = \frac{c_1 + c_2 F(T)}{\int_0^T \bar{F}(u) du}. \quad (33)$$

$\text{CU}(T)$ es denominado el costo medio unitario asintótico o de largo plazo por unidad de tiempo. El objetivo es determinar T tal que sea mínimo $\text{CU}(T)$. Para ello, se aplicaría la técnica usual del cálculo para hallar la solución óptima $T^* = \arg \min_{T \geq 0} \text{CU}(T)$, de forma que

$$CU(T^*) = \inf\{CU(T) : T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}\}. \tag{34}$$

Si $CU(T^*) = \infty$, significa que no sería óptimo hacer sustituciones preventivas de una unidad o sistema y por tanto, sólo se realizarían reemplazos cuando la unidad falla. Puede mostrarse que una solución finita sería obtenida cuando la tasa de falla $\lambda(t) = f(t)/\bar{F}(t)$ es creciente y en este caso

$$T^* = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : \lambda(t) \int_0^t \bar{F}(u)du - F(t) \geq \frac{c_1}{c_2}\right\} \tag{35}$$

y

$$CU(T^*) = c_2\lambda(T^*). \tag{36}$$

Una ilustración de la solución óptima dada por (35) es presentada en la Figura 3.

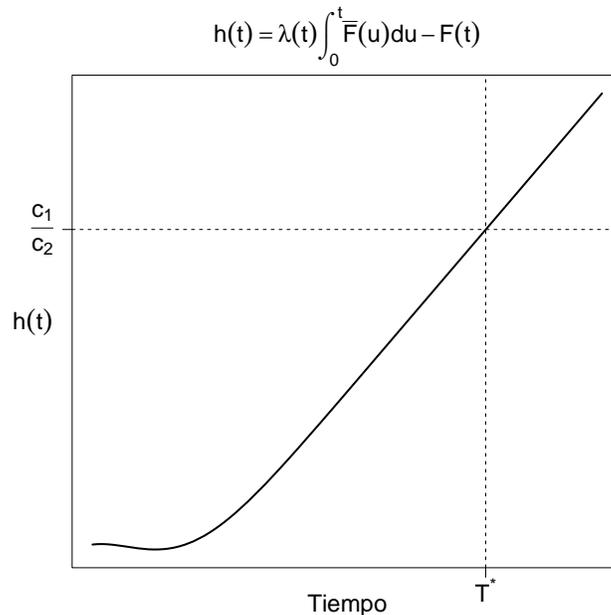


Figura 3: Ejemplo solución óptima en política de sustitución por edad, filtración \mathbb{G} , con $\lambda(t)$ creciente

También es posible resolver este problema aplicando los resultados para el problema básico 2 previamente presentado, es decir, mediante una regla de parada óptima. En este caso, la filtración a considerar es \mathbb{G} y la clase de tiempos de parada en la cual se busca la solución óptima será $\mathcal{C}_\zeta^{k,\mathbb{G}}$,

$$\mathcal{C}_\zeta^{k,\mathbb{G}} = \{\tau : \tau \text{ es un } \mathbb{G}\text{-tiempo de parada } \tau \leq \zeta, E[Z_\tau] > -\infty, E[|X_\tau|] < \infty\}, \tag{37}$$

con $CU(T) = K_\tau = \frac{E[Z_\tau]}{E[X_\tau]}$, $\tau = T \wedge \zeta$ donde

$$Z_t = c_1 + c_2 1_{\{\zeta \leq t\}} = c_1 + \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} c_2 \lambda(s) ds + c_2 M_t^g \text{ y } X_t = t \wedge \zeta = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} ds \text{ P-c.s.}, \tag{38}$$

de modo que $Z_0 = c_1 > 0$, $X_0 = 0$, $M_t^z = c_2 M_t^g$ (una \mathbb{G} -martingala de media cero y cuadrado integrable), $M_t^x = 0$, $\forall t \geq 0$ P-c.s, con $f_t = c_2 \lambda(t)$ y $g_t = 1$, en $\{\zeta > t\}$, de donde $r_t = f_t/g_t = c_2 \lambda(t)$, en $\{\zeta > t\}$. Se quiere hallar $\tau^* = T^* \wedge \zeta$ tal que,

$$K^* = \text{CU}(T^*) = K_{\tau^*} = \inf \left\{ K_\tau : \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{G}} \right\}. \quad (39)$$

Observe que para este caso la suposición (A) es válida bajo la filtración \mathbb{G} . Veamos que también bajo \mathbb{G} el Lema 2.1 es válido desde que $\lambda(t)$ sea no decreciente, con $\lambda(0) = \inf\{\lambda(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$:

$$q = \inf \left\{ \frac{f_t(\omega)}{g_t(\omega)} : 0 \leq t < \zeta(\omega), \omega \in \Omega \right\} = c_2 \lambda(0) \geq 0 > -\infty,$$

entonces $k_l \leq K^* \leq k_u$ con

$$k_l = \frac{\mathbb{E}[Z_0] - qX_0}{\mathbb{E}[X_\zeta]} + q = \frac{c_1}{\mathbb{E}[\zeta]} + c_2 \lambda(0),$$

$$k_u = \frac{\mathbb{E}[Z_\zeta]}{\mathbb{E}[X_\zeta]} = \frac{c_1 + c_2}{\mathbb{E}[\zeta]}.$$

Por último, aplicando el Teorema 2.2, se tiene que

$$\rho_k = \inf \{ t \in \mathbb{R}^+ : k g_t - f_t \leq 0, k \in \mathbb{R} \} \wedge \zeta \Rightarrow \rho_k = t_k \wedge \zeta,$$

con $t_k = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : \lambda(t) \geq \frac{k}{c_2}, k \in \mathbb{R} \right\}$, entonces,

$$\mathbb{E}[X_{\rho_k}] = \mathbb{E}[t_k \wedge \zeta] = \int_0^{t_k} \bar{F}(s) ds,$$

$$\mathbb{E}[Z_{\rho_k}] = c_1 + c_2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t_k} 1_{\{\zeta > s\}} \lambda(s) ds \right] = c_1 + c_2 F(t_k),$$

de modo que,

$$\tau^* = \rho_{K^*} = t_{K^*} \wedge \zeta, \text{ con } t_{K^*} = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : \lambda(t) \geq \frac{K^*}{c_2} \right\} = T^*,$$

$$K^* = \inf \left\{ k \in \mathbb{R} : k \mathbb{E}[X_{\rho_k}] - \mathbb{E}[Z_{\rho_k}] \geq 0 \right\} = \inf \left\{ k \in \mathbb{R} : k \geq \frac{c_1 + c_2 F(t_k)}{\int_0^{t_k} \bar{F}(s) ds} \right\},$$

por tanto,

$$K^* = \frac{c_1 + c_2 F(t_{K^*})}{\int_0^{t_{K^*}} \bar{F}(s) ds}$$

y

$$t_{K^*} = T^* = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : \lambda(t) \geq \frac{c_1 + c_2 F(t)}{c_2 \int_0^t \bar{F}(s) ds} \right\} = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : \lambda(t) \int_0^t \bar{F}(s) ds - F(t) \geq \frac{c_1}{c_2} \right\}.$$

3.2. Política óptima de mantenimiento bajo modelo generalizado de sustitución por edad

A continuación se propone una extensión de la política de sustitución por edad presentada previamente. Considere ahora que en esta política la unidad o sistema es observado bajo la filtración completa \mathbb{F} en (3). Sean como antes, ζ el tiempo de vida del sistema, un \mathbb{F} -tiempo de parada totalmente inaccesible, y los procesos $Z_t = c_1 + c_2 1_{\{\zeta \leq t\}}$ y $X_t = t \wedge \zeta$. Se desea hallar $\tau^* = (T^* \wedge \zeta) \in \mathcal{C}_\zeta^{\mathbb{F}}$, tal que

$$CU(T^*) = K^* = K_{\tau^*} = \inf \left\{ K_\tau = \frac{\mathbb{E}[Z_\tau]}{\mathbb{E}[X_\tau]} : \tau \in \mathcal{C}_\zeta^{k, \mathbb{F}} \right\}. \quad (40)$$

Sea $(\lambda_t^f)_{t \geq 0}$ la \mathbb{F} -intensidad de falla del proceso $N_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$, un proceso estocástico no negativo progresivamente medible. Entonces, de (4) Z_t es un \mathbb{F} -SSM con la representación,

$$Z_t = c_1 + \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} c_2 \lambda_s ds + M_t^z, \text{ con } M_t^z = c_2 M_t^f \in \mathcal{M}_0^2, \quad (41)$$

en tanto, X_t es un \mathbb{F} -SSM con la representación $X_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} ds$, P -c.s (es decir, $M_t^x \equiv 0$). Como antes, $Z_0 = c_1$, $X_0 = 0$ y se cumplen las condiciones de integrabilidad sobre las martingalas M_t^z y M_t^x . También se tiene que en $\{\zeta > t\}$, $f_t = c_2 \lambda_t$ y $g_t = 1$, y por tanto, $r_t = f_t/g_t = c_2 \lambda_t$, $t \in \{\zeta > t\}$.

En este caso las condiciones de la suposición (A) también son satisfechas y por tanto el Lema 2.1, desde que $q = \inf\{r_t(\omega), 0 \leq t < \zeta, \omega \in \Omega\} = c_2 \times \inf\{\lambda_t(\omega), 0 \leq t < \zeta, \omega \in \Omega\} > -\infty$, lo cual es cierto ya que todas las realizaciones de $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ son no negativas. Por tanto K^* está acotado por,

$$k_l \frac{c_1}{\mathbb{E}[\zeta]} + c_2 \lambda_{\inf} \text{ y } k_u = \frac{c_1 + c_2}{\mathbb{E}[\zeta]} \quad (42)$$

con $\lambda_{\inf} = \inf\{\lambda_t(\omega), 0 \leq t < \zeta, \omega \in \Omega\}$.

Finalmente, para que la solución óptima en el Teorema 2.2 sea aplicable en este caso, es necesario que λ_t tenga realizaciones (k_l, k_u) -crecientes en $\{\zeta > t\}$, o bien con forma de bañera tal que $\lambda_{\inf} \leq \lambda_0 < k_l$. Entonces,

$$\rho_k = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : \lambda_t \geq \frac{k}{c_2}, k \in \mathbb{R} \right\} \wedge \zeta \Rightarrow \rho_k = T_k \wedge \zeta,$$

con $T_k = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : \lambda_t \geq \frac{k}{c_2}, k \in \mathbb{R} \right\}$, pero a diferencia del caso bajo la filtración \mathbb{G} , aquí T_k puede ser una variable aleatoria, entonces

$$K^* = \inf \{ k \in \mathbb{R} : k \mathbb{E}[X_{\rho_k}] - \mathbb{E}[Z_{\rho_k}] \geq 0 \} = \inf \left\{ k \in \mathbb{R} : \mathbb{E} \left[\int_0^{T_k} 1_{\{\zeta > s\}} (k - c_2 \lambda_s) ds \right] \geq c_1 \right\}, \text{ y}$$

$$\rho_{k^*} = T_{k^*} \wedge \zeta.$$

4. BURN-IN ÓPTIMO

Burn-in es un procedimiento usado en algunos procesos de fabricación con el fin de eliminar ítems defectuosos (sistemas o componentes) con tiempos de vida menores a un tiempo mínimo esperado, con el fin de asegurar que sólo sean puestos en operación aquellos que cumplan con la calidad y la confiabilidad deseadas. Con este objetivo, durante el período de *burn-in*, los ítems son sometidos a pruebas que simulan condiciones de uso típicas o adversas. Aquellos que sobreviven a tal período son luego puestos en servicio, vendidos o sometidos a pruebas adicionales.

Una revisión sobre los antecedentes clásicos relativos al *burn-in* es presentada en Jensen & Petersen (1982) y Kuo & Kuo (1983). Según Block & Savits (1997), como principio básico en el uso de este procedimiento, se recomienda su aplicación cuando el tiempo de vida de los ítems puede ser modelado como una mezcla de funciones de distribución de probabilidad, al considerar la existencia de dos tipos de ítems dentro de una población, clasificados de acuerdo a su confiabilidad y calidad: aquellos que son débiles y aquellos que son fuertes. Se asume que el tiempo de vida de un sistema también tiene este comportamiento dicotómico, de tal forma que la sub población de defectuosos presenta una *mortalidad infantil*, es decir, una tasa de falla inicial alta. Así, un procedimiento de *burn-in* es efectivo cuando el tiempo de vida del sistema tiene una tasa de falla inicial alta que luego decrece con el tiempo. Los sistemas que sobreviven al *burn-in* poseen la misma distribución del sistema inicial pero truncada a la izquierda, y por tanto el procedimiento elimina la parte del tiempo de vida inicial en la cual el sistema tendría una alta propensión a fallar. La clase de tiempos de vida con *forma de bañera o bathtub-shaped failure rate* satisface la anterior propiedad. Específicamente, para este tipo de distribución la tasa inicial de falla es alta (*período de mortalidad infantil*) que luego decrece hasta aproximadamente una constante (*período de vida útil*) y finalmente crece a medida que aumenta la edad del ítem (*período de desgaste*), como se ilustra en la Figura 4. Respecto a la formulación de modelos de distribuciones con tasa de falla con forma de bañera, Raharshi & Raharshi (1988) presentan una revisión y describen los métodos propuestos para la construcción de distribuciones con este tipo de tasa de falla, como por ejemplo, modelos exponenciales, polinomiales y exponenciales-polinomiales, modelos de mezclas, entre otros.

La determinación de un tiempo óptimo de *burn-in* ha sido considerada previamente en la literatura de confiabilidad usando diferentes criterios relacionados con la operación, mantenimiento o garantía del producto, por ejemplo, Cha (2000), Cha (2001), Cha (2003), Kar & Nachlas (1997), Mi (1991), Mi (1994), Mi (1997), Nguyen & Murthy (1982), Sheu & Chien (2005), Yun, Lee & Ferreira (2002), entre otros. Block & Savits (1997) examinan diferentes modelos de mezclas de distribuciones y describen varios criterios usados para determinar el tiempo óptimo de *burn-in*, los cuales son clasificados en dos grupos básicos: Aquellos basados en el desempeño sin considerar alguna estructura de costos y aquellos basados en costos. Ye, Tang, & Xie (2011) estudian la relación entre *burn-in* y el desempeño de un producto durante su período de garantía, desempeño evaluado considerando

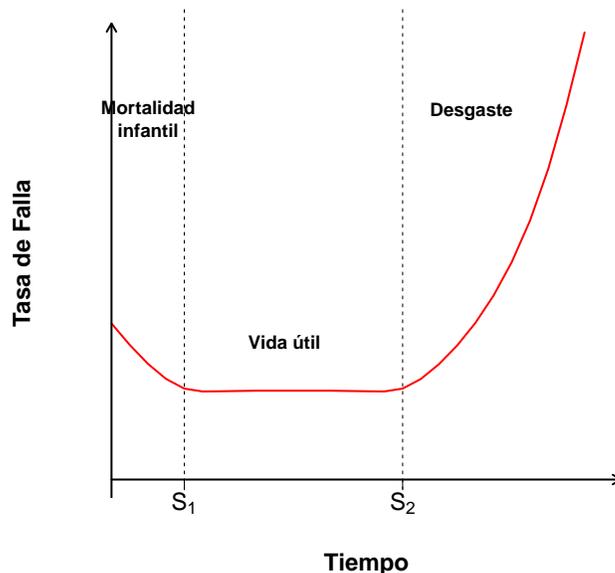


Figura 4: Ilustración de una tasa de falla con forma de bañera

indicadores tales como la probabilidad de falla, el número esperado de fallas y de la vida residual dado una proporción de fallas durante el uso en el período de garantía. Recientemente, modelos de procesos de degradación han sido incorporados en la determinación del *burn-in* óptimo en productos con alta confiabilidad, con este enfoque Feng, Peng, & Coit (2010) presentan un modelo basado en análisis de degradación para determinar conjuntamente el *burn-in* óptimo y decisiones de inspección y de mantenimiento en productos con alta confiabilidad, minimizando el costo total esperado por el tiempo de vida durante el uso del producto; Tsai, Tseng, & Balakrishnan (2011) consideran el problema del *burn-in* óptimo en productos con alta confiabilidad incorporando información sobre el proceso de degradación de una característica de calidad relacionada con el tiempo de vida del producto, proponen un proceso Gamma mixto para describir las trayectorias de degradación y mediante un modelo de costos determinan el tiempo óptimo de *burn-in*; Ye, Xi, Tang, & Shen (2012) consideran la planeación de procedimientos de *burn-in* en casos donde existe el fenómeno de riesgos competitivos de productos electrónicos con alta confiabilidad, en los que compite la falla debida a procesos de degradación considerados como un modo de mortalidad infantil y un modo de falla catastrófica, y proponen modelos de *burn-in* basados en degradación y Xiang, Coit, & Feng (2013) consideran el uso del *burn-in* en la fase de diseño y fabricación de nuevos productos o tecnologías, en las cuales la manufactura es todavía altamente variable o se encuentra en proceso de maduración y proponen un modelo que permite determinar políticas de sustitución preventiva basadas simultáneamente en *burn-in* y la edad del producto con varios componentes sujetos a degradación estocástica. Otras trabajos hallados en relación al *burn-in* y su optimización aplican enfoques ba-

yesianos, entre otros, Yuan & Kuo (2010) analizan mediante una aproximación bayesiana la tasa de falla de forma de bañera y sus puntos de cambio, y el tiempo óptimo de burn-in para aparatos electrónicos, considerando como función objetivo los costos totales esperados durante el burn-in y el período en garantía; Ulusoy, Mazzuchi, & Perlstein (2011) aplican un enfoque bayesiano para incorporar la incertidumbre en las distribuciones de tiempo de vida y por tanto en la confiabilidad y los costos asociados en la selección del tiempo de burn-in óptimo, de manera que sean minimizados los costos totales durante el período de garantía y a la vez sea maximizada la confiabilidad de los productos; Kurz, Lewitschnig, & Pilz (2014) proponen modelos de estimación bayesiana en distribuciones con tasa de falla con forma de bañera, usando datos obtenidos en procedimientos de burn-in y muestran que es posible adaptar dinámicamente el procedimiento de burn-in para mejorar su eficiencia.

Con respecto al *burn-in* de un sistema coherente, todos los trabajos previos analizan el tiempo de vida del sistema bajo la aproximación estadística. A continuación se presentan dos problemas simples de optimización clásicos en esta área pero a diferencia de la aproximación estadística, se propone una formulación y una solución bajo la aproximación física mostrando cómo la regla de parada ILA puede ser aplicada incorporando de esta forma la dinámica del tiempo.

4.1. Minimización de la probabilidad (incondicional) de falla durante un período de operación fijo después del burn-in

Siguiendo a Bueno (2007), un sistema coherente con tiempo de vida ζ es sometido a un procedimiento de *burn-in* durante un período de tiempo b . Después de este procedimiento, el sistema es puesto en operación por un período adicional (fijo) τ . Se quiere hallar b que minimiza a $E[Z_b^T] = P(b < \zeta \leq b + \tau)$, donde el proceso Z_b^T es dado por,

$$Z_b^T = 1_{\{b < \zeta \leq b + \tau\}} = 1_{\{\zeta \leq b + \tau\}} - 1_{\{\zeta \leq b\}}. \quad (43)$$

Para ello, asumiendo que ζ es un tiempo de parada totalmente inaccesible, se usa la representación SSM. De (4), se obtiene,

$$Z_b^T = Z_0^T - \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s + \tau\}} \lambda_{s + \tau}] ds + M_b^T, \quad (44)$$

donde $Z_0^T = 1_{\{\zeta \leq \tau\}} = \int_0^\tau 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_\tau$ y el proceso $M_b^T = M_{b + \tau} - M_\tau - M_b$ es una martingala de media cero, uniformemente integrable. Por tanto,

$$E[Z_b^T] = E[Z_0^T] - E\left\{ \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s + \tau\}} \lambda_{s + \tau}] ds \right\}. \quad (45)$$

Luego, para τ fijo, b que minimiza $E[Z_b^T]$ es el mismo b que maximiza a,

$$K(\tau, b) = E\left\{\int_0^b [1_{\{\zeta > s\}}\lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}}\lambda_{s+\tau}] ds\right\}.$$

Si se considera el proceso $\tilde{Z}_b^\tau = -Z_b^\tau$, el problema inicial de minimización de $E[Z_b^\tau]$ puede ser redefinido como el problema de maximización de $E[\tilde{Z}_b^\tau]$. En particular, se busca un \mathbb{F} -tiempo de parada B^* en la clase $C_\zeta^{b, \mathbb{F}}$ de \mathbb{F} -tiempos de parada,

$$C_\zeta^{b, \mathbb{F}} = \left\{B \geq 0 : B \text{ es un } \mathbb{F}\text{-tiempo de parada, } B + \tau \leq \zeta, E[\zeta] < \infty, E[B] < \infty\right\}, \quad (46)$$

tal que

$$K(\tau, B^*) = \sup\{K(\tau, B) : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}\}. \quad (47)$$

Desde que sólo son considerados los tiempos de parada $B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}$, se tiene que $\zeta > B + \tau$, y por tanto, $\zeta > B$. Luego,

$$K(\tau, B^*) = \sup\left\{E\left[\int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}\right\}. \quad (48)$$

Para resolver este problema se asume que el proceso de intensidad de falla del sistema $(\lambda_t)_{t \geq 0}$, tiene (P-c.s) *forma de bañera*, para lo cual se propone la siguiente definición y el Teorema 4.1.

Definición 4.1. Un proceso $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ \mathbb{F} -progresivamente medible es un *proceso de intensidad con forma de bañera* (P-c.s) si existen \mathbb{F} -tiempos de parada S_1 y S_2 tales que λ_t es decreciente si $0 \leq t \leq S_1$, λ_t es aproximadamente constante si $S_1 \leq t \leq S_2$, y λ_t es creciente si $t \geq S_2$. Los tiempos de parada S_1 y S_2 son llamados tiempos de cambio de λ_t .

Teorema 4.1. Suponga que el proceso de intensidad de falla del sistema $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tiene forma de bañera con tiempos de cambio $0 \leq S_1 \leq S_2$ y $\lambda_0 < \lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$. Entonces, el tiempo óptimo de burn-in $B^* \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}$ que maximiza a $K(\tau, B)$ es tal que,

$$i. B^* = \inf\left\{B : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\right\} \text{ y,}$$

$$ii. B^* \leq S_1.$$

Nota 4.1. En este problema se considera el proceso $f_t = \lambda_t - \lambda_{t+\tau}$ en $\{\zeta > t + \tau\}$, sobre el cual es necesario mostrar que el caso monótono se cumple para que bajo el Teorema 2.1 la regla ILA produzca la solución óptima enunciada en el Teorema 4.1. Ver prueba en el Apéndice 6.

4.2. Maximización de la utilidad unitaria por operación sin falla durante un período fijo

Suponga ahora que un sistema coherente con tiempo de vida ζ es sometido a un procedimiento de burn-in durante un tiempo b . El sistema que no sobrevive al burn-in es desechado y produce un costo C_0 , mientras que el sistema que sobrevive al burn-in es colocado en operación por un período

adicional τ y si la unidad falla durante este lapso, ésta es desechada a un costo $C > C_0$. Finalmente, si el sistema sobrevive $b + \tau$ unidades de tiempo entonces hay una ganancia de K . El objetivo es hallar el tiempo de burn-in que maximice la utilidad esperada por unidad, es decir, a $G(\tau, b)$,

$$\begin{aligned} G(\tau, b) &= K P(\zeta > b + \tau) - C_0 P(\zeta \leq b) - C P(b < \zeta \leq b + \tau) \\ &= K + (C - C_0)P(\zeta \leq b) - (C + K)P(\zeta \leq b + \tau). \end{aligned} \quad (49)$$

Sea Z_b^τ el proceso dado por,

$$Z_b^\tau = K + (C - C_0)1_{\{\zeta \leq b\}} - (C + K)1_{\{\zeta \leq b + \tau\}}. \quad (50)$$

Observe que $E[Z_b^\tau] = G(\tau, b)$. Definimos el problema de optimización como hallar el \mathbb{F} -tiempo de parada $\tilde{B}^* \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}$ que maximice $E[Z_B^\tau]$, es decir,

$$E[Z_{\tilde{B}^*}^\tau] = G(\tau, \tilde{B}^*) = \sup \left\{ G(\tau, B) : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}} \right\}. \quad (51)$$

Suponiendo que ζ es un \mathbb{F} -tiempo de parada totalmente inaccesible, la representación SSM de Z_B^τ es,

$$Z_B^\tau = Z_0^\tau + \int_0^B [1_{\{\zeta > s\}}(C - C_0)\lambda_s - 1_{\{\zeta > s + \tau\}}(C + K)\lambda_{s + \tau}] ds + R_B^\tau, \quad R_B^\tau \in \mathcal{M}_0^2, \quad (52)$$

con $Z_0^\tau = K - (C + K)1_{\{\zeta \leq \tau\}}$ y $R_B^\tau = (C - C_0)M_B + (C + K)(M_\tau - M_{B + \tau})$.

Luego,

$$E[Z_B^\tau] = E[Z_0^\tau] + E \left\{ \int_0^B [1_{\{\zeta > s\}}(C - C_0)\lambda_s - 1_{\{\zeta > s + \tau\}}(C + K)\lambda_{s + \tau}] ds \right\}. \quad (53)$$

Desde que sólo consideramos tiempos de parada $B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}$, se tiene que $\zeta > B + \tau$ y por tanto $\zeta > B$. Así

$$\begin{aligned} E[Z_{\tilde{B}^*}^\tau] &= G(\tau, \tilde{B}^*) = \sup \left\{ E[Z_0^\tau] + E \left\{ \int_0^B [(C - C_0)\lambda_s - (C + K)\lambda_{s + \tau}] ds \right\} : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}} \right\} \\ &= \sup \left\{ E[Z_0^\tau] + (C + K) \cdot E \left\{ \int_0^B [\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s + \tau}] ds \right\} : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}} \right\}, \\ &\text{donde } \tilde{\lambda}_s = \left(\frac{C - C_0}{C + K} \right) \lambda_s. \end{aligned} \quad (54)$$

Observe que el tiempo de parada $B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}$ que maximiza $E[Z_B^\tau]$ es el mismo que maximiza $H(\tau, B) = E \left\{ \int_0^B [\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s + \tau}] ds \right\}$, es decir,

$$H(\tau, \tilde{B}^*) = \sup \{ H(\tau, B) : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}} \}. \quad (55)$$

Luego, para la aplicación de la regla ILA consideramos el proceso $f_s = \tilde{\lambda}_s - \lambda_{s + \tau}$ en $\{\zeta > B + \tau\}$, para $s \leq B$. Note que,

$$\{f_s \leq 0\} \iff \left\{ \left(\frac{C - C_0}{C + K} \right) \lambda_s \leq \lambda_{s + \tau} \right\}, \text{ con } 0 < \left(\frac{C - C_0}{C + K} \right) < 1. \quad (56)$$

Teorema 4.2. Bajo las condiciones dadas en el Teorema 4.1,

$$i. \tilde{B}^* = \inf\{B : B \in C_{\zeta}^{b,\mathbb{F}}, \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}, \text{ donde } \tilde{\lambda}_B = \left(\frac{C-C_0}{C+K}\right)\lambda_B,$$

$$ii. \tilde{B}^* \leq B^* = \inf\{B : B \in C_{\zeta}^{\mathbb{F}}, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\} \leq S_1.$$

Nota 4.2. En este problema es necesario mostrar que el proceso $f_t = \tilde{\lambda}_t - \lambda_{t+\tau}$ en $\{\zeta > t + \tau\}$ satisface el caso monótono, de modo que bajo el Teorema 2.1 la regla ILA produzca la solución óptima enunciada en el Teorema 4.2. Ver prueba en el Apéndice 6.

4.3. Ejemplo

Sea ζ el tiempo de vida de un sistema coherente de dos componentes en paralelo, esto es, $\zeta = T_1 \vee T_2$, y los tiempos de vida de estas componentes dados por $T_1 = Z_1 \wedge Z_{1,2}$, $T_2 = Z_2 \wedge Z_{1,2}$, donde Z_1 , Z_2 , $Z_{1,2}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de tasa de falla $r(t) = e^{-t} + 0,1t$, $t \geq 0$, la cual tiene forma de bañera con un único punto de cambio en $t_{\min} = 2,30$ y $r(0) = 1 < r(\infty) = +\infty$. Luego, en $\{\zeta > t\}$, el \mathbb{F} -proceso de intensidad de falla de ζ es dado por $\lambda_t = r(t) + r(t)1_{\{T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2\}}$, es decir,

$$\lambda_t = \begin{cases} r(t), & \text{si } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ 2r(t), & \text{si } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (57)$$

Por tanto, el proceso de intensidad de falla λ_t tiene un único tiempo de cambio $S_1 = S_2 = t_{\min}$, y $\lambda_0 < \lambda_{\infty} = +\infty$. Una ilustración del proceso λ_t en $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ y en $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$, es presentada en las Figuras 5(a) y 5(b), respectivamente.

Suponga que este sistema es sometido al procedimiento de burn-in descrito en 4.2, con constantes de costos $C = 10$, $C_0 = 2$ y $K = 5,2$ y que el periodo de operación es fijado en $\tau = 1$.

Sean $\tilde{r}(t) = \left(\frac{C-C_0}{C+K}\right)r(t)$ y $\tilde{\lambda}_t = \left(\frac{C-C_0}{C+K}\right)\lambda_t$. Es necesario considerar los casos siguientes para hallar la solución óptima:

(a) En $\{B \in C_{\zeta}^{b,\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 \leq B\}$: En este caso se debe resolver $2\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$, o equivalentemente, $\tilde{r}(B) = r(B + \tau)$.

(b) En $\{B \in C_{\zeta}^{b,\mathbb{F}} : B < T_1 \wedge T_2 \leq B + \tau\}$: En este caso se tiene que resolver $\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$.

(c) En $\{B \in C_{\zeta}^{b,\mathbb{F}} : T_1 \wedge T_2 > B + \tau\}$: Aquí se resuelve la ecuación $\tilde{r}(B) = r(B + \tau)$.

Para la ecuación $\tilde{r}(B) = r(B + \tau)$ la solución es $\tilde{B}^* = 0,319$, mientras que la ecuación $\tilde{r}(B) = 2r(B + \tau)$ no tiene solución, pues $\forall t \geq 0$, $\tilde{r}(t) - 2r(t + 1) < 0$, como muestra la Figura 6.

La interpretación de estos resultados es como sigue: Si al iniciar el sistema (en $t = 0$), sólo uno de las componentes funciona, el sistema debe ser sometido a *burn-in* hasta $\tilde{B}^* = 0,319$. Si en $t = 0$ ambas

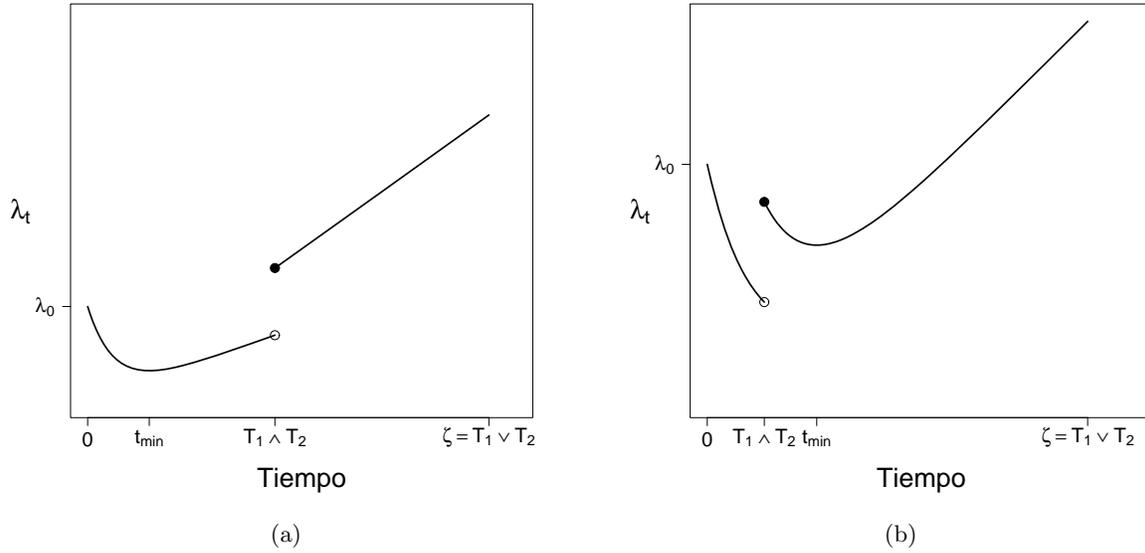


Figura 5: (a) λ_t en $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$; (b) λ_t en $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$.

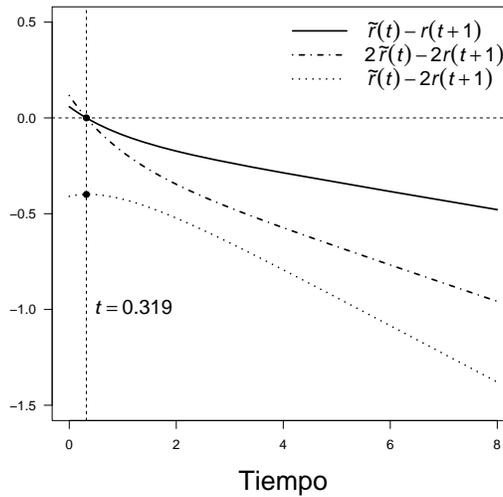


Figura 6: Funciones para análisis de las soluciones en el Ejemplo 4.3

componentes funcionan, es necesario decidir si se hace o no el *burn-in*. Según el análisis anterior, $\tilde{B}^* = 0,319$ es óptimo si ocurre el evento $A = \{T_1 \wedge T_2 \leq 0,319\} \cup \{T_1 \wedge T_2 > 1,319\}$. Pero no es posible saber con certeza si tal evento va a ser observado. Sin embargo, si la probabilidad de A es mayor que la probabilidad de $\bar{A} = \{0,319 < T_1 \wedge T_2 \leq 1,319\}$, entonces someter al sistema a *burn-in* aún cuando para algunas unidades sea observado el evento \bar{A} .

5. PERÍODO ÓPTIMO DE GARANTÍA

Muchos productos, reparables o no reparables, son vendidos mediante alguna póliza o contrato de garantía. Blischke & Murthy (1994) definen garantía como una obligación contractual mediante la cual un fabricante, en conexión con la venta de su producto, se compromete a asegurar su funcionamiento apropiado durante un período de tiempo llamado el período de garantía.

Entre las políticas de garantía más comunes se encuentran las de tipo reparación-sustitución gratis (FRW) y las de tipo pro-rata (PRW). En el primer caso, el fabricante se compromete durante el período de garantía a reparar o sustituir el producto asumiendo cualquier costo derivado de este servicio. En el segundo caso, el fabricante se compromete a devolver una fracción del precio de venta del producto cuando suceda una falla durante el período de garantía y en general se ofrece para productos no reparables. Las políticas tipo FRW también se subdividen en dos grandes categorías: con renovación y sin renovación. Estas dos clases se diferencian en que en el primer caso, cuando el producto sufre una falla catastrófica, éste es sustituido por uno nuevo y se expide una nueva garantía, mientras que en el segundo caso, la sustitución del producto que falla no altera el plazo original de la garantía. Diferentes asuntos relacionados a las políticas de garantía y sus costos son tratados extensamente en Murthy (1990), Blischke & Murthy (1992*a*), Blischke & Murthy (1992*b*), Blischke & Murthy (1992*c*), Blischke & Murthy (1994) y Blischke & Murthy (1996), entre otros.

Aunque las garantías constituyen una estrategia competitiva en el mercado, también pueden llegar a representar una suma importante de los costos totales del fabricante, y por tanto, es necesario minimizar los costos derivados de este servicio. Ja, Kulkarni, Mitra & Patankar (2001) consideran el problema de la estimación de los costos y de las reservas de garantía durante el ciclo de vida de un producto reparado mínimamente y bajo una política de garantía sin renovación, en la cual los costos de los reparos dependen de la edad del producto, e indican cómo usar la información de los costos de garantía para determinar el período de garantía; Kim, Djameludin & Murthy (2001) estudian modelos para el análisis del costo esperado de garantía bajo una política FRW para productos con intensidad o tasa de falla dependiente del uso; Bai & Pham (2004) discuten el problema de la estimación y la predicción de los costos de garantía descontados, usando políticas FRW y PRW, para sistemas en serie reparados mínimamente, y aplican sus resultados en la determinación del período de garantía y de las reservas para el servicio usando el Teorema de Límite Central. Chien (2005) considera el problema de la determinación del período óptimo de garantía y de la edad de sustitución del producto después del vencimiento de la garantía, según las perspectivas del vendedor y del comprador, respectivamente, que minimizan las funciones de costos correspondientes, considerando el modelo denominado de falla general.

Block, Borges & Savits (1985) describen el modelo de falla general. En este modelo el proceso de

falla de un ítem presenta dos posibles tipos de falla a la edad t : falla de tipo I, reparable mínimamente, es decir, la tasa de falla del ítem es restaurada a su condición inmediatamente anterior a la falla y ocurre con una probabilidad de $1 - p(t)$, o falla de tipo II, la cual es catastrófica y por tanto no reparable, y ocurre con probabilidad $p(t)$. Los procesos de conteo asociados a estos dos tipos de falla son procesos de Poisson no homogéneos con tasas de falla determinísticas dadas por $\lambda^I(t) = (1 - p(t))r(t)$ y $\lambda^{II}(t) = p(t)r(t)$, respectivamente, donde $p(t) \in [0, 1]$ y $r(t)$ es la función de tasa de falla general del ítem.

Al igual que en los problemas ya citados relativos a mantenimiento y burn-in, los trabajos previos en políticas de garantía analizan el tiempo de vida de un sistema ζ bajo la *aproximación estadística o de caja negra*. A continuación, se formula y se propone una aproximación física para un sistema coherente sometido a fallas de tipo I y II y observado a nivel de sus m componentes, a través de la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, la cual es redefinida de la siguiente manera,

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, V_s, 0 \leq s \leq t \right\}, \quad (58)$$

donde T_i , $i = 1, \dots, m$, los tiempos de vida de los componentes, respectivamente, definidos en un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) , junto con la marca $V_t \in \{1, 2\}$, indicando para una falla del sistema en t : falla de tipo I o falla de tipo II, respectivamente. Suponemos que los procesos de intensidad para las fallas de tipo I y II, $(\lambda_t^I)_{t \geq 0}$ y $(\lambda_t^{II})_{t \geq 0}$, son procesos estocásticos \mathbb{F} -medibles. Llamaremos proceso de falla general al proceso de falla del sistema coherente bajo la filtración \mathbb{F} .

5.1. Costo de garantía bajo el proceso de falla general

Sea un sistema coherente con tiempo de vida ζ , compuesto de m componentes, con tiempos de vida T_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

Definición 5.1. Proceso de falla general para un sistema coherente. Sea ζ el tiempo de vida de un sistema coherente, un tiempo de parada totalmente inaccesible con proceso de intensidad de falla $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ y tal que:

- En un instante $t > 0$, uno de dos tipos de falla puede ser observado: falla de tipo I o falla de tipo II.
- El sistema es observado bajo la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ dada en (58).
- Existe un \mathbb{F} -tiempo de parada finito totalmente inaccesible $\zeta^{II} = \inf\{t \geq 0 : V_t = 2\}$, el tiempo de la primera falla de tipo II.
- Existen $(\lambda_t^I)_{t \geq 0}$ y $(\lambda_t^{II})_{t \geq 0}$, procesos no negativos, \mathbb{F} -progresivamente medibles, tales que

$$E \left[\int_0^t \lambda_s^I ds \right] < \infty, \quad E \left[\int_0^t \lambda_s^{II} ds \right] < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty, \quad y \quad (59)$$

$$\lambda_t = 1_{\{V_t=1\}}\lambda_t + 1_{\{V_t=2\}}\lambda_t = \lambda_t^I + \lambda_t^{II}, \quad \forall t \geq 0. \quad (60)$$

Bajo la definición anterior, se asume que el proceso de conteo del número de fallas del sistema en $[0, t]$ es dado por

$$\tilde{N}_t = \int_0^t \lambda_s ds + \tilde{M}_t, \quad \tilde{M}_t \in \mathcal{M}_0^2,$$

el cual descompone en $\tilde{N}_t = \tilde{N}_t^I + \tilde{N}_t^{II}$, con,

$$\tilde{N}_t^I = \int_0^t \lambda_s^I ds + \tilde{M}_t^I, \quad \tilde{M}_t^I \in \mathcal{M}_0^2, \quad \tilde{N}_t^{II} = \int_0^t \lambda_s^{II} ds + \tilde{M}_t^{II}, \quad \tilde{M}_t^{II} \in \mathcal{M}_0^2, \quad (61)$$

Donde los procesos \tilde{N}_t^I y \tilde{N}_t^{II} no tienen saltos simultáneos, es decir, en un instante t , sólo uno de los dos tipos de falla puede ser observado.

Los procesos \tilde{N}^I y \tilde{N}^{II} parados en ζ^{II} , son dados, respectivamente, por [ver Aven & Jensen (2013, Teorema A.48)],

$$\tilde{N}_{t \wedge \zeta^{II}}^I = \int_0^t 1_{\{\zeta^{II} > s\}} \lambda_s^I ds + \tilde{M}_{t \wedge \zeta^{II}}^I, \quad (62)$$

$$1_{\{\zeta^{II} \leq t\}} = \tilde{N}_{t \wedge \zeta^{II}}^{II} = \int_0^t 1_{\{\zeta^{II} > s\}} \lambda_s^{II} ds + \tilde{M}_{t \wedge \zeta^{II}}^{II}, \quad (63)$$

con $\tilde{M}_{t \wedge \zeta^{II}}^I$ y $\tilde{M}_{t \wedge \zeta^{II}}^{II}$ \mathbb{F} -martingalas uniformemente integrables de media cero. En nuestro contexto, con $t = w$, $\tilde{N}_{t \wedge \zeta^{II}}^I$ representa el número de fallas tipo I, y por tanto, de reparos mínimos, realizados hasta el vencimiento de la garantía, mientras que $1_{\{\zeta^{II} \leq t\}}$ es el proceso de conteo simple hasta la primera falla de tipo II observada durante el período de garantía.

Definición 5.2. Proceso de costo de garantía bajo el proceso de falla general. Bajo la Definición 5.1 considere el siguiente proceso. Las fallas de tipo I son reparadas mínimamente hasta el período de garantía w o hasta la primera falla de tipo II, lo que ocurra primero, a un costo para el fabricante de C^I . Una falla de tipo II (catastrófica) a la edad $\zeta^{II} \leq w$ produce el término de la garantía y un costo para el fabricante de C^{II} , $C^{II} > C^I$. Además de los costos por reparación o falla en el período de garantía, cada unidad vendida bajo este servicio genera un costo adicional de C_0 , $C_0 < C^I$. Entonces el proceso del costo unitario de garantía bajo el proceso de falla general, es dado por

$$Z_w^g = C_0 + C^I \tilde{N}_{w \wedge \zeta^{II}}^I + C^{II} 1_{\{\zeta^{II} \leq w\}}. \quad (64)$$

Bajo las condiciones dadas en la Definición 5.1 y por las ecuaciones (62), (63) y (64), el proceso Z_w^g tiene la siguiente representación SSM,

$$Z_w^g = C_0 + \int_0^w 1_{\{\zeta^{II} > s\}} (C^I \lambda_s^I + C^{II} \lambda_s^{II}) ds + M_w, \quad M_w \in \mathcal{M}_0^2, \quad (65)$$

donde $M_w = C^I \tilde{M}_{w \wedge \zeta^{II}}^I + C^{II} \tilde{M}_{w \wedge \zeta^{II}}^{II}$ es una martingala de media cero uniformemente integrable, y $E\left[\int_0^w (C^I \lambda_s^I + C^{II} \lambda_s^{II}) ds\right] < \infty, \forall 0 \leq w < \infty$.

Por otra parte, el ciclo de garantía durante el cual es observado el proceso de costo es dado por X_w^g ,

$$X_w^g = w \wedge \zeta^{II} = \int_0^w 1_{\{\zeta^{II} > s\}} ds, \quad \text{c.s.}, \quad (66)$$

tal que $E[X_w^g] = \int_0^w P(\zeta^{II} > s) ds < \infty, \forall w \geq 0$.

5.2. El problema de optimización

El objetivo es hallar el período de garantía $w \in \{\zeta^{II} > w\}$, que minimice el costo unitario de garantía esperado por unidad de tiempo, es decir, que minimice a la función $K^g(w) = E[Z_w^g]/E[X_w^g]$,

$$K^g(w) = \frac{C_0 + E\left[\int_0^w 1_{\{\zeta^{II} > s\}} (C^I \lambda_s^I + C^{II} \lambda_s^{II}) ds\right]}{E\left[\int_0^w 1_{\{\zeta^{II} > s\}} ds\right]}. \quad (67)$$

5.3. Tiempo óptimo de garantía basado en una regla de parada óptima

Considere los procesos Z_w^g y X_w^g y la función de costo unitario esperado por unidad de tiempo $K^g(w) = E[Z_w^g]/E[X_w^g]$. Se desea hallar inicialmente un \mathbb{F} -tiempo de parada \mathscr{W}^* en la clase de tiempos de parada,

$$C_{\zeta^{II}}^{g, \mathbb{F}} = \left\{ W : W \text{ es } \mathbb{F}\text{-tiempo de parada, } W \leq \zeta^{II}, E[\zeta^{II}] < \infty, E[X_W^g] < \infty \right\}, \quad (68)$$

tal que

$$K_{\text{optim}}^g = K^g(\mathscr{W}^*) = \inf\{K^g(W) : W \in C_{\zeta^{II}}^{g, \mathbb{F}}\}. \quad (69)$$

Para aplicar el Teorema 2.2 en este caso, definimos el proceso

$$r_t^g = C^I \lambda_t^I + C^{II} \lambda_t^{II}, \quad t \in [0, \zeta^{II}), \quad (70)$$

para el cual se tiene

$$r_{\text{inf}}^g = \inf\left\{r_t^g(\omega), 0 \leq t < \zeta^{II}(\omega), \omega \in \Omega\right\}. \quad (71)$$

Sean $f_t = (C^I \lambda_t^I + C^{II} \lambda_t^{II})$ y $g_t = 1$ en $\{\zeta^{II} > t\}$. Entonces en $\{\zeta^{II} > t\}$, $r_t^g = f_t/g_t = C^I \lambda_t^I + C^{II} \lambda_t^{II}$. Luego, por el Lema 2.1 y el Teorema 2.2, usando en lugar de ζ a ζ^{II} , $X = X^g$, $Z = Z^g$ y $K = K^g(w)$, desde que la martingala M en (65) es uniformemente integrable y

$$E[Z_0^g - r_{\text{inf}}^g \cdot X_0^g] = E[C_0^g - r_{\text{inf}}^g \cdot 0] = C_0 > 0,$$

entonces K_{optim}^g es acotado por las cantidades k_l^g y k_u^g , tal que $k_l^g \leq K_{\text{optim}}^g \leq k_u^g$, donde,

$$k_u^g = K^g(\zeta^{\text{II}}) = \frac{C_0 + C^{\text{II}} + C^{\text{I}} E\left[\int_0^{\zeta^{\text{II}}} \lambda_s^{\text{I}} ds\right]}{E[\zeta^{\text{II}}]}, \quad y$$

$$0 \leq k_l^g = \frac{C_0}{E[\zeta^{\text{II}}]} + r_{\text{inf}}^g. \quad (72)$$

En este caso se define

$$\rho_x = \inf\{w \geq 0 : x - r_w^g \leq 0\} \wedge \zeta^{\text{II}} = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} \wedge \zeta^{\text{II}} = w_x \wedge \zeta^{\text{II}}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \quad (73)$$

Proposición 5.1. (González, 2009). Sea el proceso r_t^g en (70) y los límites k_l^g y k_u^g en (72). Suponga que r_t^g es (k_l^g, k_u^g) -creciente P-c.s. en $\{t < \zeta^{\text{II}}\}$, es decir,

$$\forall t \in \{t < \zeta^{\text{II}}\} \text{ y } h \geq 0, \quad r_t^g \geq k_l^g \quad \text{implica} \quad r_{t+h}^g \geq r_t^g \wedge k_u^g. \quad (74)$$

Entonces, el tiempo de parada óptimo $\mathscr{W}^* \in C_{\zeta^{\text{II}}}^{g, \mathbb{F}}$ que minimiza a $K^g(W)$, es tal que

$$\mathscr{W}^* = w_{x_{\text{inf}}} \wedge \zeta^{\text{II}}, \quad \text{con} \quad w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} \quad (75)$$

y

$$x_{\text{inf}} = K_{\text{optim}}^g = \inf\left\{x \geq 0 : E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}} (x - r_s^g) ds\right] \geq C_0\right\} \quad (76)$$

\mathscr{W}^* obtenido en la Proposición 5.1 puede resultar aleatorio, sin embargo en la práctica es necesario fijar el período de garantía bien sea en términos de tiempo o intensidad de uso del producto. En el siguiente ejemplo ilustramos cómo podemos hacer uso de \mathscr{W}^* para encontrar un w fijo apropiado.

5.4. Ejemplo

Considere un sistema coherente de tres componentes con tiempos de vida T_i , $i = 1, 2, 3$, variables aleatorias iid con tasa de falla ordinaria $r(t) = t+0,1$, $\forall t \geq 0$. Suponga que la estructura del sistema es como se ilustra en la Figura 7. Sea $\zeta = (T_1 \vee T_2) \wedge T_3$ el tiempo de vida del sistema; entonces el proceso de intensidad de falla del sistema, en $\{\zeta > t\}$, corresponde a

$$\lambda_t = r(t) + r(t) \left[1_{\{T_1 \leq t\}} + 1_{\{T_2 \leq t\}}\right]. \quad (77)$$

Suponga que una falla de tipo I ocurre cuando falla el subsistema formado por las componentes 1 y 2 mientras que una falla de tipo II ocurre cuando falla la componente 3, entonces el tiempo hasta la primera falla de tipo II es $\zeta^{\text{II}} = T_3$, con \mathbb{F} -intensidad de falla $\lambda_t^{\text{II}} = r(t)$ y función de supervivencia $\bar{F}_{\zeta^{\text{II}}}(t) = \exp\{-\int_0^t r(s) ds\}$, $\forall t \geq 0$, mientras que el \mathbb{F} -proceso de intensidad para los reparos mínimos debidos a las fallas de tipo I es $\lambda_t^{\text{I}} = r(t) \left[1_{\{T_1 \leq t\}} + 1_{\{T_2 \leq t\}}\right]$. Luego,

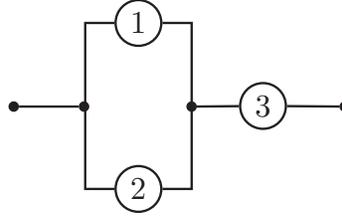


Figura 7: Estructura supuesta del sistema coherente formado por tres componentes

$$r_t^g = \begin{cases} C^{\text{II}} \cdot r(t) & \text{si } t < T_1 \wedge T_2 \\ (C^{\text{I}} + C^{\text{II}})r(t) & \text{si } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (78)$$

Suponga además que las constantes de costos son $C_0 = 2$, $C^{\text{I}} = 5$ y $C^{\text{II}} = 10$. En este caso, el proceso r_t^g de este sistema, es creciente P-q.c. para todo $t \geq 0$, con $r_{\text{inf}}^g = r_0^g = 1$. Sea $r_1(w) = C^{\text{II}} \cdot r(w) = 10w + 1$, entonces,

$$W_x^1 = \inf\{w \geq 0 : r_1(w) \geq x, x \geq 0\} = \begin{cases} 0,1x - 0,1 & \text{si } 0,1x - 0,1 \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sea también $r_2(w) = (C^{\text{I}} + C^{\text{II}})r(w) = 15w + 1,5$, entonces,

$$W_x^2 = \inf\{w \geq 0 : r_2(w) \geq x, x \geq 0\} = \begin{cases} \frac{1}{15}x - 0,1 & \text{si } \frac{1}{15}x - 0,1 \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Note que $\forall x \geq 0$, $W_x^1 \geq W_x^2$. Los límites k_l^g e k_u^g definidos en (72) corresponden a 2.725 e 14.665 respectivamente. La Figura 8(a) presenta la función $K^g(w)$, con los límites k_l^g e k_u^g , en la cual observamos que $K^g(w)$ alcanza un mínimo de 7.919 en $w_{\text{otim}} = 0,564$.

Para hallar el tiempo ρ_x definido en (73), considere las Figuras 8(b) a 8(d). Tenemos que

- Si $T_1 \wedge T_2 > W_x^1$ (ver Figura 8(b)), entonces $w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} = W_x^1$.
- Si $T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2$ (ver Figura 8(c)), $w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} = W_x^2$.
- Si $W_x^2 < T_1 \wedge T_2 \leq W_x^1$ (ver Figura 8(d)), entonces $w_x = \inf\{w \geq 0 : r_w^g \geq x\} = T_1 \wedge T_2$.

Resumiendo, $w_x = W_x^1 \wedge [W_x^2 \vee (T_1 \wedge T_2)]$, y por tanto,

$$\rho_x = W_x^1 \wedge [W_x^2 \vee (T_1 \wedge T_2)] \wedge T_3.$$

Para hallar x_{inf} en (76), calculamos $E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{C^{\text{II}} > s\}}(x - r_s^g) ds\right]$,

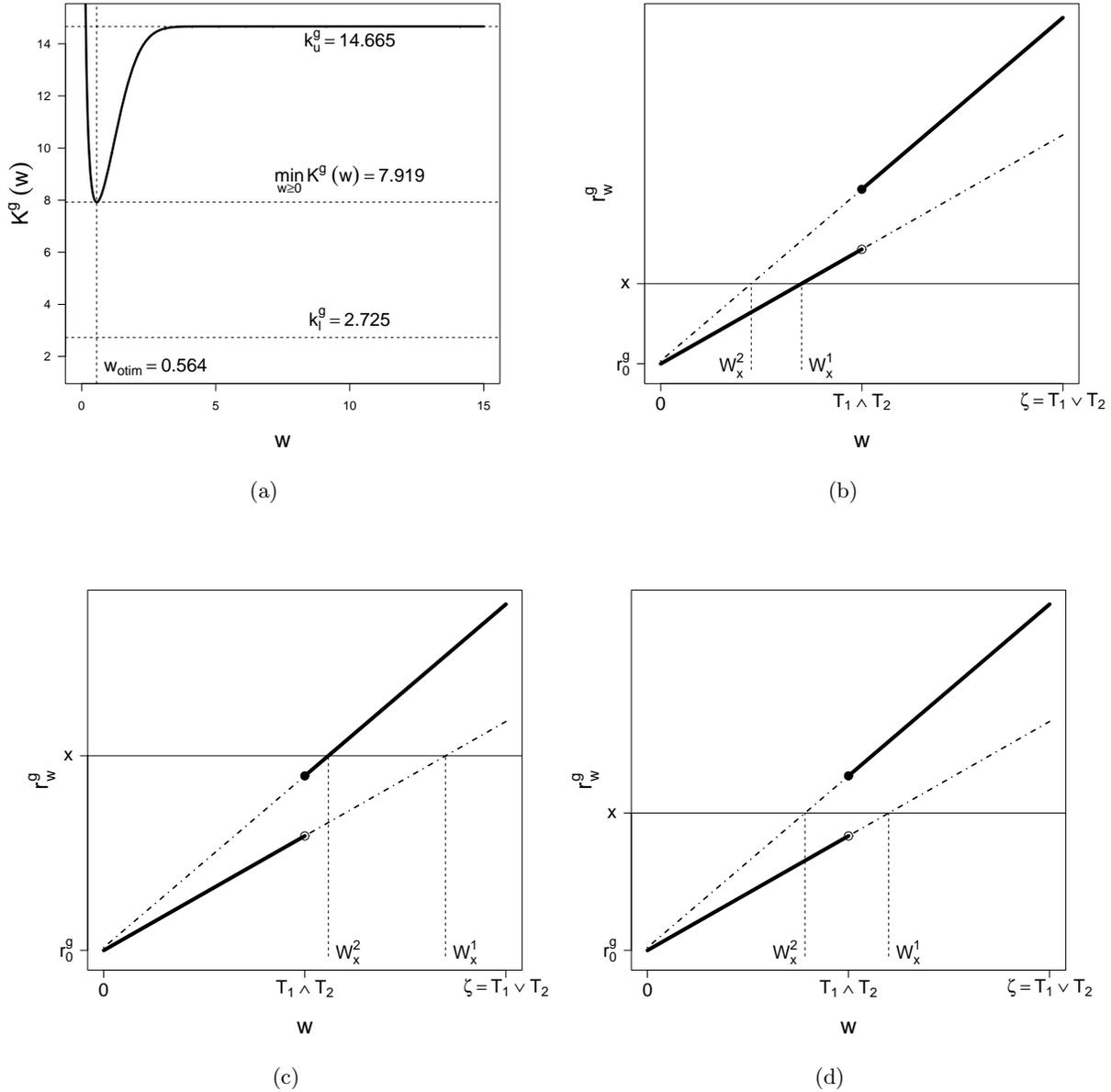


Figura 8: (a) Función $K^g(w)$ y límites k_l^g y k_u^g ; (b) w_x en $T_1 \wedge T_2 > W_x^1$; (c) w_x en $T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2$ y (d) w_x en $W_x^2 < T_1 \wedge T_2 \leq W_x^1$.

$$E\left[\int_0^{w_x} 1_{\{\zeta^{\text{II}} > s\}}(x - r_s^g) ds\right] =$$

$$P(T_1 \wedge T_2 \leq W_x^2) \left[\int_0^{W_x^2} P(T_3 > s) (x - r(s)) [C^{g, \text{I}}(P(T_1 \leq s) + P(T_2 \leq s)) + C^{g, \text{II}}] ds \right]$$

$$+ P(T_1 \wedge T_2 > W_x^2) \left[\int_0^{W_x^1} P(T_3 > s) P(T_1 > s) P(T_2 > s) (x - C^{g, \Pi} r(s)) ds \right].$$

Hallamos la solución para (76), para $x \in [k_l^g, k_u^g]$ y obtenemos $x_{\text{inf}} = 7,92$, esto es, el mínimo indicado en la Figura 8(a). Para este valor tenemos que $W_{x_{\text{inf}}}^1 = 0,692$ con $K^g(W_{x_{\text{inf}}}^1) = 8,082$ y $P(T_1 \wedge T_2 > W_{x_{\text{inf}}}^1) = 0,539$, en cuanto que $W_{x_{\text{inf}}}^2 = 0,428$ con $K^g(W_{x_{\text{inf}}}^2) = 8,204$ y $P(T_1 \wedge T_2 \leq W_{x_{\text{inf}}}^2) = 0,236$. Por tanto concluimos que el valor fijo w que buscamos no debe ser menor que 0.428 ni mayor que 0.692 pues fuera de ese intervalo la función $K^g(w)$ es mayor que 7.92 y/o con una alta probabilidad de observar fallas de tipo I. Además, note que $w_{\text{otim}} = 0,564 \in [W_{x_{\text{inf}}}^2, W_{x_{\text{inf}}}^1]$ y $(W_{x_{\text{inf}}}^1 + W_{x_{\text{inf}}}^2)/2 = 0,5602$ donde $K^g(0,5602) \approx 7,92$ y $P(T_1 \wedge T_2 > 7,919) = 0,653$. Entonces, fijando el período de garantía en 0.56 tenemos una alta probabilidad de minimizar los costos de garantía por unidad de tiempo.

6. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

En sistemas coherentes con estructuras relativamente simples es posible incorporar información sobre el estado del sistema y de sus componentes a un nivel más completo que el observado bajo la filtración trivial y utilizar esa historia en la determinación de tiempos de parada óptimos en problemas de optimización que involucran costos o probabilidades de eventos de particular interés.

Si bien los resultados presentados fueron establecidos bajo una filtración completa, sin embargo, también es posible considerar su aplicación cuando sólo se dispone de información parcial sobre el estado del sistema y sus componentes. Para ello, las técnicas de la teoría de filtración deben ser aplicadas y luego validar si se cumplen las condiciones de las soluciones de parada óptima bajo tal subfiltración, pues no necesariamente los procesos de intensidad de falla conservan las mismas propiedades bajo diferentes filtraciones.

Se debe tener en cuenta que lo más importante para la aplicación de la regla ILA, bien sea bajo información completa o parcial, es obtener una representación SSM apropiada de los procesos involucrados en el problema y evaluar sobre éstos la validez de las condiciones dadas en los Teoremas 2.1 y 2.2 presentados, según sea el caso.

Por último, vale la pena aclarar que aunque los casos de aplicación presentados son relativamente simples, sin embargo, es posible considerar procesos de falla/reparo más complejos, como por ejemplo, procesos de falla con múltiples estados, donde las componentes y/o el sistema pasan por varias etapas de deterioro, o cuando diferentes niveles de reparación imperfecta pueden presentarse, o cuando políticas de mantenimiento y/o garantía combinadas tienen lugar de acuerdo a la edad del sistema, entre otros casos.

APÉNDICE A. Prueba del Teorema 4.1

i. Considere los siguientes casos,

(a) $\lambda_\tau \geq \lambda_0$,

(b) $\lambda_\tau < \lambda_0$.

En (a): Ver Figura 9(a). Desde que $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tiene forma de bañera y $\lambda_0 < \lambda_\infty$, entonces $\tau > S_2$. Por tanto, $\forall s \geq 0, \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$, y así $\forall s \geq 0, h \geq 0, \lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$. De lo anterior se concluye que en este caso el proceso $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$ es tal que $\forall s \geq 0, f_s \leq 0$ y

$$\forall s, h \in \mathbb{R}^+, \{f_s \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h} \leq 0\}, \bigcup_{s \geq 0} \{f_s \leq 0\} = \Omega.$$

En (b): Ver Figura 9(b). Como $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tiene forma de bañera y $\lambda_0 < \lambda_\infty$, se tiene que $\forall \omega \in \Omega$, existe $s^* \geq 0$ tal que $s^* = \inf \{s \geq 0 : \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\}$. Luego,

(b-1) Si $s^* \leq S_1$, entonces $s^* + \tau > S_2$ ya que λ_s tiene forma de bañera. Así, $\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}, \forall s \geq s^*$ y por tanto, $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}, \forall s \geq s^*, h \geq 0$.

(b-2) Si $s^* \geq S_1$, entonces $\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau} \forall s \geq s^*$, puesto que λ_s es (P.c.s.) no decreciente en $\{s \geq S_1\}$. Consecuentemente, $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}, \forall s \geq s^*, h \geq 0$.

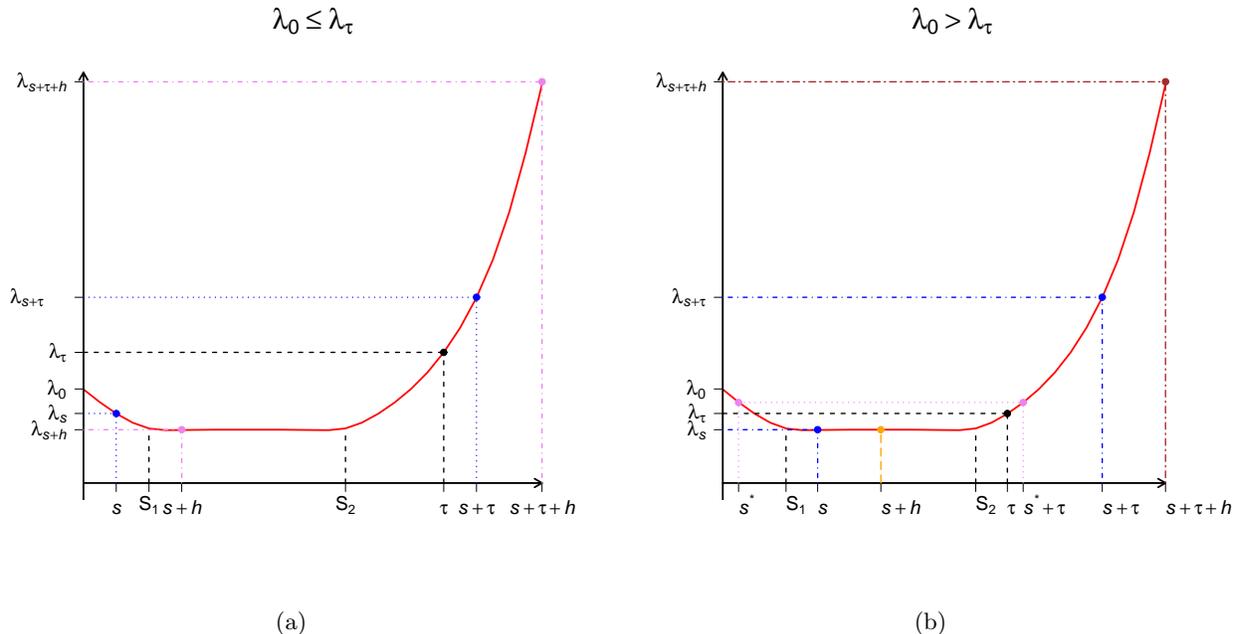


Figura 9: (a) Ejemplo caso (a), prueba Teorema 4.1; (b) Ejemplo caso (b), prueba Teorema 4.1.

De (b-1) y (b-2) se concluye que si $\lambda_\tau < \lambda_0$ y $\lambda_0 < \lambda_\infty$, para todo $\omega \in \Omega$ existe $s^* \geq 0$ tal que para el proceso $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$, se cumple que

$$\forall s \geq s^*, h \in \mathbb{R}^+, \{f_s \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h} \leq 0\}, \bigcup_{s \geq 0} \{f_s \leq 0\} = \Omega.$$

Observe que en (a) para todo $\omega \in \Omega$, $s^* = 0$. Luego, de (a) y (b) se tiene que el proceso $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$ satisface el *caso monótono* y como la martingala M_b^τ es uniformemente integrable, se puede aplicar la regla de parada ILA dada por

$$B^* = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : f_B \leq 0\} = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\},$$

tal que

$$K(\tau, B^*) = E\left[\int_0^{B^*} (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] = \sup\left\{E\left[\int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] : B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}\right\}.$$

ii. Del análisis en i. se concluye que bajo las condiciones dadas en la hipótesis, $\forall \omega \in \Omega$ existe un \mathbb{F} -tiempo de parada $S^*(\omega) = s^* \geq 0$, tal que $\lambda_{s^*} \leq \lambda_{s^*+\tau}$ y $\forall s \geq s^*, h \in \mathbb{R}^+, \{\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\} \subseteq \{\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+h+\tau}\}$. Luego, en $\{S^* \leq S_1\}$ se tiene que $B^* = \inf\{B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\} = \inf\{s \leq S_1 : \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\}$, mientras que en $\{S^* \geq S_1\}$, $B^* = S_1$. De lo anterior se concluye que $B^* \leq S_1$.

APÉNDICE B. Prueba del Teorema 4.2

i. Observe que

$$\tilde{\lambda}_s < \lambda_s, \forall s \geq 0. \quad (79)$$

Consideramos los dos siguientes casos

(a) $\tilde{\lambda}_0 \leq \lambda_{S_1}$.

(b) $\tilde{\lambda}_0 > \lambda_{S_1}$.

En (a): Ver Figura 10(a). Por la forma de bañera de λ_s se tiene que, $\forall s' \geq 0, \lambda_{s'} \geq \lambda_{S_1}$ y por tanto, $\tilde{\lambda}_0 \leq \lambda_{s'}, \forall s' \geq 0$. Como el proceso $\tilde{\lambda}_s$ también tiene forma de bañera, entonces para todo $0 \leq s \leq S_2$ tenemos que $\tilde{\lambda}_s < \tilde{\lambda}_0$ y así, por el resultado anterior, $\tilde{\lambda}_s < \lambda_{s'}, \forall 0 \leq s \leq S_2, s' \geq 0$. Por tanto,

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}, \forall 0 \leq s \leq S_2. \quad (80)$$

Si $s > S_2$, por la forma de bañera de λ_t y de (79), tenemos que para todo $s' \geq s > S_2, \tilde{\lambda}_s < \lambda_s \leq \lambda_{s'}$, entonces,

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}, \forall s > S_2. \quad (81)$$

De (80) y (81) se concluye que

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}, \forall s \geq 0 \text{ y por tanto (con } s = s+h) \tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}, \forall s \geq 0, h \geq 0. \quad (82)$$

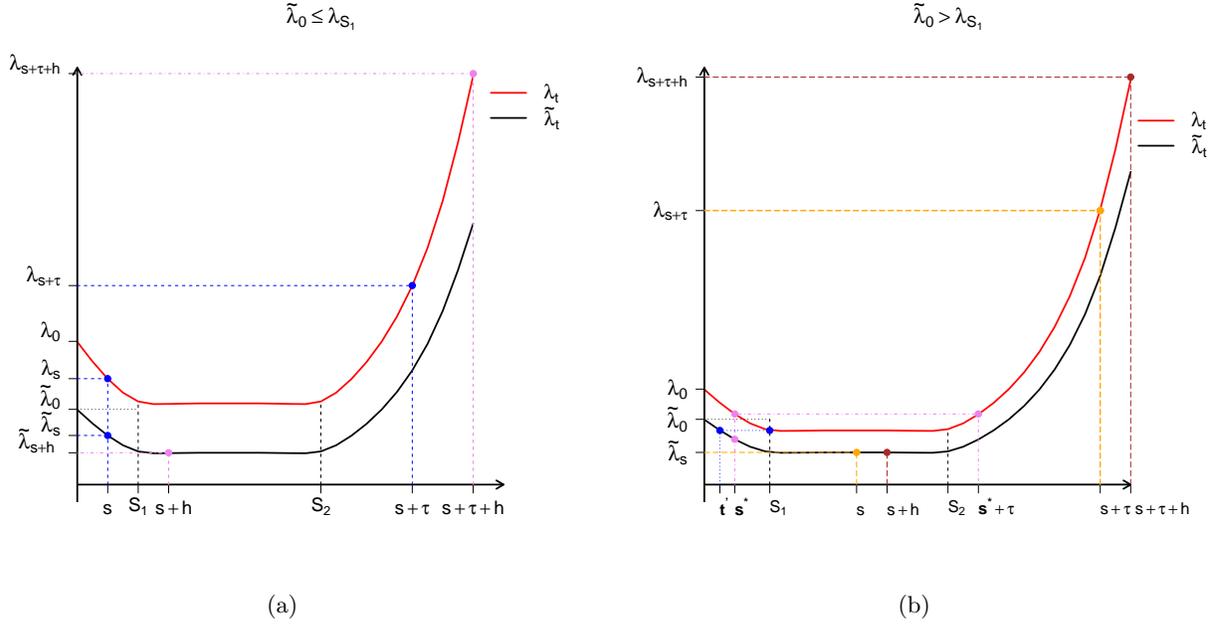


Figura 10: (a) Ejemplo caso (a), prueba Teorema 4.2. (b) Ejemplo caso (b), prueba Teorema 4.2.

En (b): Ver Figura 10(b). Por la forma de bañera de los procesos $(\tilde{\lambda}_t)_{t \geq 0}$ y $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ y de la desigualdad en (79), se concluye que para todo $\omega \in \Omega$ existe $0 \leq t' \leq S_1$ tal que $t' = \inf\{s \geq 0 : \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{S_1}\}$. Sea $s^* = \inf\{s \geq 0 : \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\}$. Del Teorema 4.1 tenemos que $\forall s \geq s^*, h \geq 0, \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$ y por tanto $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$. En consecuencia, de (79) también obtenemos que $\forall s \geq s^*, h \geq 0, \tilde{\lambda}_s < \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$ y por tanto $\tilde{\lambda}_{s+h} < \lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$. Además, observe que $\forall s \geq t', s' \geq 0, \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{S_1} \leq \lambda_{s'}$, luego, para $s' = s + \tau$, obtenemos que $\forall s \geq t', \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}$, y por tanto, $\forall s \geq t', h \geq 0, \tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$. Del análisis anterior se concluye que

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau} \implies \tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}, \forall s \geq s^* \wedge t', h \geq 0. \quad (83)$$

Finalmente, de los resultados obtenidos en el análisis en (a) y (b), concluimos que el proceso $f_s = \tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}$, $s \leq B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}$ satisface el caso monótono y como la martingala \tilde{R} es uniformemente integrable, la regla de parada monótona ILA definida por $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}, \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$ es óptima, es decir,

$$H(\tau, \tilde{B}^*) = \sup\{H(\tau, B) : B \in C_\zeta^{b, \mathbb{F}}\}.$$

ii. De la definición de \tilde{B}^* , tenemos que $\forall B < \tilde{B}^*, \tilde{\lambda}_B > \lambda_{B+\tau}$. Suponga que $B^* < \tilde{B}^*$, entonces $\tilde{\lambda}_{B^*} > \lambda_{B^*+\tau}$, y por tanto $\lambda_{B^*} > \left(\frac{C+K}{C-C_0}\right) \lambda_{B^*+\tau} > \lambda_{B^*+\tau}$. Pero de la definición de B^* tenemos que $\lambda_{B^*} \leq \lambda_{B^*+\tau}$, lo cual contradice lo anterior. Luego, $B^* \geq \tilde{B}^*$.

Referencias

- Aven, T. & Jensen, U. (2013), *Stochastic models in reliability*, 2 edn, Springer Science Business Media, New York.
- Bai, J. & Pham, H. (2004), Discounted warranty cost of minimally repaired series systems, *IEEE Transactions on Reliability*, 53, 37–42.
- Barlow, R. E. & Proschan, F. (1975), *Statistical theory of reliability and life testing: Probability models*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.
- Blischke, W. R. & Murthy, D. N. P. (1992a), Product warranty management-1: A taxonomy for warranty policies, *European Journal of Operational Research*, 62, 127–148.
- Blischke, W. R. & Murthy, D. N. P. (1992b), Product warranty management-2: An integrated framework for study, *European Journal of Operational Research*, 62, 261–281.
- Blischke, W. R. & Murthy, D. N. P. (1992c), Product warranty management-3: A review of mathematical models, *European Journal of Operational Research*, 63, 1–34.
- Blischke, W. R. & Murthy, D. N. P. (1994), *Warranty cost analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Blischke, W. R. & Murthy, D. N. P. (1996), *Product warranty handbook*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Block, H. S. & Savits, T. H. (1997), Burn-in, *Statistical Science*, 12, 1–19.
- Block, H. W., Borges, W. S. & Savits, T. H. (1985), Age-dependent minimal repair, *Journal of Applied Probability*, 22, 370–385.
- Brémaud, P. (1981), *Point processes and queues, Martingale dynamics*, Springer, New York.
- Bueno, V. C. (2007), Burn-in of a coherent system at component information level, Technical Report RT-MAE 2007-15, Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo.
- Cha, J. H. (2000), On a better burn-in procedure, *Journal of Applied Probability*, 12, 1090–1103.
- Cha, J. H. (2001), Burn-in procedures for a generalized model, *Journal of Applied Probability*, 38, 542–553.
- Cha, J. H. (2003), A further extension of the generalized burn-in model, *Journal of Applied Probability*, 40, 264–270.

- Chien, Y. H. (2005), Determining optimal warranty periods from the seller's perspective and optimal out-of-warranty replacement age from the buyer's perspective, *International Journal of Systems Science*, 36, 631–637.
- Feng, Q., Peng, H. & Coit, D. W. (2010), A degradation based-model for joint optimization of burn-in, quality inspection, and maintenance: a light display device application, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 50, 801–808.
- González, N. G. (2009), Processos de burn-in e de garantia em sistemas coerentes sob o modelo de tempo de vida geral, Tese De Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística.
- Ja, S. S., Kulkarni, V., Mitra, A. & Patankar, G. (2001), A non renewable minimal-repair warranty policy with time-dependent costs, *IEEE Transactions on Reliability*, 50, 346–352.
- Jensen, F. & Petersen, N. E. (1982), *Burn-in*, Wiley, New York.
- Jensen, U. (1989), Monotone stopping rules for stochastic processes in a semimartingale representation with applications, *Optimization*, 20, 837–852.
- Jensen, U. (1990), A general replacement model, *ZOR - Methods and Models of Operations Research*, 34, 423–439.
- Kar, T. R. & Nachlas, J. A. (1997), Coordinated warranty & burn-in strategies, *IEEE Transactions on Reliability*, 46, 512–518.
- Kim, C. S., Djamaludin, I. & Murthy, D. N. P. (2001), Warranty cost analysis with heterogeneous usage intensity, *International Transactions in Operational Research*, 8, 337–347.
- Kuo, W. & Kuo, Y. (1983), Facing the headaches for early failures. a state of the art review of burn-in decision, *Proc. IEEE*, 71, 1257–1266.
- Kurz, D., Lewitschnig, H. & Pilz, J. (2014), Advanced Bayesian estimation of Weibull early life failure distributions, *Quality and Reliability Engineering International*, 30, 363–373.
- Mi, J. (1991), Burn-in, PhD thesis, University of Pittsburgh, Department of Mathematics and Statistics, Pittsburgh.
- Mi, J. (1994), Burn-in and maintenance policies, *Advances in Applied Probability*, 26, 207–221.
- Mi, J. (1997), Warranty policies and burn-in, *Naval Research Logistics*, 44, 199–209.
- Murthy, D. N. P. (1990), Optimal reliability choice in product design, *Engineering Optimization*, 15, 280–294.

- Nguyen, D. G. & Murthy, D. N. P. (1982), Optimal burn-in time to minimize cost for products sold under warranty, *IIE Transactions*, 14, 167–174.
- Raharshi, S. & Raharshi, M. B. (1988), Bathtub distributions: A review, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 17, 2597–2621.
- Sheu, S. H. & Chien, Y. H. (2005), Optimal burn-in time to minimize the cost for general repairable products sold under warranty, *European Journal of Operational Research*, 163, 445–461.
- Tsai, C. C., Tseng, S. T. & Balakrishnan, N. (2011), Optimal burn-in policy for highly reliable products using gamma degradation process, *IEEE Transactions on Reliability*, 60, 234–245.
- Ulusoy, S. K., Mazzuchi, T. A., & Perlstein, D. (2011), Bayesian calculation of optimal burn-in time using the joint criteria of cost and delivered reliability, *Quality and Reliability Engineering International*, 27, 569–580.
- Xiang, Y., Coit, D. W. & Feng, Q. (2013), n Subpopulations experiencing stochastic degradation: reliability modeling, burn-in, and preventive replacement optimization, *IIE Transactions*, 45, 391–408.
- Ye, Z. S., Tang, L. C. and Xie, M. (2011), Performance-based burn-in for products sold with warranty, *Proceedings of the 2011 IEEE IEEM*, 1544–1548.
- Ye, Z. S., Xi, M., Tang, L. C. & Shen, Y. (2012), Degradation-based Burn-in planning under competing risks, *Technometrics*, 54, 159–168.
- Yuan, T. & Kuo, Y. (2010), Bayesian analysis of hazard rate, change point, and cost-optimal burn-in time for electronic devices, *IEEE Transactions on Reliability*, 59, 132–138.
- Yun, W. Y., Lee, Y. W. & Ferreira, L. (2002), Optimal burn-in time under acumulative free replacement warranty, *Reliability Engineering & System Safety*, 78, 93–100.