

**Universidad Nacional de Colombia****Rector:** Ignacio Mantilla Parada**Vicerrector:** John Willian Branch**Decano Facultad de Ciencias:** Arley David Zapata Zapata**Editor Jefe: Revista Facultad de Ciencias:** Víctor Ignacio López Ríos**Evaluadores Volumen 6 Número 2**

Alcides Montoya Universidad Nacional de Colombia, Colombia	Ivonne Rivas Triviño Universidad del Valle, Colombia
Alejandro Rojas Palma Universidad de Chile, Chile	Jaime Gallego Marín Universidad de Antioquia, Colombia
Alexander Quintero Vélez Universidad Nacional de Colombia, Colombia	Jesús Eliécer Larrahondo Aguilar Universidad del Valle, Colombia
Álvaro Valdés Universidad Nacional de Colombia, Colombia	Jhoana Colina Moncayo Universidad Simón Bolívar, Venezuela
Ana Bolaños Universidad del Valle, Colombia	Jhon César Neita Moreno Instituto Alexander von Humboldt, Colombia
Andreina Reyes Yanes Universidad de Carabobo, Venezuela	Jhon Jairo Vargas Sánchez Universidad del Magdalena, Colombia
Carlos Alberto Peláez Jaramillo Universidad de Antioquia, Colombia	Johny Jaramillo Universidad de Antioquia, Colombia
Carlos Parra Londoño Universidad Nacional de Colombia, Colombia	Jorge Briceño Universidad de Carabobo, Venezuela
Carmen Huerta Crespo Instituto Nacional de Ecología, Xalapa, México	Jorge Noriega National Museum of Natural Science (CSIC), España
David Blázquez Sanz Universidad Nacional de Colombia, Colombia	José Tovar Cuevas Universidad del Valle, Colombia
Edier Humberto Pérez Universidad del Cauca, Colombia	Juan Rodrigo Sanz Uribe Cenicafé, Colombia
Elisabeth Restrepo-Parra Universidad Nacional de Colombia, Colombia	Luis Pardo Locarno Universidad del Pacífico, Colombia
Esther Montoya Cenicafé, Colombia	María del Rocío Cruz Ortega Universidad Nacional Autónoma de México, México
Fernando Álvarez Mejía Universidad Nacional de Colombia, Colombia	María Esperanza López Gómez Universidad de Antioquia, Colombia
Fidel Ulán Montejo Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México	María Flórez Molina Universidad de Antioquia, Colombia
Freddy Ocanto Universidad de Carabobo, Venezuela	Marisol Gordillo Universidad Autónoma de Occidente, Colombia
Germán Amat García Universidad Nacional de Colombia, Colombia	Martha Lucía Molina Prado Universidad de Pamplona, Colombia
Guillermo Salas UNAM, México	Miguel Caro Candezano Universidad del Atlántico, Colombia
Gustavo Gracia Instituto Politécnico Nacional, México	Milton Humberto Medina Barreto Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia
Isabel Bravo Realpe Universidad del Cauca, Colombia	Oscar Jaime Restrepo Baena Universidad Nacional de Colombia, Colombia

Raúl Parada  
Centro de Investigación en Matemáticas, México  
Santiago Andrés Verne  
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Sonia Moreno Guaquetá  
Universidad Nacional de Colombia, Colombia  
Wilmer Saldarriaga  
Universidad Nacional de Colombia, Colombia

**Diagramación en Latex:** Jaqueline Carmona Herrera, Estudiante de Ingeniería Industrial, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.  
Impreso y hecho en Medellín.  
El material de esta revista puede ser reproducido citando la fuente.

# Contenido

EDITORIAL .....	8
JUAN JOSÉ IBÁÑEZ MARTI	
CONOCIMIENTO Y PEDAGOGÍA .....	11
CARTA AL EDITOR	
ADOLFO MOLINA PARDO	
NIDIFICACIÓN DEL ESCARABAJO COPRÓFAGO <i>Onthophagus curvicornis</i> LATREILLE, 1811 (COLEOPTERA: SCARABAEIDAE) EN CONDICIONES DE LABORATORIO.....	20
NIDIFICATION OF THE DUNG BEETLE <i>Onthophagus curvicornis</i> LATREILLE, 1811 (COLEOPTERA: SCARABAEIDAE) IN LABORATORY CONDITIONS	
JOSÉ MAURICIO MONTES RODRÍGUEZ	
ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE ÓXIDOS MIXTOS Zn-Al TIPO HIDROTALCITA EN PRECURSORES CATALÍTICOS CoNiMo FRENTE HDS DE TIOFENO.....	29
STUDY OF STRUCTURAL STABILITY OF MIXED OXIDES Zn-Al HYDROTALCITE TYPE IN CATALYTIC PRECURSORS CoNiMo FRONT HDS OF THIOFENO	
RUTH ÁLVAREZ, CARLOS LINARES	
IMPLEMENTACIÓN DE UNA FUENTE CONMUTADA PARA USO EN LA TÉCNICA DE OXIDACIÓN ELECTROLÍTICA CON PLASMA .....	46
IMPLEMENTATION OF A SWITCHED POWER SUPPLY FOR THE PLASMA ELECTROLYTIC OXIDATION TECHNIQUE	
JOHN GARCÍA, FERNANDO GORDILLO-DELGADO, DARWIN TORRES	
LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI .....	58
THE BANACH-TARSKI PARADOX	
CARLOS A. CADAVIDAD M., JUAN D. VÉLEZ C.	
EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE HIERRO EN LA GUAYABA ( <i>Psidium guajava</i> ) Y PIMENTÓN ( <i>Capsicum annum</i> ) Y SU IMPACTO COMO COMPLEMENTO EN LA DIETA .....	73
EVALUATION OF IRON CONTENT IN GUAYABA ( <i>Psidium guajava</i> ) AND PIMENTON ( <i>Capsicum annum</i> ) AND ITS IMPACT AS A COMPLEMENT IN THE DIET	
PEDRO DIAZ, ANGEL NAVA Y RUTH ÁLVAREZ	

EVALUACIÓN DE MÉTODOS PARA ERRADICAR HONGOS ENDÓFITOS DE RAÍCES EN SEMILLAS DE <i>Brachiaria decumbens</i> Stapf .....	87
EVALUATION OF METHODS TO ELIMINATE ROOT ENDOPHYTIC FUNGI FROM SEEDS OF <i>Brachiaria decumbens</i> Stapf	
DIANA TAMAYO, JUAN C. PÉREZ Y ELIZABETH MENESSES	
DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ.....	102
DETERMINATION OF TWO INDICES OF SOIL QUALITY INDICATORS IN COFFEE CUP QUALITY	
MARIA LUISA ANAYA GÓMEZ, DANIEL JARAMILLO JARAMILLO	
COMPARATIVO DE MODELOS DE PRONÓSTICO: CLÁSICOS, BAYESIANOS Y TÉCNICAS DE COMBINACIÓN .....	124
COMPARATIVE OF FORECASTING MODELS: CLASSICAL, BAYESIAN AND COMBINATION TECHNIQUES	
MARISOL VALENCIA, VICTOR OSORNO, JUAN CARLOS SALAZAR	
SOBRE EL CONTROL EN SISTEMAS DINÁMICOS DE DIMENSIÓN INFINITA EN ESPACIOS DE HILBERT Y DE FRECHÉT .....	141
ON THE CONTROL OF INFINITE DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS ON HILBERT AND FRECHÉT SPACES	
NANCY LÓPEZ REYES	

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín  
Facultad de Ciencias

**COMITÉ EDITORIAL CENTRO EDITORIAL**

Román Eduardo Castañeda Sepúlveda, Escuela de Física, Director Centro Editorial

Daniel Alberto Barragán Ramírez, Escuela de Química

Víctor Ignacio López Ríos, Escuela de Estadística, Editor Jefe Revista Facultad de Ciencias

María Elena Márquez Fernández, Escuela de Biociencias

Mauricio Andrés Osorio Lema, Vicedecano Académico

Fernando Cubides Martínez, Asesor Centro de Publicaciones

María Eugenia Aristizábal Giraldo, Comunicadora Facultad de Ciencias

**COMITÉ EDITORIAL REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS**

Carlos Alberto Cadavid Moreno

Ph. D. en Matemáticas, University Of Texas System

Profesor Titular Universidad EAFIT

email: ccadavid@eafit.edu.co

Elder Jesús Villamizar

Ph. D. en Matemáticas, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Profesor Universidad Industrial de Santander

email: jvillami@uis.edu.co

Elizabeth Castañeda

Ph. D. Microbiología, Universidad de California at San Francisco,  
Estados Unidos

Investigador Emérito Instituto Nacional de Salud, Bogotá

email: ecastaneda21@gmail.com

Fanor Mondragón

Ph. D. en Ciencias Química, Universidad de Hokaido, Japón

Profesor Instituto de Química, Universidad de Antioquia

email: fmondra@gmail.com

Gustavo Cañas Cardona

Ph. D. en Óptica

Profesor Universidad del Valparaíso, Chile

email: gustavocanascardona@gmail.com

Jorge Mahecha Gómez

Ph D. en Ciencias Física, University Of Belgrade, Serbia

Profesor Universidad de Antioquia

email: mahecha@gmail.com

Juan Carlos Correa Morales

Ph. D. en Estadística, University of Kentucky, Estados Unidos

Profesor Asociado Escuela de Estadística

email: jccorrea@unal.edu.co

Juan Darío Restrepo Ángel

Ph. D. en Ciencia Marina, University of South Carolina, Estados Unidos.

Profesor Universidad EAFIT, Medellín

jdrestre@eafit.edu.co

Rodrigo Covaleda

Doctor en Enseñanza de las Ciencias, Universidad de Burgos, España

Profesor Jubilado Universidad de Antioquia

email: rocovaleda@gmail.com

Sandra Bibiana Muriel Ruiz

Ph. D. en Ciencias-Biología, Universidad del Valle, Colombia

Profesora Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid

email: sbmuriel@elpoli.edu.co

## COMITÉ CIENTÍFICO

Alberto Germán Lencina

Ph. D. en Física, Universidade Federal da Paraíba, Brasil

Profesor Universidad Nacional de La Plata, Argentina

email: agl@ciop.unlp.edu.ar

Alfonso Castro

Ph. D. in Mathematics University of Cincinnati

Professor of Mathematics, Department of Mathematics Harvey Mudd College, USA

email: castro@g.hmc.edu

Ángela Restrepo Moreno

Ph D. Microbiología, Tulane University Of Louisiana

Academia Colombiana de Ciencias Exactas Física y Naturales, Capítulo de Antioquia, Medellín

email: angelares@une.net.co

Carlos Augusto Molina Velásquez

Magister Astronomía, Universidad Federal Do Rio De Janeiro.

Planetario de Medellín Jesús Emilio Ramírez, Colombia

email: carlos.molina@parqueexplora.org

Fernando Albericio

Ph. D. en Ciencias Química, Universidad de Barcelona

Investigador principal del Instituto de Investigación Biomédica de Barcelona (IRB Barcelona) y catedrático de química orgánica de la

Universitat de Barcelona, España

email: albericio@ub.edu

Fernando Albericio

Ph. D. en Ciencias Químicas, Universidad de Barcelona

Investigador principal del Instituto de Investigación Biomédica de Barcelona (IRB Barcelona) y catedrático de química orgánica de la

Universitat de Barcelona, España

email: albericio@ub.edu

Jairo Alberto Villegas Gutiérrez

Ph. D. Matemáticas, Universidad Politécnica de Valencia, España

Profesor Asociado Universidad EAFIT, Colombia

email: javille@eafit.edu.co

Jean-Pierre Galaup

Universidad de Paris Sud, Francia

email: mmtzjaroszewicz@post.home.pl

Juan José Ibañez Martí

Ph. D. en Ciencias Biológicas

Científico Titular del Centro de Investigaciones sobre Desertificación

(CSIC-Universidad de Valencia), España

email: choloibanez@hotmail.com

Luis Raúl Pericchi Guerra

Ph. D. University of London, Imperial College

Department of Mathematics (Mathematical Statistics), Puerto Rico

email: luarpr@gmail.com

Michael Seeger

Ph. D. Instituto Gesellschaft fur Biotechnologische Forschung en

Braunschweig, Alemania

Profesor Titular de la Universidad Técnica Federico Santa María en

Valparaíso, España

email: michael.seeger@gmail.com

Mónica Reinartz Estrada

Ph D. Ciencias de la educación, Universidad de Montreal-Canadá

Profesora Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional de

Colombia, Sede Medellín

email: mreinart@unal.edu.co

Sandra Milena Hurtado Rúa

Ph.D. Statistics, University of Connecticut

Assistant Professor Department of Mathematics, Cleveland State

University, USA

email: s.hurtadoura@csuohio.edu

Zbigniew Jaroszewicz

Ph. D. en Física, Institute of Physics of Warsaw University of Technology

Profesor Instituto de Óptica Aplicada de Varsovia, Polonia

email: mmtzjaroszewicz@post.home.pl

## CONSEJO FACULTAD DE CIENCIAS 2017

### **Arley David Zapata Zapata**

Decano quien preside

### **Mauricio Andrés Osorio Lema**

Vicedecano Académico

### **Claudia Patricia García García**

Vicedecana de Investigación

### **Jorge Alberto Correa Quiroz**

Director de Bienestar Universitario

### **Farid Chejne Janna**

Representante del Consejo Superior Universitario

### **Román Eduardo Castañeda Sepúlveda**

Director Escuela De Física y

Representante de los Directores de Escuela

### **Rodney Jaramillo Justinico**

Director de la Escuela de Matemáticas y Representante  
de los Directores de Escuela

### **Carlos Mario Lopera Gómez**

Director Área Curricular de Estadística

### **Cristian Ramiro Abril Díaz**

Representante Estudiantil

### **Raúl Alberto Pérez Agamez**

Representante de los profesores ante el Consejo de la  
Facultad de Ciencias

### **Francisco Luis Montoya Herrera**

Secretario Facultad

## EDITORIAL

JUAN JOSÉ IBÁÑEZ MARTÍ<sup>a</sup>

El comité editorial de la Revista Facultad de Ciencias me invitó hace unos meses a formar parte de la misma. Gustosamente acepte. Seguidamente me solicitó redactar y/o actuar como revisor de algunos de los artículos de investigación que fueran remitidos con vistas a ser publicados en la misma. Y aquí comencé a dudar acerca de lo que yo, personalmente podía aportar a la misma. Pienso que desearía contribuir con algo diferente, relativamente novedoso y desde luego, redactado desde el conocimiento y el corazón. La Idea del Comité Editorial de la Revista Facultad de Ciencias estriba en ofrecer un producto de excelencia, en el que todos nosotros, y también vosotros, los lectores, colaboráramos para no brindaros un producto editorial más, sino en el empeño de alcanzar la mayor visibilidad a nivel internacional. Se trata de un reto titánico con independencia, de que los artículos y notas publicados se redacten en español o inglés. Me explico.

Lanzar al mercado una revista especializada sobre un tema concreto con vistas a que sea indexada es decir incluida en “*Web of Science*” de Thomson Reuters, acarrea numerosas dificultades, pero sería viable. Sin embargo, si se pretende alcanzar tal reto con una revista de ciencias en general se traduce inmediatamente en lograr la mentada indexación para a la poste competir contra las más importantes del mundo, es decir *Science*, *Nature*, *PNAS*, *Scientific American*, *La Recherche* y unas pocas más, requerirá de muchos años de esfuerzo, paciencia, financiación constante y mucho más.

En vista de todo ello, envié una serie de sugerencias que lograran ofrecer más visibilidad a la revista. Generalmente, los productos editoriales sobre temas o disciplinas concretas, se basan en artículos de investigación, notas breves, cartas al editor y poco más. Por el contrario, las de ámbito general, como las mencionadas líneas arriba se enriquecen con una mayor variedad de secciones. La razón es obvia. Un número de una revista general de ciencias tan solo puede albergar escasos artículos, que dejarán indiferentes a todos aquellos los lectores no versados en las disciplinas científicas contempladas en él. Y como hablamos de todas las ciencias, estos serán mayoría. Por tanto es lógico que esas revistas, las más prestigiosas del mundo, incluyan material que pueda satisfacer el interés del mayor número de lectores posibles. Y esa es mi intención al proponer una columna que aparezca en todos los números que pueda despertar la atención del mayor

<sup>a</sup>Observatorio Europeo sobre Ciencia, Tecnología y Sociedad en Latinoamérica. Integrante Comité Científico de la Revista. Científico Titular. Museo Nacional de Ciencias Naturales. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. España

EDITORIAL

número posible de personas interesadas por el mundo de la ciencia. Como es lógico, serán necesarias más propuestas si pretendemos captar la mayor audiencia posible en Internet, con acceso abierto y racias a las TICs. Este tipo de narrativas, debiera ser redactado por autores del mayor prestigio internacional o regional (léase el mundo hispano parlante), amantes de la ciencia general (que no de una disciplina concreta), y con un dilatado recorrido profesional que les permita entender la actividad investigadora en un contexto global que abarca no solo lo estrictamente científico, sino también las coyunturas históricas, geopolíticas y estratégicas. Francamente, me pongo un listón tan alto como ambiguo, quizás tanto como el título de esta columna.

Como en todos los aspectos de la cultura, las perspectivas difieren según los observadores. Y así, no es lo mismo reflexionar acerca del mundo de la ciencia, si uno investiga en un país latinoamericano, norteamericano, asiático o europeo. De ahí el título de mi empresa: “*Observatorio Europeo sobre Ciencia, Tecnología y Sociedad en Latinoamérica*”. Obviamente, como español soy europeo, aunque culturalmente me encuentre más cerca de la mayoría de los lectores de esta revista que de los ciudadanos de los pueblos nórdicos o del mundo anglosajón, por no hablar de los chinos. A lo largo de mi carrera científica, digamos que nací en una España cuasi-fuera del mundo científico debido a una dictadura de 40 años que nos aislabía del resto del mundo. Luego viví la incorporación de mi país a Europa, la vertebración de la primera Ley de la Ciencia en España (1986), su peregrinaje zigzagueante, aunque ascendente, hacia las posiciones más elevadas del ranquin de países por su relevancia científica, los devastadores efectos en tal andadura de varias crisis económicas y especialmente de la última.

Por ser europeo y también latino, analicé y forme parte de una pléthora de actividades, grupos de trabajo, proyectos, consultoría y asesorías de la más disparatada índole. Como miembro del CSIC representé a mi organismo en España, como español en Europa, como europeo en foros mundiales y como ciudadano del mundo también he sido miembro esporádico de organismos internacionales frente a ante sus estados asociados, como lo es la FAO. Se trata de un bagaje, al menos aceptable, como para mirar con una cierta perspectiva y distancia la ciencia y la cultura latinoamericanas. Y si reflexionáis, un investigador de esta época, he visto el estado de la ciencia en un país, en varias fases de desarrollo, desde la insignificancia hasta el relativo respeto en la comunidad internacional. Digamos también que he impartido docencia sobre filosofía y sociología de la ciencia en una universidad de Madrid, lo cual me ayuda a entender el rol de la ciencia en el conjunto de la cultura.

Entiendo que los diferentes países latinoamericanos (incluyendo los mesoamericanos), se encuentran en fases de desarrollo muy dispares, por las más variadas circunstancias. Empero quiero dirigirme a todos por igual, si bien me acoge cálida y afectuosamente Colombia.

En consecuencia, ya que soy atrevido, quizás demasiado os adelanto el título de la primera entrega de esta sección o columna.

JUAN JOSÉ IBÁÑEZ MARTÍ

*“La unión hace la fuerza: bases para un pleno desarrollo de la indagación científica en Latinoamérica”.*

## CONOCIMIENTO Y PEDAGOGÍA

ADOLFO MOLINA PARDO<sup>a</sup>

Recibido 24-08-2017, aceptado 04-09-2017.

Carta al Editor

El Dr. Aurelijus Rutenis Antanas Mockus Sivickas (Bogotá, 25 de marzo de 1952), es matemático, filósofo y político, doctor Honoris Causa de la Universidad de París XIII, y de la Universidad Nacional de Colombia, fue alcalde de Bogotá en dos ocasiones, candidato a la vicepresidencia (1998) y a la presidencia de la República, y actualmente es el presidente de la Corporación Visionarios por Colombia (Corpovisionarios), centro de pensamiento y acción, sin ánimo de lucro, que investiga, asesora, diseña e implementa acciones para lograr cambios voluntarios de comportamientos colectivos<sup>b</sup>.

Como rector de la Universidad Nacional de Colombia (1991-1993), el Dr. Antanas Mockus se propuso, como misión fundamental de su rectoría, llevar a cabo una gran reforma educativa en la institución. Para lograrlo, se propuso posicionar a los docentes de nuestra universidad, como excelentes pedagogos. Para ello promovió y socializó, en todas las sedes de nuestra universidad, seminarios pedagógicos utilizando la técnica del seminario alemán o seminario investigativo.

Afortunadamente tuvimos la oportunidad de participar, por varios años, en estos seminarios, dándonos cuenta del error de ser docente sin tener formación pedagógica, lo que nos llevaba a imitar, con sus errores, a quienes fueron nuestros docentes. En estos seminarios aprendimos, por ejemplo:

1. Que al ser todo el universo energía (incluyendo la materia), y al ser nuestros órganos de los sentidos (que son sensores de diferentes formas de energía) sólo sensibles a una mínima fracción de ésta (menos del uno por millardo), sentimos menos de lo necesario para hoy sobrevivir; y que, para ampliar dicha fracción, creamos aparatos (radares, sonares, telescopios, microscopios, sensores de energía electromagnética tal como luz ultravioleta o infrarroja, rayos X o gama, ondas de radio, etc.).

<sup>a</sup>I. A., Ph. D. Profesor entomólogo jubilado. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.  
amolinap@une.net.co  
<sup>b</sup>Tomado textualmente de Wikipedia.

2. Que si tenemos en cuenta que no todos los impulsos nerviosos, procedentes de nuestros órganos de los sentidos, llegan al cerebro (ya que éste no resistiría el bombardeo simultáneo de todos ellos), y que en la base de nuestro cerebro hay un dispositivo que determina cuales señales llegan a él y cuáles no, podremos entender por qué vemos lo que queremos ver, oímos lo que queremos oír y, en general, sentimos lo que nos motiva o nos predispone a hacerlo.
3. Que de la misma manera como podemos tener, por ejemplo, el mejor auto con un motor poderoso que no funciona por falta de combustible, podemos tener un cerebro poderoso que no funciona, en ciertos temas, por falta de **motivación**.
4. Que si el *comportamiento animal* está determinado por **factores heredados** (congénitos, tales como los instintos, los reflejos y las taxias) y **factores ambientales** (adquiridos, definidos por las experiencias particulares de cada individuo), el *comportamiento humano* está además determinado por **factores cognitivos** (intelectivos, derivados del uso de su inteligencia).
5. Que cada individuo humano es un ser único e irrepetible, ya que (a) genéticamente somos todos diferentes a no ser que seamos gemelos monocigóticos (derivados de un solo óvulo fecundado) o clones, (b) ambientalmente no ha habido, no hay, ni habrá dos personas que hayan tenido desde su nacimiento (o incluso desde el vientre de su madre) las mismas experiencias, en la misma secuencia y con la misma intensidad, y (c) intelectivamente hay diferencias en el conocimiento que construye cada individuo sobre un tema.
6. Que las **sensaciones** procedentes de nuestros órganos de los sentidos, se asocian necesariamente en nuestro cerebro con información congénita y adquirida (**evocaciones**), asociaciones que conforman las **percepciones** (sensación + evocación = percepción). Toda percepción tiene dos componentes: **razón** y **emoción**.
7. Que una percepción procesada objetivamente (inteligentemente, es decir, dominada por la razón y no por la emoción) se trasforma en un **concepto** integrable a un **sistema conceptual** previamente construido, el que nos permite formular **juicios**. Una percepción no así procesada constituye un **preconcepto** que conduce a un **prejuicio**.
8. Que todos los seres humanos con un cerebro normal (morfológica, fisiológica y sicológicamente) poseemos facultades tales como la inteligencia y la memoria. La **inteligencia** (del L. *intus*: dentro y *legere*: lectura), la facultad que nos permite hacer una lectura interna (un análisis, una reflexión, una racionalización de nuestras percepciones) es, por definición, facultativa, es decir la podemos o no usar a voluntad. Si no la utilizamos es como si no la tuviéramos y actuaríamos como otros animales que no la tienen. La inteligencia y la memoria son facultades que requieren frecuentes ejercicios para poder desarrollarse y fortalecerse.
9. Que si tenemos en cuenta las limitaciones de nuestras **sensaciones** (en relación con el espectro energético y con nuestra predisposición o motivación para que ellas lleguen al cerebro) y las de nuestras **evocaciones**

(condicionadas por nuestros conocimientos previos y por factores heredados y ambientales), entendemos por qué nuestras **percepciones** son muy limitadas. Si consideramos además el grado de procesamiento que éstas reciban por acción de nuestra inteligencia, nuestras creencias no necesariamente corresponden exactamente a la **realidad**, es decir, siempre tendrán algún grado mayor o menor de subjetividad.

10. Que entendemos por **realidad** lo que es o existe independientemente de nuestra actividad cognoscitiva; la realidad es lo que los científicos desean conocer del mundo natural siendo conscientes de que el conocimiento alcanzado, mediante la aplicación del riguroso *método científico*<sup>c</sup>, sólo es una aproximación a ella. La realidad es única, permanente e incambiable, y nadie, debido a nuestras limitaciones cognoscitivas, puede afirmar que la conoce con certeza.
11. Que hay dos formas de conocimiento: el circunstancial y el general. El **conocimiento circunstancial** lo poseemos los *animales* y está basado en la experiencia; es el que nos permite saber dónde estamos, dónde encontrar algo que necesitamos, qué podemos comer, cómo comunicarnos, etc... En los humanos, cuando no utilizamos nuestra inteligencia, este tipo de conocimiento también se basa en los preconceptos y prejuicios que nos llevan a imaginar cómo es el mundo natural y el sobrenatural. El **conocimiento general**, al cual sólo nos referiremos en este artículo, lo poseemos los *humanos*, está basado en el uso de la inteligencia, lo que nos permite aproximarnos a saber las causas de las cosas y a darle un sentido racional al mundo espiritual y al natural. Este conocimiento está integrado por todos los sistemas conceptuales construidos, con diferentes grados de objetividad y subjetividad, por cada persona. Así, este conocimiento, sobre cualquier tema, puede variar de una persona a otra. El método científico reduce al máximo esta subjetividad y, por ello, el conocimiento general científico es el que nos da mayor aproximación a la realidad del mundo natural.
12. Que la razón por la cual el **conocimiento general** varía de una persona a otra, es la subjetividad, ya que este se construye de manera individual. Una analogía puede explicar lo anterior: ¿Cómo crece su cuerpo? Mediante la ingestión del alimento, la digestión del mismo, la asimilación de aquello que requiere su cuerpo y la excreción de lo que no le sirve. ¿Cómo crece su mente? Mediante la “ingestión” de **información conceptual**, la “digestión” (análisis) de la misma mediante el uso de su

---

<sup>c</sup>El método científico es usado principalmente en la producción de conocimiento en las ciencias. Para ser llamado científico, un método de investigación debe basarse en lo empírico y en la medición, sujeto a los principios específicos de las pruebas de razonamiento. Según el *Oxford English Dictionary*, el método científico es: “un método o procedimiento que ha caracterizado a la ciencia natural desde el siglo XVII, que consiste en la observación sistemática, medición, experimentación, la formulación, análisis y modificación de las hipótesis”. El método científico está sustentado por dos pilares fundamentales: la reproducibilidad y la refutabilidad. El primero, la reproducibilidad, implica la capacidad de repetir un determinado experimento, en cualquier lugar y por cualquier persona. Este pilar se basa, esencialmente, en la comunicación y publicidad de los resultados obtenidos (por ejemplo, en forma de artículo científico), y su verificación por la comunidad científica. El segundo pilar, la refutabilidad, implica que toda proposición científica debe ser susceptible de ser falsada o refutada (falsacionismo), siendo la falsabilidad el *modus tollendo tollens* del método hipotético-deductivo experimental. En otras palabras, el método científico rechaza las verdades absolutas, ya que establece que se podrían diseñar experimentos sobre subconjuntos específicos de parámetros que arrojen resultados *distintos* a los predichos originalmente, negando la hipótesis original para estos parámetros. Por lo tanto, las proposiciones científicas nunca pueden considerarse absolutamente verdaderas, sino a lo sumo “no refutadas” (Tomado textualmente de Wikipedia).

inteligencia, la “asimilación” de los nuevos **conceptos** que se integran a nuestros **sistemas conceptuales** previos, y la “excreción” de **preconceptos** y **prejuicios** encontrados sin sentido y que ocurren cuando uno “salta a conclusiones”. Lo que ingiere, cómo lo digiere (si lo digiere), qué asimila y qué excreta el cuerpo o la mente, difiere entre individuos.

13. Que la **información conceptual** es la expresión del conocimiento general que cada persona ha construido de manera individual y, por lo tanto, como éste, también varía entre los seres humanos. En un individuo, su conocimiento general no necesariamente coincide exactamente con su expresión; recordemos, por ejemplo, que cada vez que uno lee el borrador de un artículo que deseamos publicar, uno lo corrige al notar que ese borrador tiene inconsistencias con lo que uno piensa, con nuestro conocimiento.
14. Que hay dos tipos de sistemas conceptuales: las doctrinas y las teorías. Las **doctrinas** son construidas con base en especulaciones (meditaciones profundas acerca de cualquier asunto) sobre el mundo natural o el sobrenatural; normalmente cada una de éstas presenta múltiples variaciones (generalmente a nivel de cada individuo) y, con frecuencia, son dogmáticas. Existen doctrinas políticas, económicas, religiosas, sociales, filosóficas, etc. Las **teorías** se relacionan únicamente con el mundo natural y son construidas, a partir de hipótesis, con base en hechos demostrables mediante la aplicación del método científico, un método riguroso que pretende eliminar cualquier subjetividad. Las teorías están sustentadas en hechos y, por ello, son nuestra mejor aproximación a la realidad del mundo natural.
15. Que no se debe confundir una teoría con una hipótesis. Una **teoría** es un conocimiento sustentado con hechos, es decir, con datos obtenidos de una o muchas investigaciones científicas. Una **hipótesis** es un supuesto provisional y anticipado de la causa o explicación de un fenómeno, es una especulación educada sin hechos o datos científicos que la sustenten, pero que podría explicar un fenómeno y que puede ser sometida a ser sustentada, modificada o descartada con base en los datos obtenidos de una investigación científica. Si estos datos la sustentan, puede llegar a ser parte de una teoría.
16. Que una teoría no es dogmática, es decir, no es una “verdad” revelada, ni absoluta; es un saber que se puede enriquecer, modificar o, incluso, eliminar con base en hechos demostrables mediante la aplicación del método científico. Las teorías conforman la **ciencia**, es decir, el conjunto de conocimientos científicos. Según el principio de falsabilidad<sup>d</sup> y las leyes sobre presunción de inocencia, una teoría es “verdadera” hasta que se demuestre lo contrario.
17. Qué es **verdad** y qué es **mentira**. Si uno cree A y expresa A, uno dice su verdad. Si uno piensa A y expresa B, uno expresa una mentira, miente así sea si dice AB, AC... (verdades a medias). Una persona que expresa su verdad, no debe pretender que su verdad es absoluta, es decir, creer que su verdad

---

<sup>d</sup>El **falsacionismo** o **principio de falsabilidad** o **racionalismo crítico** es una corriente epistemológica fundada por el filósofo austriaco Karl Popper (1902–1994). Para Popper, contrastar una teoría significa intentar refutarla mediante un contraejemplo. Si no es posible refutarla, dicha teoría queda corroborada, pudiendo ser aceptada provisionalmente, pero *no verificada*; es decir, ninguna teoría es absolutamente verdadera, sino a lo sumo “no refutada”. El falsacionismo es uno de los pilares del método científico (Tomado textualmente de Wikipedia).

corresponde exactamente a la realidad. Como lo hemos dicho (numeral 10), la realidad es única y nadie puede pretender que la conoce. Ni siquiera los científicos pueden ser dogmáticos; sólo pueden asegurar que sus teorías son su mejor aproximación a la realidad del mundo natural. Consciente de que sus teorías no son dogmas, el científico debe **dudar de todo** (duda metódica de Descartes<sup>e</sup>), duda de que sus teorías son totalmente ciertas, lo que lo lleva a continuar sus investigaciones sobre cada tema.

18. Que la **verdad** de cada quien está formada por la expresión de sus preconceptos, prejuicios, conceptos, juicios y/o sistemas conceptuales. El saber de cada persona está constituido por elementos congénitos y adquiridos; los adquiridos están determinados por las experiencias vividas por cada persona y por el uso o no de su inteligencia para procesarlas.
19. Que el **diálogo** es la interacción comunicativa, discursiva y propositiva. Es discursiva cuando es argumentativa (si se exponen sistemas conceptuales y juicios, y no preconceptos y prejuicios) e intelectiva (si prima la razón sobre la emoción). No hay diálogo si en una o en ambas partes, domina la emoción. Es propositiva cuando hay un propósito común de las partes (tal como formar mejores profesionales para lograr un mayor desarrollo del país y no el cumplir, como sea, un compromiso laboral por una parte y llenar un requisito académico para obtener un título por otra parte). El diálogo, además de permitirnos enriquecer o modificar nuestro conocimiento al confrontarlo con el de los demás, ofrece la forma de utilizar nuestra inteligencia, las que nos hace verdaderamente humanos, para solucionar conflictos materiales o intelectuales sin tener que utilizar la fuerza bruta como animales irracionales. El verdadero diálogo permite que, frente a la validez de los argumentos, las partes modifiquen sus posiciones o creencias iniciales, y así lograr acuerdos razonables que permitan alcanzar en un grado mayor el propósito u objetivo común. Es importante hacer énfasis en que, por el hecho de que el conocimiento general entre individuos difiere sobre cada tema, por las razones antes mencionadas, el diálogo no puede pretender lograr consensos absolutos, pero sí enriquecer o modificar los conocimientos de los dialogantes.
20. Que la formación estudiantil puede darse de dos maneras: la instrucción y la educación. La **instrucción** (del L. *in:* hacia dentro y *structus:* construir) tiene tres formas: La *instrucción física* se aplica en las fuerzas armadas, en gimnasios etc., la *instrucción mecánica* se aplica en centros de formación técnica y tecnológica y la *instrucción mental* a la cual sólo nos referiremos aquí. En ésta, el profesor que ha construido su conocimiento sobre el contenido de una asignatura o ha memorizado la información pertinente, dicta la clase, es un dictador, es decir, expresa su verdad, la que él considera absoluta e

---

<sup>e</sup>El objetivo de Descartes es encontrar verdades contundentes, tangibles y fácticas sobre las cuales no sea posible dudar en absoluto, verdades evidentes que permitan fundamentar la edificación del conocimiento con absoluta garantía. El primer problema planteado es cómo encontrarlas y, para resolverlo, expone este método. En este método la cuestión es por dónde empezar la búsqueda. La respuesta y el primer momento de este proceso de búsqueda del conocimiento verdadero es la llamada **duda metódica**. La duda metódica consiste en considerar como falso a cualquier supuesto del que se pueda dudar. Si esta existe, este supuesto se puede considerar verdadero o falso. Pero la duda funciona como falsedad porque se percibe falso y se elimina la verdad. Es decir, que si Descartes encontraba alguna duda en la raíz de un supuesto, lo podía considerar como falso (Tomado textualmente de Wikipedia).

indiscutible como un dogma, y la introduce en la mente del estudiante, quien obligatoriamente debe memorizarla y repetirla fielmente en un examen, fidelidad de la cual depende la calificación. La memoria es la facultad más débil del ser humano, y por ello, después del examen, el estudiante fácilmente olvida la información impartida por el profesor, especialmente si no ejercita con frecuencia su memoria sobre dicha información. En la **educación** (del Gr. *ek*: hacia afuera y del L. *ducere*; conducir), el profesor es un director, es quien conduce, dirige u orienta al estudiante para que éste construya su propio conocimiento. En la sesión de clase, el conocimiento intelectivo previamente construido por cada estudiante (con base en lecturas internas sobre un tema) sale de sus mentes (expresan sus verdades) y, mediante un *diálogo*, se enfrenta a otras verdades para enriquecer, modificar o desechar la suya. Todas estas otras verdades, incluyendo la del director, tienen cierto grado de subjetividad, pero un estudiante, con una inteligencia bien desarrollada, podrá reducirlo. Alemania nos ha enseñado, desde hace varios siglos, esta formación educativa, la cual es valorada en muchos países; la técnica denominada *seminario alemán* es una de sus formas (ver numeral 23). Recientemente los rusos, por ejemplo, han mostrado un mayor interés en educar a sus jóvenes en Alemania.

21. Que en la **instrucción** el profesor prepara la clase recurriendo a fuentes de información. Como hemos dicho, esta información es la expresión del conocimiento de sus autores pero las dos (conocimiento y su expresión) no necesariamente coinciden y, por ello, cada vez que un autor revisa el borrador de una futura publicación le hace correcciones. Así como hay diferencias entre el pensamiento de un autor y su expresión escrita, también las puede haber entre ese escrito y la interpretación por dicho profesor y entre esta interpretación y la expresión de la misma ante sus estudiantes. Recordemos el juego del “teléfono roto” donde se muestra la diferencia entre la información que recibe el primero y el último de los participantes.
22. Que en la **educación** el estudiante, con la asesoría del profesor, va directamente a las fuentes de información, evitándose así las posibles distorsiones antes señaladas. Para esto, el estudiante debe aprender a leer (para lo cual existen varios métodos) con el fin de lograr primero entender lo que expresa un autor, luego comprender (poner en contexto) dicho entendimiento y para, finalmente, confrontar los conocimientos previos del estudiante, si los tiene, con lo expresado por dicho autor y sacar sus propias conclusiones. En este proceso el estudiante investiga y construye su propio conocimiento sobre un tema. En la sesión de clase, bajo la dirección del profesor, los estudiantes exponen sus conocimientos individualmente construidos (sobre el tema del día) y sus dudas si las tienen. Para ello, el profesor puede emplear alguna técnica que haga reflexionar al estudiante, por ejemplo mediante preguntas (de forma similar a la mayéutica<sup>f</sup> de Sócrates) o mediante el seminario alemán. La expresión de los diferentes

---

<sup>f</sup>La **mayéutica** es el método aplicado por Sócrates a través del cual el maestro hace que el alumno, por medio de preguntas, descubra conocimientos. El proceso es doloroso debido a las crueles interrogantes del método socrático, pero esto desencadena la iluminación, donde la verdad (en el sentido de este artículo, equivale al conocimiento general) parte desde el mismo individuo. La técnica consiste en preguntar al interlocutor acerca de algo (un problema, por ejemplo) y luego se procede a debatir la respuesta dada por medio del establecimiento de conceptos generales. El debate lleva al interlocutor a un concepto nuevo desarrollado a partir del anterior. La invención de este método del conocimiento se remonta al siglo IV a.C. y se atribuye por lo general al Sócrates histórico

conocimientos construidos individualmente por sus estudiantes, puede enriquecer el conocimiento de otros miembros de la clase, incluyendo el del profesor. La reflexión grupal, mediante el diálogo, propicia la crítica que nos acerca a la realidad sobre el tema investigado. En la educación, el fenómeno del “teléfono roto” se reduce cuando el estudiante va directamente a las fuentes de información haciendo una lectura de ellas, es decir, usando su inteligencia.

23. Que el **seminario alemán**, también llamado seminario investigativo<sup>g</sup>, es una técnica educativa que se puede adaptar sin que se pierdan sus objetivos. En resumen, una forma de esta técnica puede ser:
- a. Al azar o de forma voluntaria, se nombra un relator, un correlator y un secretario para la siguiente sesión del seminario
  - b. El **director** del seminario, indica a los estudiantes las fuentes de información disponibles en internet o en una fotocopiadora de la institución, que ellos deben leer (entender, comprender y confrontar) para la siguiente sesión de clase.
  - c. El **relator** expresa, durante máximo 20 minutos y sin interacciones, el conocimiento por él construido con sus lecturas.
  - d. El **correlator**, durante máximo 10 minutos y sin interacciones, confronta su conocimiento y sus dudas con lo expresado por el relator.
  - e. Los demás **seminaristas** toman nota de lo dicho, tanto por el relator como por el correlator y, normalmente, tienen urgencia de confrontar su conocimiento con el de ellos, especialmente sobre puntos de desacuerdo o de duda.
  - f. El director escribe en el tablero, una lista de los puntos sugeridos por los seminaristas para un diálogo, entre todos ellos, durante el resto del tiempo de la sesión de clase.
  - g. Los seminaristas votan por cada uno de estos puntos, y el diálogo se inicia en el orden de mayor a menor puntaje en la votación. Confrontando su verdad con la de los demás seminaristas, incluyendo al director, cada uno de ellos puede enriquecer o modificar la suya. Si hay justificación por el número y la importancia de los puntos no dialogados en una sesión, de común acuerdo, éstos se considerarán en la siguiente sesión.
  - h. El **secretario** escribe el acta de la sesión correspondiente, haciendo énfasis en los puntos de controversia y de duda. Acta que quedará disponible a todos los participantes, en internet o en la fotocopiadora adoptada para este seminario.

---

en referencia a la obra *Teeteto*, de Platón. Pero el Sócrates histórico empleó la llamada *ironía socrática* para hacer comprender al interlocutor que lo que se cree saber no está en lo que se pensaba como creencia y que su conocimiento estaba basado en prejuicios. La mayéutica, contrariamente a la ironía, se apoya sobre una teoría de la reminiscencia. Es decir, si la ironía parte de la idea que el conocimiento del interlocutor se basa en prejuicios, la mayéutica cree que el conocimiento se encuentra latente de manera natural en el alma y que es necesario descubrirlo. Este proceso de descubrimiento del propio conocimiento se conoce como **dialéctica** y es de carácter inductivo (Tomado textualmente de Wikipedia).

<sup>g</sup>Se le domina **seminario investigativo** ya que en él se desarrollan actividades intelectuales de modo sistemático con el propósito de crear o aumentar el conocimiento sobre una materia. En él, el estudiante realiza una investigación bibliográfica sobre un tema, con la orientación del director del seminario.

24. Que, para lograr un mayor desarrollo socioeconómico de un país, se hace necesario que éste recurra a su principal recurso que es su **pueblo educado**. Así lo han demostrado países como Corea del Sur que, en el término de pocos años, ha tenido un desarrollo impresionante al favorecer la educación de su pueblo.
25. Que presidentes de grandes empresas han manifestado su preferencia por escoger ingenieros, para ocupar puestos gerenciales, por su capacidad para analizar y solucionar problemas, lo cual es parte de su formación académica y, por tanto, de su desarrollo intelectual. Recordemos que la memoria y la inteligencia son dos facultades diferentes; una persona enciclopédica tiene una memoria bien desarrollada, pero no así, necesariamente, su inteligencia.

Todo lo anterior nos conduce a concluir:

1. Que somos seres únicos e irrepetibles desde nuestra sicología, etología y (con la excepción de los monocigóticos y clones) genética.
2. Que debemos estar permanentemente conscientes de esto para poder aceptar nuestras diferencias y así, no sólo poder convivir con cierto grado de paz y armonía, si no también estar dispuestos a encontrar validez en los argumentos del otro para así enriquecer nuestro conocimiento.
3. Que los conflictos materiales o intelectuales entre humanos sólo deben resolverse mediante el diálogo y no la fuerza bruta.
4. Que el educando podrá construir un mejor conocimiento general si recurre a varias fuentes de información conceptual, especialmente a las que ofrecen opiniones divergentes sobre un tema, pues éstas le proveerán mayor número de elementos de juicio para sacar sus propias conclusiones. Podríamos decir que estas diferencias son afortunadas, puesto que para que haya evolución material o intelectual debe haber variación que permita la selección.
5. Que uno no escoge sus padres (sus genes) ni el ambiente que lo forma o “domestica” (el dónde y cuándo nace, la cultura o subcultura, el estrato socioeconómico, la influencia familiar y de amistades, el colegio, etc.).
6. Que si uno no puede escoger sus genes (sus padres), ni el medio donde se crece y experimenta, ni el tipo de formación escolar que le permita desarrollar su inteligencia y su conocimiento, ¿hasta dónde puede ser uno responsable de sus actos, especialmente si uno crece en un estrato socioeconómico bajo, con necesidades básicas insatisfechas, en una subcultura no educada, en un hogar conflictivo, con amigos pandilleros, etc.? Con un buen desarrollo de la inteligencia en el contexto de una excelente educación, un individuo puede tomar las riendas de su comportamiento y ser una persona valiosa para su país.
7. Que con respecto al ambiente, el Estado es en gran parte responsable de esos actos, por mantener las diferencias en la calidad de la formación escolar de su pueblo, en medio de grandes diferencias socioeconómicas.

8. Que en la **instrucción** el estudiante debe repetir fielmente, en un examen, la verdad emanada de su profesor y, para obtener una buena calificación, no debe digerir esa verdad y sólo limitarse a copiarla intacta en su mente para “regurgitarla” en un examen, impidiendo así el ejercicio de su inteligencia y la construcción de sus conocimientos. Si esto es así, la instrucción debería estar proscrita en escuelas, colegios y universidades.
9. Que los nuevos estudiantes llegan a la universidad con rezagos de su formación previa, relativos a la ética, a la instrucción escolar recibida y su medio social y familiar.
10. Que, como una “verdad de a puño o de Perogrullo” que no se aplica, el Estado debe priorizar el control eficiente y eficaz de la corrupción, principalmente a nivel del mismo Estado y de las grandes corporaciones, para así contar con recursos económicos necesarios para cubrir las necesidades básicas de su pueblo en salud, vivienda, empleo y en educación.
11. Que la acción correctiva del Estado, en relación con la descomposición social, debe centrarse en sus causas y no en sus efectos, especialmente en la falta de una educación de alta calidad y de formación ética, que entendemos es su causa principal.
12. Que si aceptamos que no se debe penalizar al no culpable de sus hechos, el Estado debe transformar los penales en centros de resocialización (que hoy son centros de hacinamiento y escuelas del delito) y transformar las escuelas, colegios y universidades en centros de **educación** y no de **instrucción**.

Esta es la verdad del autor quien, consciente de que puede no ser cierta, espera, agradecido, recibir argumentos de otras verdades, que la enriquezcan, la modifiquen, la eliminen, o la demuestren ser utópica y que existen otras formas de hacer de Colombia un gran país con su pueblo instruido y no educado.

# NIDIFICACIÓN DEL ESCARABAJO COPRÓFAGO *Onthophagus curvicornis* LATREILLE, 1811 (COLEOPTERA: SCARABAEIDAE) EN CONDICIONES DE LABORATORIO<sup>a</sup>

## NIDIFICATION OF THE DUNG BEETLE *Onthophagus curvicornis* LATREILLE, 1811 (COLEOPTERA: SCARABAEIDAE) IN LABORATORY CONDITIONS

JOSÉ MAURICIO MONTES RODRÍGUEZ<sup>b</sup>

Recibido 12-04-2017, aceptado 08-05-2017, versión final 27-06-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** El escarabajo coprófago *Onthophagus curvicornis* está ampliamente distribuido en la región andina y es uno de los escarabajos más abundantes en áreas protegidas y ambientes urbanos y semiurbanos del área metropolitana de Medellín. Con el objetivo de estudiar la nidificación y la duración de su ciclo de vida, se colectaron individuos en el campus de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín y se confinaron en cámaras de cría de vidrio, las cuales se llenaron con tierra, a los escarabajos se les suministró excremento de vaca en la parte superior; en cada cámara se depositó una pareja del escarabajo. El patrón de nidificación de *O. curvicornis* es similar a lo reportado para otras especies del mismo género, sin embargo, la cooperación bisexual es mayor. Los escarabajos construyen túneles inclinados o verticales debajo de la fuente de alimento, con un promedio de 1.9 masas nido por túnel, en la construcción del nido participan tanto la hembra como el macho y alcanzan profundidades de  $16.06 \pm 6.27$  cm. Su ciclo de vida de huevo a adulto dura  $55.5 \pm 1.12$  días.

**PALABRAS CLAVE:** Biología de suelos; ciclo de vida; región andina; cría; cautiverio.

**ABSTRACT:** The dung beetle *Onthophagus curvicornis* is widely distributed in the Andean region and is the most abundant dung beetle in protected areas and urban and semi-urban environments in the metropolitan area of Medellin. With the aim of studying their nesting and life cycle; individuals were collected on the campus of the National University of Colombia in the Medellin city and were confined in glass rearing chambers, which were filled with soil and beetles were given cow dung in the top, in each chamber was deposited a couple of the beetle. The nesting pattern of *O. curvicornis* is similar to that reported for other species of the genus. Beetles built vertical or inclined tunnels under the food source, On average with 1.9 brood mass per tunel, nest building involves both, the female and male, and they reach depths of  $16.06 \pm 6.27$  cm and life cycle since egg to adult lasts  $55.5 \pm 1.12$  days.

**KEYWORDS:** Soil biology; life cycle; andean region; breeding; captivity.

<sup>a</sup>Montes Rodríguez, J.M. (2017). Nidificación del escarabajo coprófago *Onthophagus Curvicornis* Latreille, 1811 (Coleoptera Scarabaeidae) en condiciones de laboratorio. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 20–28. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64004>

<sup>b</sup>M.Sc. en Ciencias Entomología. Museo Entomológico Francisco Luis Gallego. Universidad Nacional de Colombia. [jmpamplonman@gmail.com](mailto:jmpamplonman@gmail.com)

## 1. INTRODUCCIÓN

El género *Onthophagus* tiene distribución mundial y es uno de los más grandes dentro de la familia Scarabaeidae, actualmente se registran 99 especies en el Neotrópico y 31 para Colombia (Medina *et al.*, 2001). Estudios sobre la biología en el género son escasos y se restringe a unas pocas especies, la mayoría de las cuales no se encuentran en Colombia (Halffter & Edmonds, 1982; González-Vainer & Morelli, 1999; Huerta & Cartwright, 2013; Arellano *et al.*, 2017).

Las especies del género *Onthophagus* son conocidas por tener hábito paracoprido, es decir construyen sus nidos debajo de la fuente de alimento (Halffter & Edmonds, 1982). El uso de cámaras de vidrio para el estudio de la nidificación ha resultado ser una metodología conveniente y exitosa para conocer aspectos de la biología del grupo, debido a que permite la fácil observación de la nidificación y la recuperación de masas nido para estudiar su ciclo biológico (Montes, 2008; González-Vainer & Morelli, 1999; Huerta & Cartwright, 2013).

El escarabajo coprófago *Onthophagus curvicornis* está ampliamente distribuido en la cuenca del río Cauca en los departamentos de Antioquia, Cundinamarca, Risaralda, Quindío y Valle del Cauca en alturas entre los 1023 a 2430 m (Medina *et al.*, 2001; Cultid *et al.*, 2012). Esta especie ha sido registrada en ambientes tan contrastantes como el interior de bosque y potreros y en diferentes tipos de excremento (Cultid *et al.*, 2012).

En muestreos preliminares *O. curvicornis* ha sido colectado en todo el Valle de Aburrá desde los 1470 metros hasta los 2040 metros, éste ha sido encontrado en ambientes urbanos y semiurbanos en donde es el escarabajo coprófago más abundante y que más participa en la remoción de excremento bovino en pasturas (Montes, 2008). Su actividad evita el crecimiento de las poblaciones de moscas de importancia pecuaria, además de fertilizar el suelo, todas estas actividades reconocidas como servicios ecosistémicos realizados por los escarabajos coprófagos de la familia Scarabaeidae (Nichols *et al.*, 2008).

Uno de los aspectos más importantes de la biología de los escarabajos coprófagos de la familia Scarabaeidae es la construcción de nidos en los cuales la hembra o la pareja protege a sus crías de enemigos naturales y evita la competencia con otros insectos por un recurso tan efímero como el excremento (Halffter & Edmonds, 1982). A pesar de avanzar en el conocimiento sobre distribución, taxonomía y preferencias ambientales de este grupo en el neotrópico, es poco lo que se conoce sobre su biología y nidificación (Montes, 2008), el objetivo de este trabajo es describir el proceso de nidificación y el ciclo de vida de *Onthophagus curvicornis* en condiciones de laboratorio.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

### 2.1. Colectas en campo

Se capturaron 30 individuos de *O. curvicornis*, 15 hembras y 15 machos, en el campus de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín ubicada en la zona urbana del municipio de Medellín con coordenadas  $6^{\circ} 15' 38''$  Norte y  $75^{\circ} 34' 33''$  Este, se utilizaron trampas de caída cebadas con excremento humano según lo recomendado por Villareal *et al.* (2004), el diseño de estas trampas se modificó con una lámina de acetato la cual permitía que los individuos entraran, pero que no salieran fácilmente, adicionalmente en el fondo, tierra húmeda fue adicionada para que los escarabajos se sintieran más cómodos y evitaran escapar, estas trampas estuvieron montadas durante un día y se recolectaron a las 6 p.m. y 9 a.m. Las colectas y las observaciones en las cámaras de cría se realizaron de Mayo a Septiembre del 2008.

### 2.2. Observaciones en cámaras de cría

Los escarabajos colectados se llevaron al laboratorio de entomología de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín el cual posee una temperatura promedio de  $21.9^{\circ}\text{C}$  y una humedad promedio de 53.8 %. Para observar el comportamiento de nidificación se utilizó la metodología propuesta por González-Vainer & Morelli (1998) con modificaciones, los escarabajos adultos se confinaron en cámaras de cría de vidrio, para este trabajo el tamaño fue de  $15 \times 1 \times 40$  cm de profundidad con una cara móvil la cual se sostuvo con cinta transparente y el sustrato fue suelo en lugar de arena (Figura 1a y 1d).

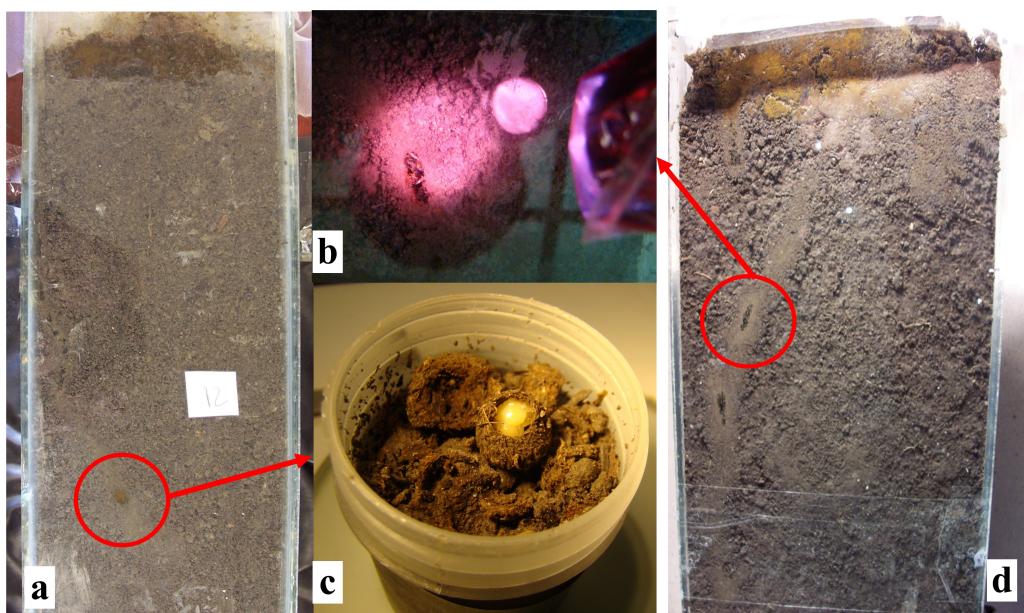


Figura 1: Metodología para el estudio de nidificación del escarabajo *Onthophagus curvicornis*. a. Cámara de cría con masa nido en círculo rojo. b. Observaciones con luz roja. c. Masa nido aislada con pupa en su interior. d. Cámara de cría con señal de túnel realizado por los escarabajos. Fuente: Elaboración propia.

Las cámaras se llenaron con tierra húmeda del mismo sitio donde se colectaron los escarabajos, a la tierra se le extrajo piedras, palos y cualquier otro objeto que pudiera ser un obstáculo para el proceso de nidificación. Se suministró excremento de vaca a los escarabajos en la parte superior de la cámara de cría; en cada cámara se depositó una pareja del escarabajo; el dimorfismo sexual es marcado y las hembras se separan de los machos por tener dos carenas transversas en la cabeza, mientras los machos no tienen estas carenas y tienen cuernos cefálicos curvos (Cultid *et al.*, 2012). En total se montaron 15 cámaras, cada una con una pareja, para un total de 15 parejas.

Para no alterar el comportamiento de los escarabajos, las cámaras de cría se forraron con un plástico negro y las observaciones se realizaron en un cuarto oscuro usando luz roja, para lo cual se forró la fuente de luz en papel celofán rojo (Figura 1b); se espera que los escarabajos no afecten su comportamiento con este tipo de luz, debido a que esta longitud de onda no estimula los ojos de la mayoría de los insectos (Chapman, 1998). Las observaciones se hicieron después de la introducción de los adultos en las cámaras de cría cada doce horas, durante 15 minutos, hasta los tres días, después de este tiempo no se encontró actividad adicional de los escarabajos en los nidos, también se finalizaron las observaciones cuando la hembra o los dos miembros de la pareja perdían el interés y querían abandonar la cámara de cría.

Después de obtener las observaciones las cámaras se desmontaron y las masas nido se separaron e individualizaron en frascos plásticos herméticos con tierra para prevenir su desecación, se observaron diariamente para determinar la duración de los estados de huevo, larva y pupa haciendo un pequeño orificio en la masa nido procurando afectar lo menos posible la larva del escarabajo (Arellano *et al.*, 2017) (Figura 1c). Se estimaron intervalos de confianza de cada estado de desarrollo con un nivel de confianza del 95 %.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

#### 3.1. Observaciones en cámaras de cría

En nueve de las 15 cámaras montadas se produjeron masas nido lo que corresponde al 60 %, y en éstas se produjo entre una a cinco bolas nido. La producción de masas nido se ve afectada por factores como la edad de los escarabajos, que pueden estar en la etapa previa a la madurez sexual o pueden estar muy viejos para generar nuevos nidos, lo cual está estrechamente relacionado con la época del año (González-Vainer & Morelli, 1999). La humedad del suelo también puede afectar la producción de masas nido en escarabajos del género *Onthophagus*, en este grupo las preferencias de humedad son específicas para cada especie (Sowig, 1995; Barkhouse & Ridsdill-Smith, 1985); y también podrían explicar porque no se generaron bolas nido en el 40 % de las cámaras de cría.

Se encontró que construyen uno o dos túneles inclinados o en algunos casos completamente verticales, debajo de la fuente de alimento; los túneles o galerías tienen de una a tres masas nido por túnel con un promedio de 1.9 y alcanzaron profundidades promedio de  $16.06 \pm 6.27$  ( $\alpha = 0.025$ ;  $n = 8$ ) cm, los túneles tuvieron un ancho de  $0.68 \pm 0.064$  cm ( $\alpha = 0.025$ ;  $n = 9$ ). Con una metodología similar, las masas nido

de la especie estrechamente relacionada *Onthophagus incensus* alcanzó profundidades entre 5 a 10 cm en laboratorio (Huerta & Cartwright, 2013) y las masas nido de otra especie del género, *Onthophagus lecontei* alcanzan los 5 a 8 cm. Sin embargo, factores del suelo como densidad aparente y humedad podrían afectar este resultado y deberán ser tenidas en cuenta antes de cualquier comparación entre estas especies.

### 3.2. Formación de las parejas y nidificación

Al llegar los escarabajos a la fuente de alimento, hay un período de reconocimiento entre macho y hembra, antes de empezar la construcción de los nidos, inicialmente cavan el túnel hasta el lugar donde se va a establecer la primera masa nido que es la más profunda, en algunos casos esta primera masa nido tiene una posición horizontal, esto sucedió dentro de las primeras 60 horas después del montaje de la cámara de cría; después de trasladar y compactar una cantidad suficiente de excremento, la hembra pone el huevo en posición erecta, este compartimiento es llamado la cámara del huevo por Halffter & Edmonds (1982), en este caso el huevo está justo encima de la masa nido (Figura 1a y 1b).

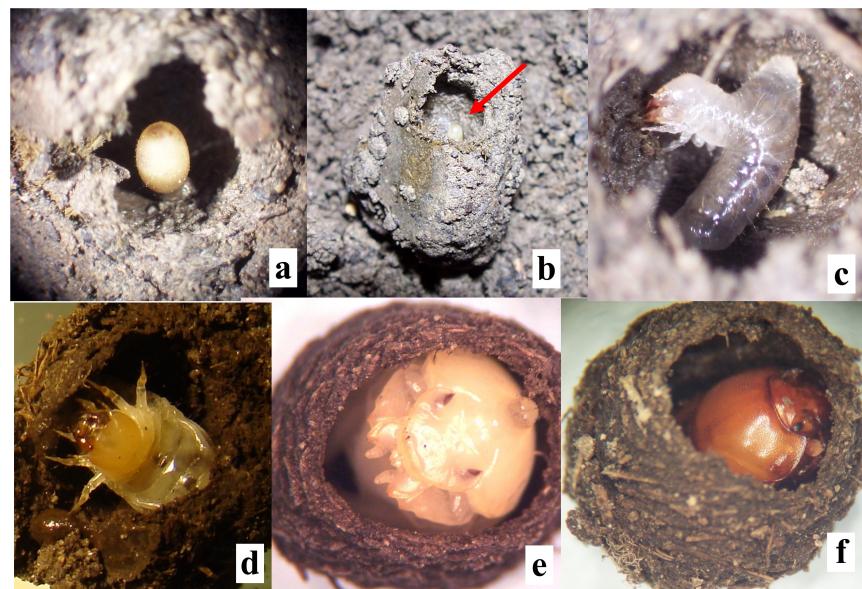


Figura 2: Ciclo de vida del escarabajo coprófago *Onthophagus curvicornis* Latreille 1811. a. Huevo. b. Masa nido (flecha señala la cámara del huevo). c. Larva en vista lateral. d. Larva vista frontal. e. Pupa f. Adulto teneral. Fuente: Elaboración propia.

En el momento deemerger la larva de primer estadio se dirige descendentemente y empieza a consumir el excremento de la masa nido (Figura 2c y 2d). Al terminar su desarrollo como larva y consumir todo el alimento preparado por sus padres, empieza a construir la cámara pupal con sus excrementos, los cuales excreta de forma líquida y moldea para formar una cavidad esférica o casi esférica de  $1.025 \pm 0.14$  cm en el máximo diámetro ( $\alpha = 0.025$ ;  $n = 4$ ) (Figura 2e y 2f). Del mismo modo cuando la cámara pupal es alterada, la larva de tercer estadio la reconstruye (Figura 2d), este mismo comportamiento es observado para *O. lecontei* (Arellano *et al.*, 2017).

NIDIFICACIÓN DEL ESCARABAJO COPRÓFAGO *Onthophagus curvicornis* LATREILLE, 1811 (COLEOPTERA: SCARABAEIDAE) EN CONDICIONES DE LABORATORIO.

Cuando la primera masa nido queda elaborada, los escarabajos la cubren con dos a cinco centímetros de tierra antes de construir la siguiente, se elaboraron como máximo tres masas nido por túnel, en esto coincide con la especie *Onthophagus incensus* (Huerta & Cartwright, 2013). Las masas nido tienen una longitud de  $1.67 \pm 0.43$  cm (alfa = 0.025; n = 14) y un ancho de  $1.0 \pm 0.07$  cm de ancho (alfa = 0.025; n = 4). La disposición de las masas nido usualmente fue lineal, aunque algunas presentaron ramificación (Figura 3).

La nidificación de *Onthophagus curvicornis* coincide con el patrón de nidificación Tipo I, según Halffter & Edmonds (1982), el cual se caracteriza porque el suministro de alimento para las larvas se forma empacando excremento al final de una galería la cual es llamada masa nido, que es más alargada y menos elaborada que la bola nido, común en los otros patrones de nidificación, la otra característica es la construcción por parte de la larva de último estadio de la cámara pupal.

Las especies de *Onthophagus* se separan respecto al patrón de nidificación, en dos grupos, los que forman túneles simples y los que forman túneles compuestos como *O. curvicornis*, en este último grupo los escarabajos muestran cooperación sexual, sin embargo, según Halffter & Edmonds (1982), en este género la ayuda del macho en la construcción de los nidos se restringe a la provisión inicial a los túneles, en *Onthophagus curvicornis* tanto el macho y la hembra se encuentran dentro de los túneles, colaborando en la construcción de las masas nido lo cual es considerado por estos mismos autores como “cooperación sexual considerable”, otras especies del género como *O. lecontei*, presentan esta misma característica (Arellano *et al.*, 2017).

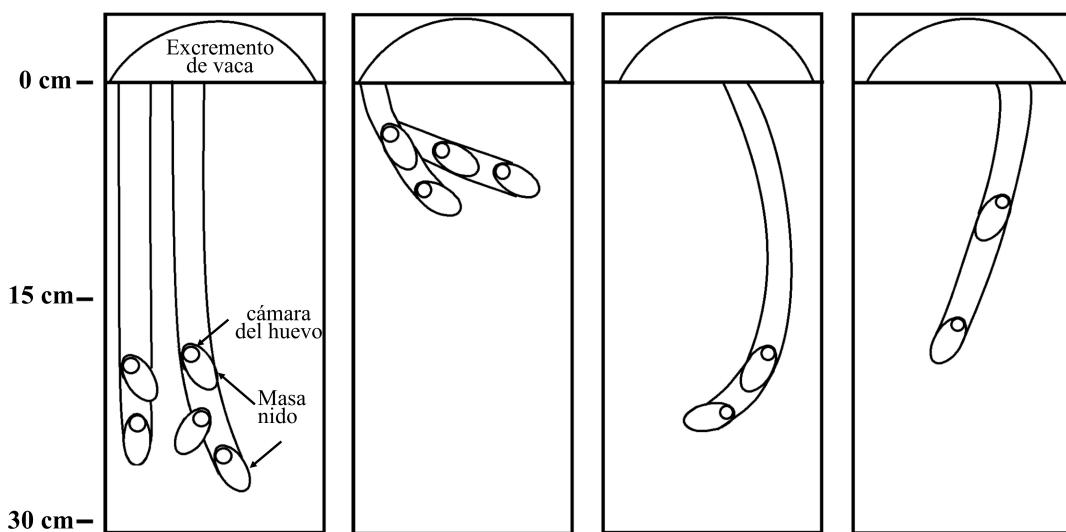


Figura 3: Diagramas de los nidos del escarabajo coprófago *Onthophagus curvicornis* Latreille en condiciones de laboratorio.  
Fuente: Elaboración propia.

La cooperación sexual es una ventaja respecto a otras especies que intentan utilizar excrementos en pasturas, debido a que la ayuda del macho permite llevar mayor cantidad de excremento en menos tiempo a los

túneles para producir mayor cantidad de masas nido; evitando de esta manera la desecación de este sustrato alimenticio y la competencia con otros escarabajos, generalmente la cooperación de los dos miembros de la pareja también se refleja en la fertilidad de la hembra y en más descendencia (Scholtz *et al.*, 2009).

El tamaño de las masas nido es de  $1 \pm 0.08$  cm de ancho y  $1.67 \pm 0.49$  cm ( $n=14$ ; alfa 0.025). Aunque no se midió el volumen de las masas nido, teniendo en cuenta que su forma se asemeja a una forma cilíndrica, su volumen sería de  $1.38 \pm 0.5$  cm<sup>3</sup> ( $n=14$ ; alfa 0.025). Este tamaño es menor a lo reportado para otras especies del género *Onthophagus* evaluadas en laboratorio como *O. incensus* (7.23 cm<sup>3</sup>); *O. hirculus* (4.15 cm<sup>3</sup>, estimado teniendo en cuenta largo y ancho y forma cilíndrica) y *O. lecontei* con 28.44 cm<sup>3</sup> (Huerta & Cartwright, 2013; González-Vainer & Morelli, 1999; Arellano *et al.*, 2017), sin embargo hay que tener en cuenta que el tamaño de la masa nido estaba restringido por el ancho de la cámara de cría, que era tan solo de 1 cm y que fue precisamente el promedio de las bolas nido, se espera que con mayor espacio las masas nido sean más grandes. Esto indicaría la capacidad de estos escarabajos de adaptarse a restricciones de espacio en el suelo para poder nidificar, como por ejemplo espacios angostos en suelos pedregosos, además la capacidad de desarrollar su ciclo de vida con menor cantidad de excremento, también sería una ventaja en ambientes con escaso recurso alimenticio o de menor tamaño.

### 3.3. Ciclo de vida

La duración de cada estado de desarrollo fue de  $3 \pm 1.06$  (alfa = 0.025;  $n = 10$ ) (Figura 2a y 2b) para el huevo;  $35.5 \pm 3.36$  días de larva (alfa = 0.025;  $n = 2$ ) (Figura 2c y 2d) y  $13 \pm 1.0$  días de pupa (alfa = 0.025;  $n = 2$ ) (Figura 2e); y un total de huevo a adulto es de  $55.5 \pm 1.12$  (alfa = 0.025;  $n = 2$ ). Este tiempo es mayor a lo registrado para otras especies del género *Onthophagus*, como *O. alluvius* (35 a 36 días); *O. browni* (30 días) en Norte América; *O. lecontei* (35 a 37 días) en México y *O. hirculus* (44 días) en Uruguay, y similar a *O. batesi* (57 días) (Howden & Cartwright, 1963; Halffter & Edmonds, 1982; González-Vainer & Morelli, 1999; Arellano *et al.*, 2017).

La especie más cercana taxonómicamente *O. incensus* tiene un desarrollo preimaginal menor (34 a 38 días) (Huerta *et al.*, 2010). Aunque la duración del estado de huevo y de pupa se solapan entre las dos especies, el de larva difiere de 22 días para *O. incensus* a 35 para *O. curvicornis*. Igualmente sucede con otras especies en el neotrópico, como *O. lecontei*, con 22 días en estado de larva (Arellano *et al.*, 2017); *O. landolti*, con 20 a 22 días en larva. (Pérez-Cogollo *et al.*, 2015) y *O. hirculus* con 28.7 días (González-Vainer & Morelli, 1999).

## 4. CONCLUSIONES

El escarabajo coprófago *Onthophagus curvicornis* se caracteriza por formar túneles inclinados o completamente verticales, que pueden ser lineales o ramificados, en donde tanto el macho como la hembra llevan el excremento para la construcción de las masas nidos de las cuales se va a alimentar su progenie, el ciclo de vida de huevo a adulto es estimado en  $55.5 \pm 1.12$  días.

## Referencias

- Arellano, L.; Castillo-Guevara, C.; Huerta, C.; Germán-García, A.; Lara, C. (2017). Nesting biology and life history of the dung beetle *Onthophagus lecontei* (Coleoptera: Scarabaeinae). *Animal Biology*, 67, 41-52.
- Barkhouse, J.; Ridsdill-Smith, T. J. (1985). Effect of soil moisture on brood ball production by *Onthophagus binodis thenbergi* and *Euoniticellus intermedius* (Reiche) (Coleoptera: Scarabaeinae). *Australian Journal of Entomology*, 25(1), 75-78.
- Chapman, R. F. (1998). The insects structure and function. *Cambridge University Press*, 770 p.
- Cultid M., C. A.; Medina U., C. A.; Martínez Q., B. G.; Escobar V., A. F.; Constantino C., L. M. & Betancourt P., N. J. (2012). Escarabajos coprófagos (Scarabaeinae) del Eje Cafetero: guía para el estudio ecológico. WCS Colombia, Cenicafe, Fedecafe, 196 p.
- González-Vainer., P.; Morelli, E. (1998). Estados preimaginales, nidificación y fenología de *Canthidium moestum* Harold, 1867 (Coleoptera, Scarabaeidae, Coprini). *Acta Zoologica Mexicana*, 73, 155-165.
- González-Vainer., P.; Morelli, E. (1999). Phenology and biology of the dung beetle *Onthophagus hirculus Mannerheim* (Coleoptera: Scarabaeidae). *The Coleopterist bulletin*, 53(4), 303-309.
- Halffter, G. & Edmonds, W. D. (1982). The nesting behavior of dung beetles, an ecological and evolutive approach. Instituto de Ecología. México D. F., 177 p.
- Howden, H. F. & Cartwright, O. L. (1963). Scarab beetles of the genus *Onthophagus Latreille* North of México (Coleoptera: Scarabaeidae). Proceedings of the United States National Museum. Smithsonian Institution. Washington D. C., 114(3467), 143 p.
- Huerta, C.; Martínez, I.; García-Hernández, M. (2010). Preimaginal development of *Onthophagus incensus Say*, 1835 (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae). *The Coleopterists Bulletin*, 64, 365-371.
- Huerta, C.; García-Hernández, M. (2013). Nesting Behavior of *Onthophagus incensus Say*, 1835 (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae): *The Coleopterists Bulletin*, 67(2), 161-166.
- Medina A., C. A.; Lopera T., A.; Vitolo, A. & Gill B. (2001). Escarabajos coprófagos (Coleoptera: Scarabaeidae: Scarabaeinae) de Colombia. *Biota Colombiana*, 2(2), 131-144.
- Montes R., J. M. 2008. Nidificación del escarabajo coprófago *Onthophagus aff. curvicornis* (Coleoptera: Scarabaeidae) Resúmenes Sociedad Colombiana de Entomología (Socolen) XXVIII Congreso, Cali, Colombia, julio 16-18 de 2008.
- Nichols, E.; Spector, S.; Louzada, J.; Larsen, T.; Amezquita, S.; Favila, M.E. (2008). Ecological functions and ecosystem services provided by Scarabaeinae dung beetles. *Biological Conservation*, 141(6), 1461-1474.

Pérez-Cogollo, L. C.; Rodríguez-Vivas, R. I.; Delfín-González, H.; Reyes-Novelo, E.; Morón, M. A. (2015). Life History of *Onthophagus landolti Harold*, 1880 (Coleoptera: Scarabaeidae), with Descriptions of the Preimaginal Stages. *The Coleopterists Bulletin*, 69(2), 255-263.

Scholtz, C. H; Davis, A. L. V. & Kryger, U. (2009). Evolutionary Biology and Conservation of Dung Beetles. Pensoft. Sofía, Moscú, 569 p.

Sowig, P. (1995). Habitat selection and offspring survival rate in three paracoprid dung beetles: the influence of soil type and soil moisture. *Ecography*, 18(2), 147-154.

Villareal, H.; Álvarez, M.; Córdoba, S.; Escobar, F.; Fagua, G.; Gast, F.; Mendoza, H.; Ospina, M.; Umaña, A. M., (2004). Manual de métodos para el desarrollo de inventarios de biodiversidad. Programa de Inventarios de Biodiversidad. Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt. Bogotá, Colombia, 236 p.

# ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE ÓXIDOS MIXTOS Zn-Al TIPO HIDROTALCITA EN PRECURSORES CATALÍTICOS CoNiMo FRENTE HDS DE TIOFENO<sup>a</sup>

## STUDY OF STRUCTURAL STABILITY OF MIXED OXIDES Zn-Al HYDROTALCITE TYPE IN CATALYTIC PRECURSORS CoNiMo FRONT HDS OF THIOFENO

RUTH ÁLVAREZ<sup>b,c\*</sup>, CARLOS LINARES<sup>c</sup>

Recibido 28-04-2017, aceptado 20-06-2017, versión final 12-07-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** La industria petrolera, es una de las principales fuentes responsable de emisiones atmosféricas tales como: CO, CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, NO<sub>x</sub>, hidrocarburos y partículas suspendidas, la cual busca mitigar la contaminación ambiental originada en sus refinerías utilizando algunos procesos, como el hidrotratamiento (HDT). El corazón del HDT, son los catalizadores empleados, en función al soporte catalítico y los metales usados durante su formulación. Es por ello, que esta investigación se centró en estudiar la estabilidad estructural de óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita (HT) en precursores catalíticos CoNiMo frente HDS de tiofeno, a una temperatura de calcinación de 450 °C. Inicialmente, se sintetizó el soporte catalítico HT a relaciones variables de Zn-Al de 0.00 a 1.00Al, una vez obtenido el intervalo óptimo de la HT (0.00-0.33Al), se procedió a formular los precursores catalíticos CoMo/NiMo, a través de dos etapas de calcinación, la primera se impregna el soporte tipo hidrotalcita (HT) sin calcinar con los metales CoNi y CoMo, luego de impregnar con dichos metales se calcina por única vez; mientras que en la segunda etapa, se calcina los sólidos antes de impregnar y después de la impregnación con los metales antes mencionados. Los resultados obtenidos denotan un excelente comportamiento para los catalizadores con doble etapa de calcinación, siendo los precursores CoMo más efectivos que NiMo; esto puede justificarse por las características fisicoquímicas de las fases de los metales involucrados y de sus vacantes de coordinación.

**PALABRAS CLAVE:** CoMo; emisiones atmosféricas; HDS; NiMo; óxidos mixtos Zn-Al.

**ABSTRACT:** The oil industry is one of the main sources responsible for atmospheric emissions such as: CO, CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, NO<sub>x</sub>, hydrocarbons and suspended particles, which seeks to mitigate environmental pollution from its refineries using some processes, such as hydrotreatment (HDT). The heart of the HDT is the catalysts used, depending on the

<sup>a</sup>Álvarez, R. & Linares, C. (2017). Estudio de la estabilidad estructural de óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita en precursores catalíticos CoNiMo frente HDS de tiofeno. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 29–45. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64506>

<sup>b</sup>Profesor Asociado, Facultad de Ciencias de la Salud. Escuela de Ciencias Biomédicas y Tecnológicas. Dpto. de Bioquímica. Unidad de Síntesis de Materiales y Metales de Transición (SIMMET). Universidad de Carabobo. Venezuela. ralvarez@uc.edu.ve

<sup>c</sup>Profesor Titular, Facultad de Ciencias y Tecnología. Dpto. de Química. Unidad de Síntesis de Materiales y Metales de Transición (SIMMET). Universidad de Carabobo. Venezuela. clinares@uc.edu.ve

catalytic support and the metals used during its formulation. Therefore, this research focused on studying the structural stability of mixed Zn-Al type hydrotalcite (HT) oxides in catalysts CoNiMo versus thiophene HDS at a calcination temperature of 450 °C. Initially, the catalytic support HT was synthesized at varying Zn-Al ratios of 0.00 to 1.00Al, once the optimal range of HT (0.00-0.33Al) was obtained, the catalytic precursors CoMo/NiMo, through two stages of calcination, the first is impregnated the support type hydrotalcite (HT) without calcining with the metals CoNi and CoMo, after impregnating with these metals is calcined once only; While in the second stage the solids are calcined before impregnation and after impregnation with the aforementioned metals. The obtained results show an excellent performance for the catalysts with double calcination stage, being CoMo precursors more effective than NiMo; this can be justified by the physicochemical characteristics of the phases of the metals involved and their coordination vacancies.

**KEYWORDS:** CoMo; atmospheric emissions; HDS; NiMo; Zn-Al mixed oxides.

## 1. INTRODUCCIÓN

El petróleo, el carbón y el gas natural son, en la actualidad, las fuentes principales de combustibles. Algunos de estos combustibles poseen altos contenidos de azufre, nitrógeno y metales, lo cual produce cantidades considerables de sustancias tóxicas tales como óxidos de azufre ( $\text{SO}_x$ ), nitrógeno, ( $\text{NO}_x$ ), monóxido de carbono (CO) y aromáticos que tienden a ser liberados a la atmósfera provocando efectos tales como la *lluvia ácida, efecto invernadero y cambios climáticos* (Mustafa & Hanni, 2006). Existen algunas leyes que establecen los límites que regulan las concentraciones máximas permisibles de estos contaminantes tanto en el aire como en los combustibles (Acta del Aire Limpio, 2004; APA, 1970; Decreto 638, 1995); por lo que existen diversos procesos empleados para contribuir a su disminución. Así, uno de los procesos más utilizado en la industria petrolera es el *hidrotratamiento* (HDT) que utiliza un catalizador específico que en presencia de hidrógeno, a altas presiones y altas temperaturas puede remover algunos heteroátomos tales como: S, N, aromáticos, metales y oxígeno. La hidrodesulfuración (HDS), es una de las reacciones incluidas en el hidrotratamiento, se utiliza para la remoción de azufre de fracciones del petróleo, siendo el proceso de mayor relevancia para producir combustibles limpios. El porcentaje de compuestos sulfurados contenidos en el crudo ha venido aumentando a razón de 0.25 % anual, debido a las características y calidad del petróleo tratado, en consecuencia aumentan los costos del proceso de refinación, ya que la presencia de estos compuestos, causa problemas operacionales y de calidad ambiental (Álvarez, 2015; Mustafa & Hanni, 2006).

Actualmente los catalizadores convencionales: CoMo/soportados en alúmina ( $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ ) empleados en la industria petrolera para la remoción de heteroátomos de la fracción liviana del crudo son poco eficientes, a la hora de tratar combustibles con alto contenido de azufre (Álvarez & Linares, 2015; Fernández *et al.*, 2009). Es por ello, que surge la necesidad de proponer nuevos catalizadores que logren aumentar la selectividad, actividad y estabilidad de los procesos de HDS y que puedan reducir efectivamente el contenido de azufre en los combustibles. Este trabajo se centró en estudiar la estabilidad estructural de óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita en precursores catalíticos CoNiMo frente HDS de tiofeno, a una temperatura de calcinación de

450 °C. Con esta investigación, se buscó estudiar el comportamiento de los óxidos mixtos Zn-Al como base en la estructura de los precursores catalíticos CoMo y NiMo, considerando dos etapas de calcinación. La primera se impregna el soporte tipo hidrotalcita sin calcinar con los metales Co, Ni y Mo, luego de impregnar con dichos metales se calcina una única vez; la segunda etapa se calcina antes de impregnar y después de impregnación con los metales recién mencionados. La propiedad del sólido en estudio, es el contenido de zinc, en la matriz del soporte catalítico, ya que el mismo, es adicionado en los catalizadores convencionales CoMo/ $\gamma$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, en pasos subsiguientes para evitar la formación de espinelas que comprometan la eficiencia del catalizador en las reacciones de hidrotratamiento, este último proceso podría ser laborioso en la industria petrolera para la refinación del crudo; lo que lleva a la necesidad de desarrollar, nuevos catalizadores que contengan este metal directamente en la estructura del soporte, pensando en una mejor efectividad de óxidos mixtos Zn-Al provenientes de materiales tipo hidrotalcita, como una alternativa de soporte, contribuyendo así, con resultados que puedan ser una opción de mejoras con respecto a los catalizadores convencionales (Fernández *et al.*, 2009).

## 2. PARTE EXPERIMENTAL

### 2.1. Síntesis del soporte y los precursores catalíticos

#### 2.1.1. Soporte

Para determinar el intervalo óptimo de obtención de la hidrotalcita Zn-Al, se planteó sintetizar la misma, a partir de la variación en relaciones molares de 0-1 de los metales que la conforman (Zn-Al), ajustando el pH de la solución a 12 con agitación constante. Las mezclas empleadas fueron sales de nitrato de aluminio (Al(NO<sub>3</sub>)<sub>3</sub>.9H<sub>2</sub>O) y Zinc (Zn(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>.6H<sub>2</sub>O). Se prepararon soluciones de diferentes relaciones molares de (Al)/(Al+Zn), disueltos en agua, realizando la variación de 0.00; 0.20; 0.25; 0.33; 0.50; 0.75; 0.90 y 1.00 en aluminio. Por su parte, se preparó una solución de la mezcla alcalina de NaOH/Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub> de 2 M en NaOH y 0.125 M en Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>. La síntesis de los sólidos se llevó a cabo de la siguiente manera: 50 mL de la solución de NaOH/Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub> (2 M/0.125 M), se hizo gotear sobre 50 mL de las soluciones Al(NO<sub>3</sub>)<sub>3</sub>.9H<sub>2</sub>O y Zn(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>.6H<sub>2</sub>O a (25 ± 1) °C, bajo agitación constante. Se continuó agitando por espacio de 1.5 horas, midiendo el pH cada 30 minutos, con papel indicador de pH. Se colocó el producto obtenido en la estufa a (80 ± 1) °C por 24 horas. Se filtró el sólido obtenido, y se lavó con agua destilada hasta pH neutro. Se secó el sólido en la estufa a (80 ± 1) °C por espacio de 18 horas (Álvarez, 2015; Toffolo, 2008; Kloprogge *et al.*, 2004; Zhao *et al.*, 2003). Para identificar las propiedades físicas y químicas del soporte catalítico (hidrotalcita Zn-Al), se aplicaron las técnicas instrumentales tales como: espectroscopía de absorción infrarroja con transformada de Fourier (FT-IR) y difracción de rayos X (DRX).

#### 2.1.2. Precursor catalítico

Para sintetizar los sólidos se procedió a determinar el volumen de poro para cada relación según Linares *et al.* (2005). Este procedimiento, sirvió de base para el proceso de impregnación del soporte con las sales de

$\text{Co}(\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O})$  y  $\text{Mo}(\text{Mo}_7\text{O}_{24}(\text{NH}_4)_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O})$ , el cual se realizó por el método de humedad incipiente con una relación atómica Co:Mo de 3:1 y una concentración de  $\text{MoO}_3$  del 15% p/p (Linares *et al.*, 2005). Este protocolo fue similar para el resto de los precursores catalíticos NiMo, donde sólo se varió los metales de Ni involucrados en el sistema catalítico (Álvarez, 2015). Los sólidos se obtuvieron aplicando dos metodologías de calcinación con una temperatura de 450 °C. (Zhao *et al.*, 2003). La etapa 1, de la síntesis de los precursores catalíticos, sólo contempla la calcinación de los sólidos, una vez impregnado con los metales CoMo y NiMo. Cabe señalar, que el Mo es responsable de la fase activa del precursor y Co y Ni, de la fase promotora en el catalizador. Por su parte, en la etapa 2, se procedió a realizar la doble calcinación del soporte catalítico antes de impregnar y después de la impregnación con los metales Co, Ni y Mo. La cantidad de gramos calcinado para cada relación fue distribuida para los dos tipos de precursores catalíticos CoMo/NiMo/óxidos mixtos Zn-Al.

La nomenclatura empleada en el desarrollo de esta investigación, fue: S: tipo de serie obtenida, X: tipo de precursor sintetizado (X: A=CoMo; B=NiMo) y N se refiere al número de calcinaciones, para este caso N=1 (Etapa 1: Una calcinación (1C) antes de la impregnación con CoMo/NiMo); N=2 (Etapa 2: dos calcinaciones (2C) antes y después de la impregnación con CoMo/NiMo), todos los precursores catalíticos soportados en óxidos mixtos Zn-Al de 0.00 a 0.33. Una vez obtenidos los respectivos precursores catalíticos, se procedió a la caracterización de los mismos, empleando técnicas instrumentales tales como: Difracción de Rayos X (DRX) y Reducción a Temperatura Programada (TPR). Los catalizadores obtenidos fueron evaluados en la reacción de HDS de Tiofeno (ver Sección 3.3.).

## 2.2. Caracterización de los sólidos obtenidos

### 2.2.1. Espectroscopía de Absorción Infrarrojo (FT-IR)

La espectroscopía de absorción infrarroja permite determinar la presencia de ciertos grupos funcionales. Debido a las múltiples vibraciones que ocurren en la molécula de forma simultánea, se origina el espectro correspondiente, el cual dependerá de las características de los grupos funcionales que conforman la molécula. Las muestras se prepararon homogeneizando el sólido en bromuro de potasio (KBr), para formar una pastilla. Una vez obtenida la pastilla, se colocó en un espectrofotómetro de infrarrojo *Shimadzu* modelo FTIR-8400S con transformada de *Fourier*. La muestra se dejó correr de 4000 a 400  $\text{cm}^{-1}$  (Kloprogge *et al.*, 2004).

### 2.2.2. Difracción de rayos X (DRX)

La difracción de rayos es una técnica de análisis estructural, la cual se utiliza para identificar la naturaleza de las fases cristalinas presentes en el sólido, monitorear la cinética de transformaciones básicas y estimar de manera precisa la forma y el diámetro promedio de los cristales. Las muestras se prepararon siguiendo la técnica del polvo, el cual consiste en colocar el polvo finamente dividido en un porta-muestra adecuado, posteriormente se hace pasar un rayos X proveniente de una fuente de cobre. Para ello, se

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE ÓXIDOS MIXTOS Zn-Al TIPO HIDROTALCITA EN PRECURSORES CATALÍTICOS CoNiMo FRENTE HDS DE TIOFENO.

utilizó un difractómetro *Phillips*, operado en las siguientes condiciones: Radiación de cobre: CuK ( $\alpha$ ),  $\lambda$ : 1.542 Å, Voltaje: 30 Kv, Intensidad de corriente: 20 mA, Velocidad de goniómetro:  $2^\circ$  ( $2\theta$  /min.). Los difractogramas se tomaron entre  $5^\circ$  y  $80^\circ$  ( $2\theta$ ) (Álvarez & Linares, 2015; Zhao *et al.*, 2003).

### 2.2.3. Reducción a Temperatura Programada (TPR)

La reducción a temperatura programada es una técnica extremadamente sensible que permite estudiar el proceso de reducción de un sólido con hidrógeno. La reducción se realiza haciendo pasar una corriente de  $H_2$  sobre la muestra en las condiciones de temperatura programadas. En la Tabla 1, se muestran las condiciones del análisis de reducción a temperatura programada (TPR) de los precursores catalíticos (Álvarez, 2015).

Tabla 1: Condiciones del análisis de reducción a temperatura programada (TPR) de los precursores catalíticos.

Condición	Pre-tratamiento	Análisis
Masa del catalizador (mg)		150
Composición del gas	Aire (30mL/min)	10 % $H_2$ / Ar: 50 mL/min
Velocidad de calentamiento ( $^\circ C/min$ )	10	10
Intervalo de temperatura ( $^\circ C$ )	Desde: $T_{amb}$ . Hasta: $T = 550^\circ C$ por 60 min.	Desde: $T_{amb}$ . Hasta: $T = 1050^\circ C$ por 60 min.

## 2.3. Estudio de la estabilidad estructural de óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita en precursores catalíticos CoNiMo frente HDS de Tiofeno

En la Tabla 2, se muestran las condiciones empleadas para cada fase de activación y reacción de los precursores catalíticos.

Tabla 2: Condiciones de análisis empleadas en la evaluación de los diferentes precursores catalíticos.

Condiciones	Fase	
	Sulfuración	Reacción
Cantidad de catalizador (mg)		200
Solución empleada	$CS_2$ (10%V/V)	tiofeno (6%P/V)
Flujo de alimentación	(10 mL. $h^{-1}$ ) / heptano	(1 mL. $min^{-1}$ ) /heptano
Velocidad de alimentación	$0.0833^\circ C s^{-1}$	$2.79 \cdot 10^{-4} cm^3 s^{-1}$
Flujo de $H_2$	100 mL. $h^{-1}$	$0.25 cm^3 s^{-1}$
Temperatura $^\circ C$	400	280
Tiempo de reacción	4h	4h

En la Figura 1, se muestra un esquema del equipo empleado para la evaluación de los precursores catalíticos

CoMo/NiMo/óxidos mixtos Zn-Al en la reacción de hidrodesulfuración (HDS) de tiofeno, tanto para la activación como para la etapa de reacción. La fase de reacción y prueba catalítica de los precursores sintetizados, se realizó utilizando la molécula de tiofeno, por su tamaño y propiedad fisicoquímica, la cual hace que sea atractiva para ser empleada como modelo de respuesta en el estudio de la estabilidad estructural de los óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita. La reacción fue monitoreada, a través de un cromatógrafo de gases con detector de ionización a la llama (CG-FID), Varian 3800 (AutoSystem XL), donde cada siete minutos se tomó muestra del producto de reacción y la conversión se obtuvo a partir de las áreas relativas del tiofeno, molécula modelo y el heptano como medio diluyente. El cálculo de la conversión, ver Ecuación 1, se realizó en base a la disminución del área del pico del tiofeno, el cual aparece en un tiempo de retención cercano a los 2.6 min., y el pico del heptano a un tiempo de retención cercano a los 3.20 min. (Álvarez, 2015; Álvarez *et al.*, 2010; Toffolo, 2008).

$$C = \left( \frac{A_{\text{otiofeno}} - A_{\text{tiofeno}}}{A_{\text{otiofeno}}} \right) \times 100 \quad (1)$$

Donde:  $A_{\text{otiofeno}}$ = Área inicial del tiofeno;  $A_{\text{tiofeno}}$ = Área final del tiofeno; C= conversión. Siendo el  $A_{\text{otiofeno}}$  determinada al inyectar al cromatógrafo 0.2  $\mu\text{L}$  de una solución al 10 % de tiofeno en heptano.

Las condiciones experimentales fueron establecidas según investigaciones previas y están relacionadas con las empleadas en la industria petrolera (Linares *et al.*, 2005). La recolección de datos se estableció en función del catalizador comercial (CoMo/Γ-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), el cual es ampliamente conocido, presenta un área específica (AE-BET) de 200m<sup>2</sup>/g (Liang *et al.*, 2009; Iova *et al.*, 2000). Es importante resaltar que, por investigaciones previas, se recomienda realizar la toma de muestra en un tiempo de siete minutos para cada reacción en estudio, a fin de observar la conversión y estabilidad de cada uno de los catalizadores, el tiempo planteado fue en función de costos y funcionamiento de los equipos a emplear para el análisis (Álvarez, 2015; Toffolo, 2008).

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

#### 3.1. Soporte catalítico

##### 3.1.1. Espectroscopía de absorción infrarroja (FT-IR) y Difracción de Rayos X (DRX)

Con esta técnica se obtuvo información sobre la síntesis de la hidrotalcita a través del seguimiento en la transformación de las sustancias de partida Al(NO<sub>3</sub>)<sub>3</sub>.9H<sub>2</sub>O y Zn(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>.6H<sub>2</sub>O, NaOH y Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>, con su respectivo ajuste de pH=12, al sólido de interés, observándose el producto por medio de las bandas características de la hidrotalcita Zn-Al. En la figura 2, se muestran los espectros característicos para cada relación de óxidos mixtos Zn-Al sintetizada, se evidencia los espectros de infrarrojo obtenidos en la síntesis de la hidrotalcita Zn-Al antes de la etapa de calcinación. Para el caso de la alúmina, se considera que se

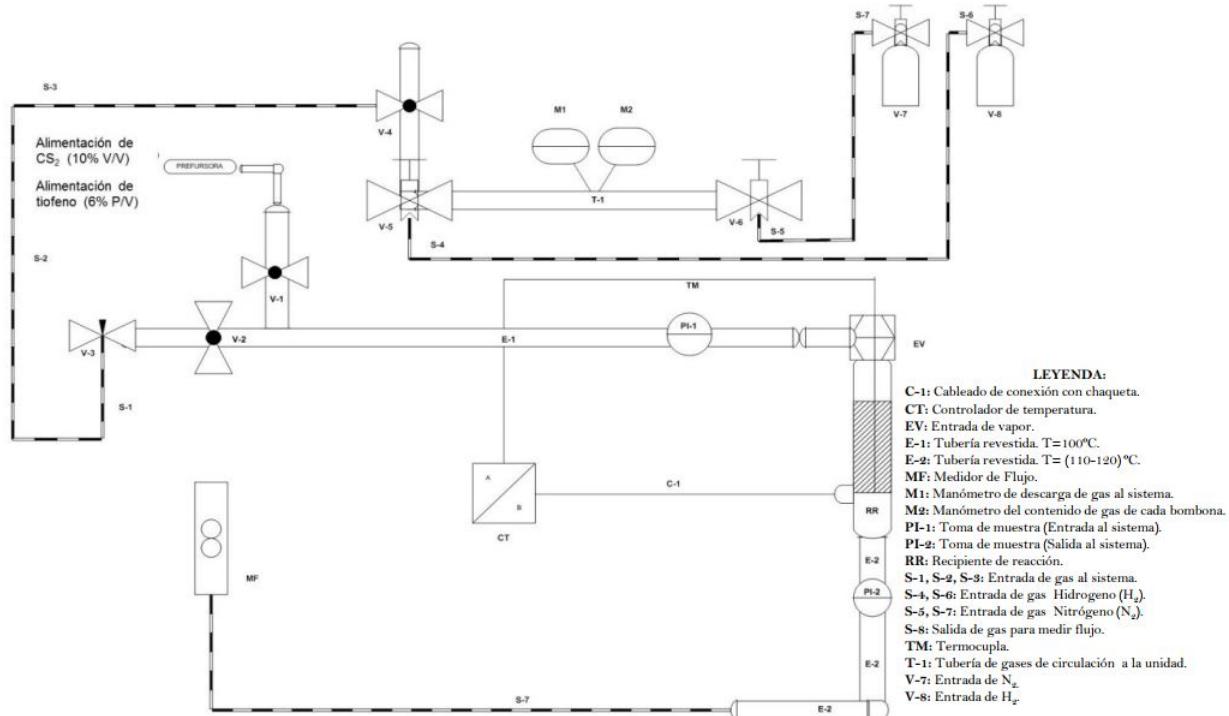


Figura 1: Diagrama del equipo empleado en la hidrodesulfuración de tiofeno. Fuente: Álvarez (2015), Toffolo (2008).

encuentra ya calcinada, por ser una muestra comercial. Todos los espectros muestran una banda ancha similar por encima de los  $3000 \text{ cm}^{-1}$ , esta banda ancha generalmente está compuesta por tres bandas superpuestas a diferentes longitudes de onda: 3025, 3348 y  $3468 \text{ cm}^{-1}$ . La banda a  $3025 \text{ cm}^{-1}$  corresponde a los enlaces  $\text{CO}_3^{2-}-\text{H}_2\text{O}$ , la banda a  $3348 \text{ cm}^{-1}$  se adscribe al  $\text{H}_2\text{O}$  interlaminar que rodea los aniones y la banda ancha a  $3468 \text{ cm}^{-1}$  se asigna al estiramiento del enlace metal-OH. Con esta última banda no se puede distinguir si se trata de la presencia de Al o Zn en el medio (Kloprogge *et al.*, 2004). Las bandas observadas por debajo de los  $1000 \text{ cm}^{-1}$  corresponden a enlaces O-M, M-O-M y O-M-O, donde M, es Al o Zn, también se presenta en la misma zona un conjunto de bandas débiles producto del agua fisisorbida (Monzón *et al.*, 1999). En esta misma figura, al comparar las relaciones Zn-Al de 0.00 y 1.00 (extremos de la serie de hidrotalcita Zn-Al), se puede notar que presentan diferencias considerables entre sí. En la relación 0.00 Al, se observan sólo la presencia de bandas por debajo de los  $700 \text{ cm}^{-1}$  que pueden corresponder a las bandas características de la translocación de los enlaces Zn-OH (615, 535 y  $440 \text{ cm}^{-1}$ ), pero que no pueden ser distinguidas claramente (Kloprogge *et al.*, 2004). Para la relación 1.00, donde sólo hay Al presente, se observa una banda alrededor de los  $900 \text{ cm}^{-1}$  correspondiente a la deformación de los enlaces Al-OH, y una banda alrededor de los  $1600 \text{ cm}^{-1}$  que puede asignarse a las vibraciones de estiramiento y doblamiento de los enlaces con el grupo OH o agua ocluida dentro del sólido. Las bandas que se observan en el intervalo de los 300 a  $1000 \text{ cm}^{-1}$  se asignan a las vibraciones características de los enlaces Al-OH y O-Al-O-Al de la alúmina (Mac *et al.*, 2008). En cuanto a las relaciones de Zn-Al entre 0.20 y 0.90

se observan marcadamente las bandas características de la hidrotalcita en la zona entre los 1000 y 400  $\text{cm}^{-1}$ . El análisis de los componentes de las bandas muestra la complejidad de los espectros en esta zona debido al solapamiento de bandas correspondientes a los enlaces Zn-OH, Al-OH,  $\text{CO}_3^{2-}$  y  $\text{NO}_3^-$ . Un patrón característico de hidrotalcita se describe en las muestras de relación entre 0.20 y 0.33 en Al, donde según López-Salinas & Pedraza (1998), se obtiene la hidrotalcita con una banda ancha con hombros alrededor de los 836  $\text{cm}^{-1}$  y bandas pronunciadas a 586 y 456  $\text{cm}^{-1}$  correspondientes a deformaciones en los enlaces Al-OH y Zn-OH. Luego estas bandas tienden atenuarse para las muestras con relaciones mayores a 0.33 donde el contenido de Al es mayor. A medida que aumenta la relación anterior, la banda ancha a 836  $\text{cm}^{-1}$  tiende a ser más ancha y a desplazarse a longitudes de onda mayores. Asimismo, las bandas a 586 y 456  $\text{cm}^{-1}$  tienden a desaparecer. Estos cambios evidentemente corresponden a la desaparición de la estructura tipo hidrotalcita. En su lugar, una banda ancha y pequeña alrededor de los 1000  $\text{cm}^{-1}$  tiende aemerger, esta banda se encuentra relacionada con bandas correspondientes a las deformaciones Al-OH y al estiramiento asimétrico de los aniones carbonato (Kloprogge *et al.*, 2004), producto de la mayor concentración de este metal en el sólido. En la misma figura 2, también se pueden observar tres bandas entre 1300 y 1600  $\text{cm}^{-1}$ . Aquella banda ubicada alrededor de los 1490  $\text{cm}^{-1}$  puede estar asociada a la presencia de iones carbonatos en la región interlaminar. Aparece también una banda alrededor de los 1300  $\text{cm}^{-1}$  que puede estar relacionada con los iones nitrato y finalmente una alrededor de los 1600  $\text{cm}^{-1}$  que puede ser producto del agua ocluida en las láminas de los sólidos. En el intervalo de relaciones entre 0.20 y 0.33, justo en el intervalo de la formación de la hidrotalcita, estas bandas son más intensas, fuera de este intervalo las mismas bandas son más débiles o tienden a desaparecer. La razón de esto, puede estar asociada a la naturaleza catiónica de la hidrotalcita, la cual necesita de los aniones carbonatos y nitratos para compensar la carga residual positiva originada por la sustitución de los cationes  $\text{Al}^{3+}$  por  $\text{Zn}^{2+}$ . Para la alúmina calcinada, evidentemente estas bandas alrededor de los 1400-1300  $\text{cm}^{-1}$  no están presentes debido a la calcinación de la alúmina después de su síntesis. Por último, los espectros obtenidos para los sólidos con doble calcinación, fueron similares a los mostrados en la figura 2, se evidencio la ausencia de la banda ancha por encima de los 3000  $\text{cm}^{-1}$ , la cual, está compuesta por tres bandas superpuestas a diferentes longitudes de onda: 3025, 3348 y 3468  $\text{cm}^{-1}$ , así como, la banda a 1600  $\text{cm}^{-1}$ , tal y como se mencionó anteriormente. Cabe resaltar, que la banda alrededor de los 1490  $\text{cm}^{-1}$  asociada a iones carbonatos en la región interlaminar, se presume que estas especies sean las responsables del efecto memoria que posee este sólido tipo hidrotalcita, tal vez este comportamiento haga atractivo el uso de la HT para HDS, ya que puede compensar estructuralmente las especies involucradas en el medio (Isa *et al.*, 2008).

### 3.1.2. Difracción de rayos X (DRX)

Esta técnica se aplicó tanto al soporte catalítico de relación 0.00-1.00 Al como a los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al (0.00-0.33Al). En la figura 2, se encuentran los resultados obtenidos en la síntesis de las hidrotalcita de relación (Al)/(Al+Zn) variable antes de su calcinación con excepción de la muestra de alúmina pura ( $\gamma$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), la cual fue obtenida después de ser calcinada (Álvarez, 2015). Para las relaciones (Al)/(Al+Zn) extremas 0.00 y 1.00, los patrones de difracción son

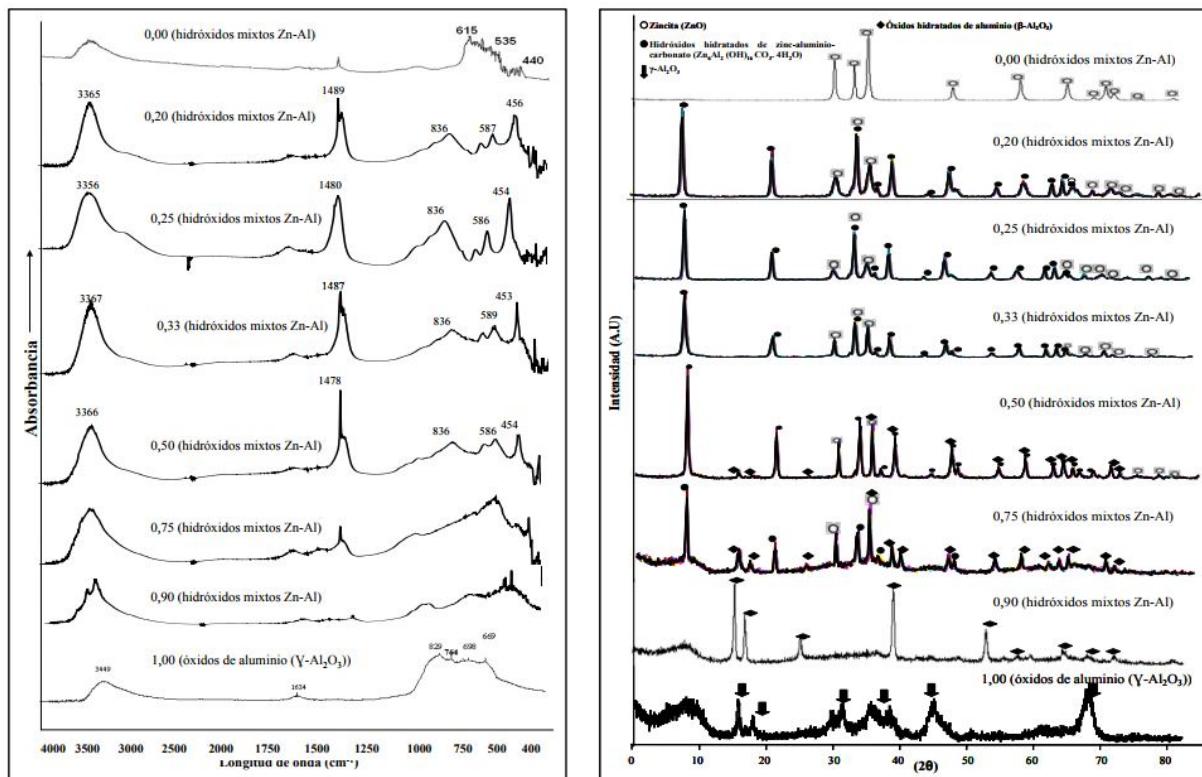


Figura 2: FT-IR y DRX del soporte catalítico hidróxidos mixtos Zn-Al con relación molar variable: 0.00; 0.20; 0.25; 0.33; 0.50; 0.75; 0.90 y 1.00. Fuente: Elaboración propia.

totalmente diferentes a los encontrados en los patrones intermedios. En la condición  $(\text{Al})/(\text{Al}+\text{Zn}) = 0.00$ , existe sólo la presencia de ZnO (zincita-JCPDS PDF:75-1526), la cual se caracteriza por los picos determinados a  $2\theta = 31.9; 34.5; 36.3; 47.6; 56.8; 62.9$  y  $68.2$  correspondientes a la reflexión de los planos (100), (002), (101), (102), (110), (103) y (112) de acuerdo a lo reportado por Seftel *et al.* (2008). Para la relación  $(\text{Al})/(\text{Al}+\text{Zn}) = 1.00$ , donde sólo hay Al presente en el gel de reacción, el difractograma obtenido corresponde con la gamma alúmina (JCPDS PDF: 480367). La poca definición de los picos, determinada por la baja intensidad y su gran amplitud, es característica de una estructura que se puede considerar parcialmente amorfa. Para las relaciones  $(\text{Al})/(\text{Al}+\text{Zn})$  intermedias, entre 0.20 y 0.90, siempre existe la presencia de Al y Zn en diferentes proporciones, una menor relación implica una mayor concentración de Zn; lo inverso se refiere a una mayor concentración de Al en el gel de reacción. En el intervalo de las relaciones entre 0.20 y 0.75 se encuentra picos estrechos y simétricos a  $2\theta: 8, 20, 33$  y  $38$ ; y picos más anchos y asimétricos a  $2\theta: 46, 60$  y  $62$  que corresponde con los planos de Miller: (003), (006), (110), (113) (102), (105) y (108). Estos picos corresponden con las arcillas laminares dobles tipo hidrotalcita (JCPDS PDF: 38-0486). La intensidad de los picos de la hidrotalcita es mayor en el intervalo de relación  $(\text{Al})/(\text{Al}+\text{Zn})$  entre 0.20 y 0.33, donde según lo reportado por López-Salinas & Pedraza (1998) es el intervalo ideal para la formación de la hidrotalcita, la cual se denota en el difractograma con picos identificados con círculos

rellenos. Asimismo, se observa una serie de picos (círculos no llenos), no concordante con los de la hidrotalcita, los cuales pertenecen a la fase zincita ( $\text{ZnO}$ ). Según Seftel *et al.* (2008), el  $\text{ZnO}$  es formado en la superficie de las láminas de la hidrotalcita. La presencia de  $\text{ZnO}$  puede estar asociada al pH de la reacción, el cual en condiciones muy básicas ( $\text{pH} > 14$ ) tiende a su precipitación. Sin embargo, y a pesar del cuidado obtenido en el pH de reacción ( $\text{pH} = 12$ ), fue imposible evitar la precipitación del Zn como  $\text{ZnO}$ . Estos picos del  $\text{ZnO}$  fueron encontrados en todas las relaciones de 0.20 hasta 0.75. Los picos de la hidrotalcita tienden a disminuir a medida que aumenta la relación  $(\text{Al}) / (\text{Al} + \text{Zn})$ . Ya para una relación de 0.50 y 0.75, la muestra es caracterizada por el gran ruido de fondo, observándose otros picos que comienzan aparecer (rombos llenos), los cuales son diferentes a los de la hidrotalcita o a la fase de  $\text{ZnO}$ . Estos picos se refieren a especies que corresponden a óxidos hidratados de aluminio ( $\beta\text{-Al}_2\text{O}_3\cdot 3\text{H}_2\text{O}$ -JCPDS PDF: 08-0096). Para una relación de 0.90, los picos de la hidrotalcita y de  $\text{ZnO}$  ya prácticamente han desaparecido, formándose de manera más definida la fase de alúmina previamente mencionada. Al observar el comportamiento del soporte catalítico, al aumentar el contenido de Al, se percibe la presencia de algunas fases colaterales como óxidos de zinc (JCPDS PDF: 75-1536) y especies de óxidos hidratados de aluminio (JCPDS PDF: 08-0096). Para el caso de la relación 0.90, no se determinó la presencia de la fase hidrotalcita, quizás por el alto contenido de Al presente en relación a la cantidad Zn presente en el gel. Los resultados anteriores coinciden con los resultados obtenidos por FT-IR, en donde las relaciones entre 0.20 y 0.50 sólo se observa la presencia de hidrotalcita, tal como lo reporta la bibliografía (López-Salinas & Pedraza, 1998), acompañada por la fase de  $\text{ZnO}$  antes mencionada. De acuerdo al objetivo principal de esta investigación, una vez obtenido el intervalo óptimo de síntesis de los óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita (0.00-0.33), se procedió a formular los precursores catalíticos CoNiMo sólo para esta última relación. Por lo que, a continuación se presentan sólo los resultados alcanzados en dicho intervalo, considerando los arrojados por el catalizador comercial CoNiMo/ $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ .

### 3.2. Precursores catalíticos

#### 3.2.1. Difracción de Rayos X (DRX)

En la figura 3, se muestran los difractogramas de los catalizadores CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al (0.00-0.33Al) empleando ambas metodologías de calcinación, con esta técnica instrumental se proporciona información sobre las fases presentes en los sólidos sintetizados. En líneas generales para todas las series al impregnar los sólidos con los metales Co y Mo, se observó algunas similitudes en los difractogramas reportados, los cuales además de encontrar la estructura base de la hidrotalcita sintetizadas ( $\text{Zn}_6\text{Al}_2(\text{OH})_{16}\text{CO}_3\cdot 4\text{H}_2\text{O}$ -JCPDS PDF: 380486), también se obtienen óxidos de los metales impregnados. Para la serie SA1,2, se puede notar algunas diferencias en la composición de las fases presentes dentro de los precursores catalíticos. Para las relaciones de 0.00 y 1.00 Al, se obtuvo difractogramas con algunas diferencias en función de su composición, sin embargo, se notan picos característicos de la relación de Zn-Al empleada. Para la relación de 0.00 Al, se denota la presencia de óxidos de zinc (zincita-ZnO-JCPDS PDF: 75-1526), con picos a  $2\theta = 31.9, 34.5, 36.3, 47.6, 56.8, 62.9$  y  $68.2$  (Seftel *et al.*, 2008). En la misma relación se obtuvo fases

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE ÓXIDOS MIXTOS Zn-Al TIPO HIDROTALCITA EN PRECURSORES CATALÍTICOS CoNiMo FRENTE HDS DE TIOFENO.

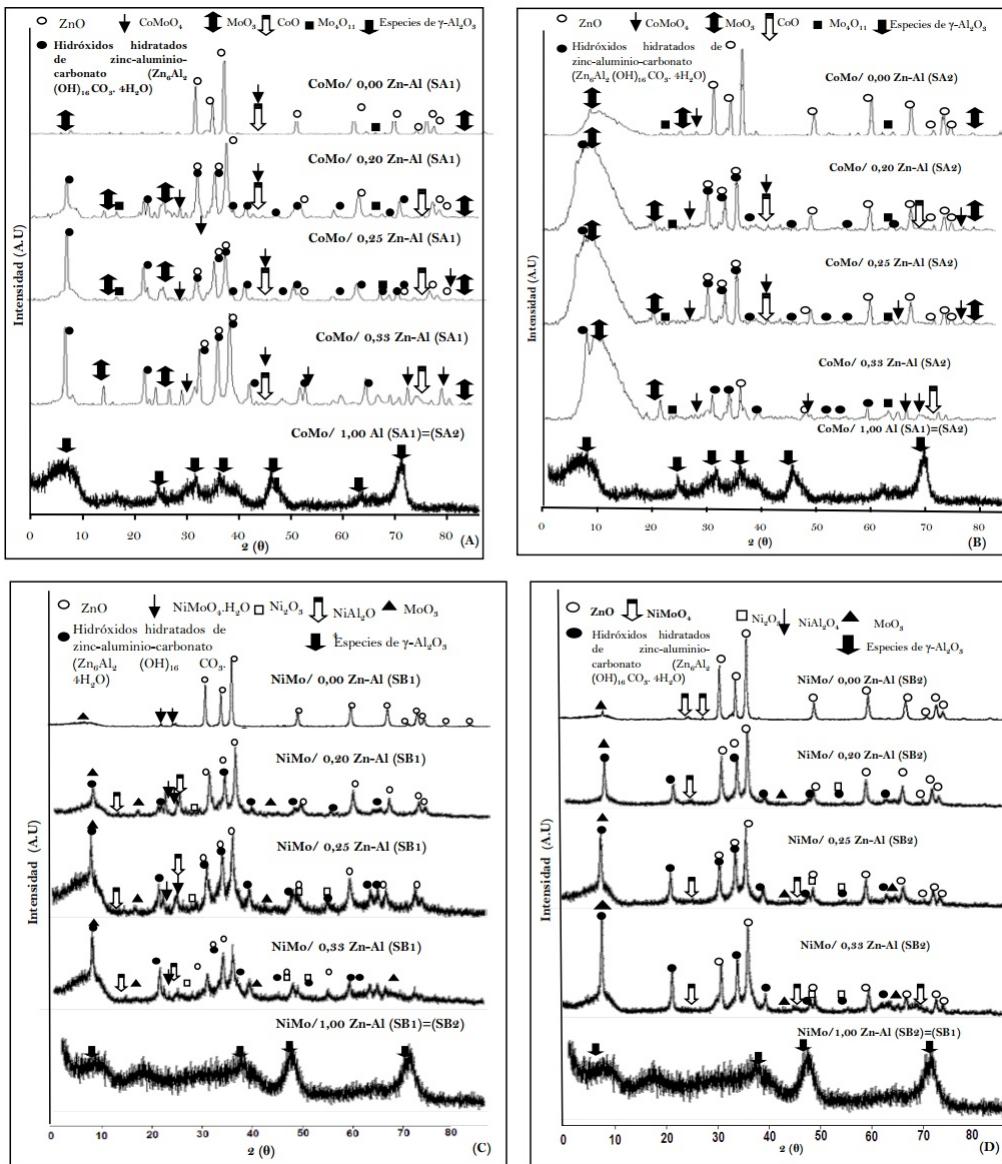


Figura 3: DRX los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al. Serie A de CoMo/óxidos mixtos Zn-Al (A y B). Serie B de NiMo/óxidos mixtos Zn-Al (C y D). Con una y doble calcinación del soporte catalítico respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

presentes de óxidos de molibdeno principalmente  $\text{MoO}_3$  (JCPDS PDF: 75-0912 y JCPDS PDF: 80-0347), así como especies de  $\text{Mo}_4\text{O}_{11}$  (JCPDS PDF: 731538 y JCPDS PDF: 84-0687), también fueron detectados  $\text{CoO}$  (JCPDS PDF: 75-0418 y JCPDS PDF: 75-0419) y molibdato de este mismo metal ( $\text{CoMoO}_4$ -JCPDS PDF: 73-1331). En esta serie SA2, se evidenció en la región  $2\theta: 0-10$ , un pico ancho asimétrico que corresponde a óxidos de molibdeno (JCPDS PDF: 75-0912), en el cual persiste para toda la serie. En la relación de 1.00 Al, se evidenció la presencia de  $\gamma-\text{Al}_2\text{O}_3$ , (JCPDS PDF: 48-0367), caracterizada por picos anchos,

asimétricos y amorfos, en este difractograma se presume la presencia de óxidos de coballos y molibdenos, así como, molibdatos de coballos, los cuales no se observan de forma definida, posiblemente sea por las características del soporte gamma alúmina, quien predomina en proporción y especie dentro del precursor catalítico. En las relaciones intermedias, de 0.20 a 0.33Al, sólo se evidencia fases presentes de hidrotalcita (JCPDS PDF: Zn<sub>6</sub>Al<sub>2</sub>(OH)<sub>16</sub>CO<sub>3</sub>.4H<sub>2</sub>O-JCPDS PDF:380486) (Kloprogge *et al.*, 2004). En todas estas relaciones, se obtuvo la presencia de óxidos de cobalto (JCPDS PDF: 75-0418 y JCPDS PDF: 75-0419) y molibdeno (MoO<sub>3</sub>-JCPDS PDF: 75-0912 y JCPDS PDF: 80-0347/ Mo<sub>4</sub>O<sub>11</sub> (JCPDS PDF: 731538 y JCPDS PDF: 84-0687), así como, molibdatos de cobalto (CoMoO<sub>4</sub>-JCPDS PDF: 73-1331). En cada relación se observa en menor o mayor proporción las fases antes mencionadas y en algunas se encuentra solapado. Con esta técnica no se evidenció formación de especies de ZnMo o ZnCoMo, ni espinelas entre los metales Co-Mo y el soporte catalítico (CoAl<sub>2</sub>O<sub>4</sub>). Es importante indicar que la incorporación directa de Zn en soporte catalítico durante su síntesis, permite suponer un incremento en la dispersión del Co en forma octaédrica y aumentar la dispersión de la fase Co-Mo. El Zn también aumenta la proporción entre el Mo octaédrico y el Mo tetraédrico en catalizadores ZnMo y ZnNiMo, aumentando su actividad; en comparación con aquellos que no poseen Zn en su composición química (Linares & Fernández, 2008; Linares *et al.*, 2005; López-Salinas & Pedraza, 1998).

Para la serie SB1,2, se observó la base de la estructura doble laminar tipo hidrotalcita (López-Salinas & Pedraza, 1998). (JCPDS PDF: 38-0486). Para la relación 0.00 Al en ambas series (SB1-SB2) se obtuvo los picos característicos de la estructura zincita (ZnO-JCPDS PDF: 75-152), correspondientes ángulos 2θ = 31.7, 36.2, 56.6, 62.9 y 68.0 (Seftel *et al.*, 2008). En esta relación también se evidencio la presencia de óxidos de molibdeno (MoO<sub>3</sub>-JCPDS PDF: 75-0912) y molibdato de níquel sin hidratar (NiMoO<sub>4</sub>-JCPDS PDF: 45-0142), estas especies tiende aparecer a medida que se aumenta el contenido de Al. Sin embargo, en algunas relaciones, es difícil identificar, debido al solapamiento de picos característicos de otras estructuras, entre ellas los óxidos e hidróxidos de los metales provenientes de los materiales de hidrotalcita del soporte catalítico (JCPDS PDF: 38-0486) (López-Salinas & Pedraza, 1998). En las relaciones de 0.20-0.33Al, se evidenciaron los picos característicos de la estructura doble laminar de hidrotalcita Zn-Al, presentando picos más definidos y simétricos, sin fases o ruido de fondo. Es importante resaltar, que gracias a la simetría presentada, se pudo identificar las posibles fases presentes en estos precursores catalíticos, las cuales, no sólo están constituidas por Zn<sub>6</sub>Al<sub>2</sub>(OH)<sub>16</sub>CO<sub>3</sub>4H<sub>2</sub>O-JCPDS PDF: 38-0486), sino también por óxidos de molibdeno (MoO<sub>3</sub>-JCPDS PDF: 75-0912), molibdato de níquel hidratado (NiMoO<sub>4</sub>.H<sub>2</sub>O-JCPDS PDF: 13-0128), e inclusive óxidos de níquel (Ni<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-JCPDS PDF: 14-0481), de esta última especie, se observan fases dispersas y de baja intensidad en todas las relaciones.

### **3.2.2. Reducción a Temperatura Programada (TPR)**

En la figura 4, se muestran los perfiles de temperatura obtenidos para los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al (0.00-0.33). Según Álvarez *et al.* (2010), se evidencia la reducción de las especies de ZnO, carbonatos y ZnO-Zn-Al al aplicar este análisis al soporte catalítico (0.00-0.33Al)

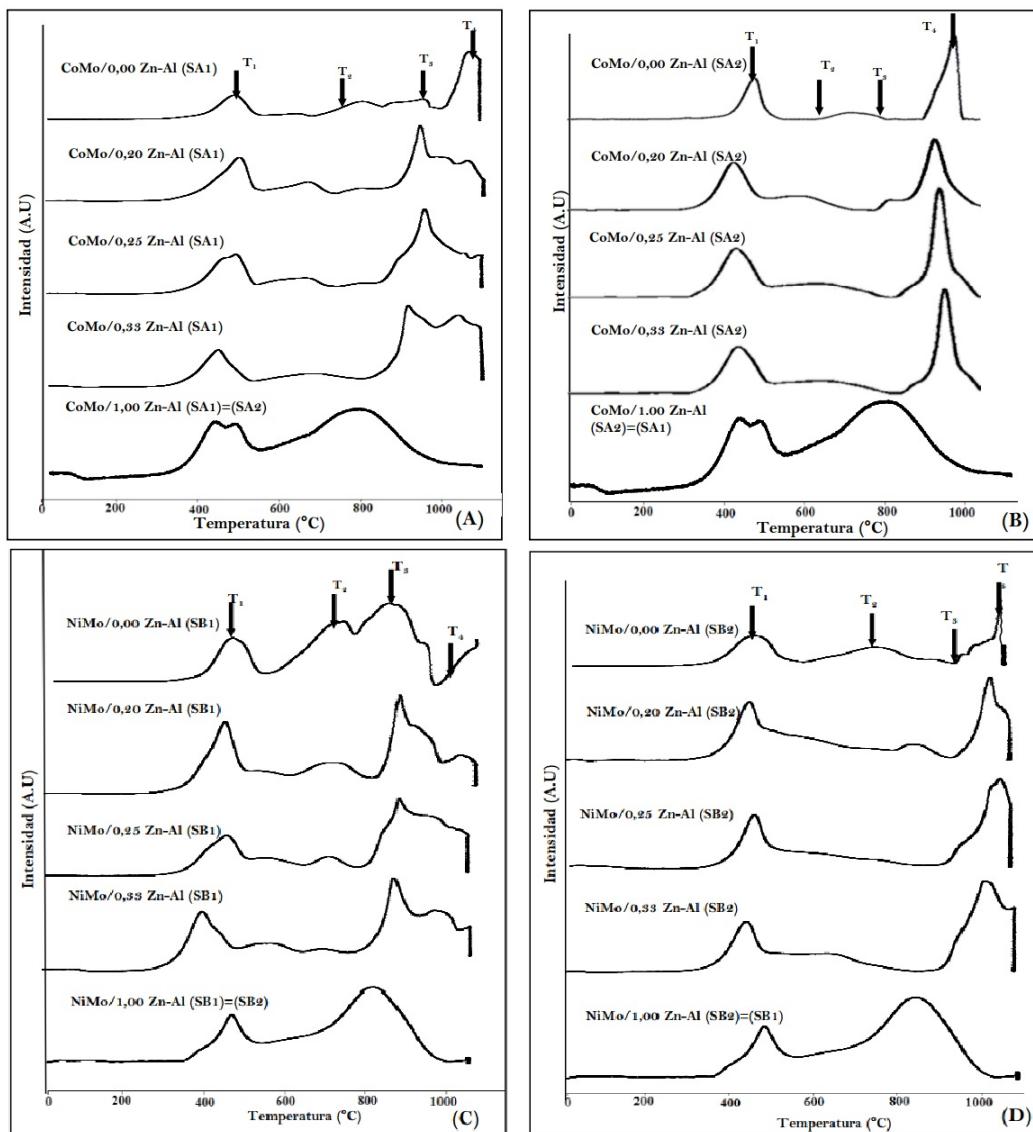


Figura 4: Perfil de TPR de los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al. Serie A de CoMo/óxidos mixtos Zn-Al (A y B). Serie B de NiMo/óxidos mixtos Zn-Al (C y D). Con una y doble calorción del soporte catalítico. Fuente: Elaboración propia.

previamente calcinado, lo que concuerda con el comportamiento observado para la SA y SB estudiada. En la Serie A1,2, se evidencia un comportamiento uniforme y homogéneo en los picos que conforman cada relación de Al/Al+Zn. Para la relación de 0.00 Al se obtuvo dos picos de reducción pronunciados ( $T_1$  °C), correspondientes a las fases de óxido de zinc (ZnO) y las presencia de especies de  $\text{Mo}_x\text{O}_y$  y  $\text{Co}_x\text{O}_4$ . A medida que se va incorporando el aluminio a la composición del soporte catalítico, se va obteniendo mayor número de picos de especies reducibles, óxidos de molibdeno ( $T_{1,2}$  °C), óxidos de cobalto ( $>T_2$  °C), especies reducidas de CoMo ( $>T_2$  °C), hasta llegar a las relaciones más altas de aluminio, donde

se evidencia menor número de especies reducidas producto de la interacción del aluminio y los metales que constituyen al catalizador. Esta última evidencia, se observó en los reductogramas de la relación de la 0.20 a 0.33Al, donde hay menor cantidad de especies reducibles y mayor homogeneidad, se podría esperar obtener un resultado favorable frente a la reacción de hidrodesulfuración de tiofeno. Los resultados encontrados en esta serie concuerdan con los obtenidos por difracción de rayos X (DRX). Por su parte, en la serie SB1,2, las temperaturas obtenidas donde se puede reducir los diferentes elementos que componen los catalizadores oxidados. T<sub>1</sub> corresponden con la reducción de las especies poliméricas de Mo sencillas, T<sub>2</sub> viene representada por especies de óxidos de Zn-Al, especies de óxidos de Ni (Ni<sub>x</sub>O<sub>y</sub>), NiAl, T<sub>3</sub> se estima la presencia de las especies de Mo más difíciles y especies de Ni (NiAl<sub>2</sub>O<sub>4</sub>), T<sub>4</sub> corresponde con la reducción del ZnO y la presencia de NiMo. Para el catalizador NiMo/álumina se observaron tres señales a 500(>T<sub>1</sub> °C), 600 (>T<sub>2</sub> °C) y 800 °C (<T<sub>3</sub> °C). La primera señal es asignada a especies de Mo octaédrico polimérico las cuales son fácilmente reducibles tal y como fue mencionado anteriormente. La última señal alrededor de 800 °C corresponde a especies de Mo tetraédrico mucho más difíciles de reducir. (Cacciotti *et al.*, 2009; Guerra *et al.*, 2008). También una señal 600°C (<T<sub>2</sub> °C) podría ser asignada a especies de óxidos Ni reducibles. Para una temperatura entre 600-1000 °C (<T<sub>2</sub>>T<sub>3</sub>>T<sub>4</sub> °C), se podría evidenciar una combinación de muchas especies reducibles tales como Mo octaédrico-tetraédrico, óxidos de níquel, y especies de Zn. La calcinación del soporte pudiera afectar notablemente la reducción de las especies activas de Mo haciéndola más difíciles de reducir; y así, la mayoría del Mo octaédrico reducible paso a especies de Mo poco reducibles u otras especies de Mo tetraédrico.

### **3.3. Estudio de la estabilidad estructural de óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita en precursores catalíticos CoNiMo frente HDS de Tiofeno**

La evaluación del comportamiento de los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al provenientes de hidrotalcita fue llevado a cabo bajo las condiciones descritas en la tabla 2, en la misma, se reflejan los parámetros utilizados en las etapas de sulfuración e HDS. Para cada serie de precursor catalítico fueron tomados más de cuarenta y dos (42) puntos, durante un tiempo de reacción de 4h, en este lapso se fue observando la tendencia en el comportamiento catalítico de cada precursor considerando al final de la reacción el promedio de los tres últimos puntos de cada data una vez alcanzado el estado estacionario. Los gráficos fueron obtenidos con un margen de error de ±10% con respecto a cada medida. Con la finalidad de estimar la participación de cada precursor catalítico y su influencia en la reacción de hidrodesulfuración de tiofeno, se consideraron algunas propiedades fisicoquímicas, del soporte catalítico tales como: fases presentes en la matriz del soporte y del catalizador, interacciones que pueden ocurrir, especies reducibles en el sistema catalítico y la influencia del promotor, contenido de aluminio en el sistema catalítico.

#### **3.3.1. Conversión de la serie CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al**

En la figura 5, se muestran los resultados de las conversiones promedios obtenidas para los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al (0.00-0.33), donde se observa una mayor actividad catalítica

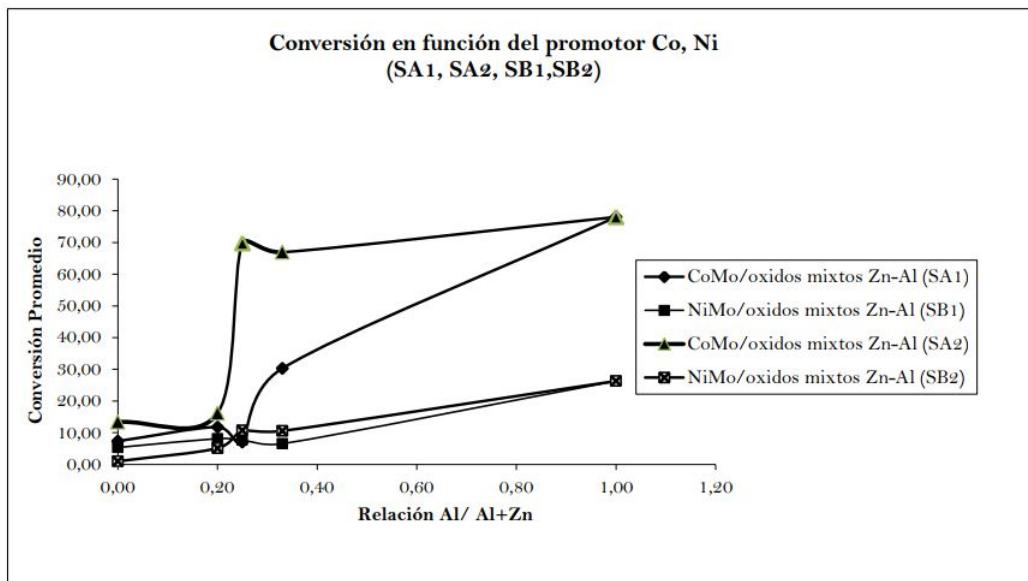


Figura 5: Comportamiento los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al. Serie A de CoMo/óxidos mixtos Zn-Al (A y B). Serie B de NiMo/óxidos mixtos Zn-Al (C y D). Con una y doble calcinación del soporte catalítico respectivamente.

Fuente: Elaboración propia.

para los catalizadores de CoMo/óxidos mixtos Zn-Al, específicamente para la relación de 0.25Al, intervalo óptimo de obtención de la hidrotalcita (López-Salinas & Pedraza, 1998). Para el resto de los catalizadores se evidencia un sistema catalíticos estable con conversiones mucho más bajas, esto puede ser explicado por el efecto hidrodesulfurante del Mo y por la presencia de especies reducibles, las cuales tienden a modificar la estructura química dentro del precursor a temperaturas diferentes de la empleada en la reacción de hidrodesulfuración de tiofeno (280°C), lo que imposibilita la participación completa de las especies en el medio de prueba. De acuerdo a las propiedades fisicoquímicas de los elementos que conforman a los precursores catalíticos CoNiMo/óxidos mixtos Zn-Al, los estados de oxidación, la acidez y basicidad de las especies, el área específica que presentan (Álvarez, 2015), la electronegatividad y las posibles interacciones individuales y de grupo, la actividad del catalizador de MoS<sub>2</sub> en presencia del Co es más efectivo que el Níquel (Ni), lo que confirma que el molibdeno (Mo) es un elemento más activo que el Co y Ni, siendo estos últimos elementos promotores dentro de los precursores catalíticos (Iova *et al.*, 2000). Es importante resaltar, que la etapa de calcinación cumple un papel fundamental en las especies reducibles y la homogeneidad del sistema catalítico, por lo que, al observar el comportamiento del soporte catalítico en ambos casos, se obtiene una tendencia de mayor conversión para los precursores SA2-SB2, a pesar de observar que la etapa de calcinación mantiene la estructura base de los óxidos mixtos Zn-Al tipo hidrotalcita, lo que puede ser atribuido al efecto memoria que ejercen esta clase de sólidos (Isa *et al.*, 2008). Los resultados obtenidos para cada serie de catalizadores sintetizados fueron evaluados y comparados con los valores arrojados por los catalizadores convencionales CoMo/Γ-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, y NiMo/Γ-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) ampliamente utilizados en el mercado de la industria petrolera.

## 4. CONCLUSIONES

Dentro de los sólidos sintetizados, se obtuvo estructuras similares a las arcillas doble laminares tipo hidrotalcita Zn-Al en el intervalo óptimo de 0.25 a 0.33Al.

El porcentaje de conversión para los precursores catalíticos CoMo/óxidos mixtos Zn-Al en la reacción hidrodesulfuración fue de 70 y 67 %, correspondientes a las relaciones de 0.25 y 0.33Al (SA2). Mientras el porcentaje de conversión para los precursores catalíticos NiMo/óxidos mixtos Zn-Al en la reacción hidrodesulfuración fue de 10-11 % (SB2).

Dentro de la serie de precursores catalíticos CoMo y NiMo/óxidos mixtos Zn-Al, la que obtuvo mayor estabilidad durante la reacción de HDS, fueron las alcanzadas por los catalizadores de CoMo/óxidos mixtos Zn-Al, lo que indica que dependen marcadamente de la relación de Zn-Al del soporte, su interacción, los componentes y los metales de impregnación en la matriz del sólido.

## Referencias

- Acta del aire limpio de California, (CAA). (2004). Recuperado de <http://www.epw.senate.gov/envlaws/cleanair.pdf>
- Agencia de Protección Ambiental (APA). (1970). Recuperado de [http://europa.eu/legislation\\_summaries/environment/waste\\_management/l28045\\_es.htm](http://europa.eu/legislation_summaries/environment/waste_management/l28045_es.htm)
- Álvarez, R. (2015). Trabajo Especial de Grado para optar al título de Doctor en Ingeniería. Área Ambiente. Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo.
- Álvarez, R. & Linares, C. (2015). Uso de precursores catalíticos NiMo/óxidos mixtos Zn-Al para ser empleados en reacciones de hidrotratamiento. *Revista Agrollanía*, 12.
- Álvarez, R.; Toffolo, A.; Linares, C. & Pérez, V. (2010). Synthesis and Characterization of Co-Mo/hydrotalcite with variable Zn-Al content for hydrotreating of Thiophene. *Revista Catalysis Letter*. 137, 150-155. DOI 10.1007/s10562-010-0337-9.
- Cacciotti, I.; Bianco, A.; Lombardi, M. & Montanaro, L. J. (2009). Mg-Substituted hydrotalcite: formation and properties. European Ceramic Society, 29, 2969-2978.
- Decreto 638. (1995). Normas sobre calidad del aire y contaminación ambiental. Gaceta Oficial N° 4.899. Ministerio del Ambiente. República Bolivariana de Venezuela.
- Fernández, C.; Fernández, L.; Escudero, P. & Pérez, J. (2009). Evolución del contenido de azufre en la gasolina comercializada en Galicia (España) como consecuencia de la aplicación del real decreto 1700/2003. Investigación tecnología, 20(1).
- Guerra, J.; Brito, J.; González, G.; Villalba, R.; Pagano, M. & Sánchez, J. (2008). XXI Simposium Iberoamericano de Catálisis. Málaga, España, 1164-1170.

Isa, Nadia.; Noel, W. J.; Othman, M. R. & Ahmad, A. L. (2008). International Conference on Environment. (ICENV). Studies on adsorption/desorption of carbon dioxide with respect to thermal regeneration of hydrotalcites.

Iova, F. & Trutia, A., (2000). On the structure of the NiO-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> systems, studied by diffuse-reflectance spectroscopy. Optical Materials, 13, 455-458.

JCPDS PDF: Joint Committee on Powder Diffraction Standards Powder Diffraction files. (1977). International Centre for Diffraction Data: Newton Square, PA

Kloprogge, T.; Hickey, L. & Frost, R. (2004). The effects of synthesis pH and hydrothermal treatment on the formation of zinc aluminum hydrotalcites. *Journal of Solid State Chemistry*. Elsevier Inc, 177, 4047-4057.

Liang, M.; Kang, W. & Xie, K. (2009). Comparison of reduction behavior of Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, ZnO and ZnFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> by TPR technique. *Journal of Natural Gas Chemistry*, 19, 110-113.

Linares, C.; López, J.; Scaffidi, A. & Scott, C. (2005). Preparation of ZnNiMo/γ-alúmina catalysts from recycled Ni for hydrotreating reactions. *Applied Catalysis*. Elsevier. B.V, 292, 115.

Linares, C. & Fernández, M. (2008). Estudio de las reacciones de hidrodesulfuración de dibenzotiofeno y hidrogenación de 2-metilnaftaleno con catalizadores ZnNiMo/Γ-Alúmina. *Catalysis Letter*, 126.

López-Salinas, E. & Pedraza, F. (1998). Hidrotalcitas: Precursores de materiales adsorbentes de SO<sub>x</sub>. Monografía no publicada. Instituto Mexicano del Petróleo. Subdirección de Transformación Industrial. México.

Mac.; Chen, Y.; Ye, W. & Wang, C. (2008). *Journal of Colloid and Interface Science*, 317, 148-154.

Monzón, A.; Romeo, E.; Trujillano, R.; Labajos, F. & Rives, V. (1999). Use of hydrotalcites as catalytic precursors of multimetallic mixed oxides. Application in the hydrogenation of acetylene. *Applied Catalysis A: General*, 185(1), 53-63.

Mustafa, H. & Hanni, V. (2006). Innovative refining technology1- crude oil quality improvement. *Advances in Energy Research*.

Seftel, E. M.; Popovici, E.; Beyers, E.; Mertens, M.; Zhu, H. Y. & Cool, P., & Vansant, E. F. (2008). New MgAl-LDH/TiO<sub>2</sub> nanocomposites with photocatalytic application. *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, 10(12), 8227-8233.

Toffolo., A. (2008). Síntesis y caracterización de catalizadores CoMo en estructuras tipo hidrotalcita. Universidad de Carabobo. Venezuela.

Zhao, R.; Yin, C.; Zhao, H. & Liu, C. (2003). Synthesis, characterization, and application of hydrotalcites in hydrodesulfurization of FCC gasoline. *Fuel Processing Technology*, 81(3), 201-209.

# IMPLEMENTACIÓN DE UNA FUENTE CONMUTADA PARA USO EN LA TÉCNICA DE OXIDACIÓN ELECTROLÍTICA CON PLASMA<sup>a</sup>

## IMPLEMENTATION OF A SWITCHED POWER SUPPLY FOR THE PLASMA ELECTROLYTIC OXIDATION TECHNIQUE

JOHN GARCÍA<sup>b</sup>, FERNANDO GORDILLO-DELGADO<sup>c</sup>, DARWIN TORRES<sup>d</sup>

Recibido 04-04-2017, aceptado 12-06-2017, versión final 25-07-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** Se implementó una fuente conmutada para ser utilizada en la técnica de Oxidación Electrolítica con Plasma (OEP). Los dispositivos electrónicos que se usaron son comunes y de bajo costo, lo que facilita la construcción del sistema. Se utilizó un microcontrolador de MICROCHIP para generar una señal digital con control de frecuencia y ciclo útil; también se usó un banco de condensadores y un puente de diodos para rectificar la alimentación suministrada directamente por la red eléctrica. El manejo de la potencia se hizo con transistores MOSFET en configuración “*low side*”, la medición de la corriente se hizo con un sensor de Efecto Hall y los datos se enviaron a un computador mediante comunicación USB para ser visualizados a través de un algoritmo creado en LabVIEW. La fuente fue probada para crear microcavidades en láminas de titanio con el objetivo de formar nanoestructuras de dióxido de titanio.

**PALABRAS CLAVE:** Fuente conmutada; oxidación electrolítica con plasma; ciclo útil; MOSFET.

**ABSTRACT:** A switched-mode power supply was implemented for using in the Plasma Electrolytic Oxidation (PEO) technique. The electronic devices are inexpensive and ordinarily used, which facilitates the construction of the system. A MICROCHIP microcontroller was used for generating a digital signal with frequency and duty cycle control; a capacitor bank and a diode bridge were also used for rectifying the input signal from the electrical network. The management of the output voltage was made with an arrangement of MOSFET transistors in the “*low side*” configuration; the measurement of the current was made with a Hall Effect sensor and using the USB communication the data was sent to a computer for visualization with a LabVIEW algorithm. The power supply was tested for creating microcavities in a titanium sheet with the aim of forming nanostructures of titanium dioxide.

**KEYWORDS:** Switched-mode power supply; plasma electrolytic oxidation; duty cycle; MOSFET.

<sup>a</sup>García, J., Gordillo-Delgado, F. & Torres, D. (2017). Implementación de una fuente conmutada para uso en la técnica de oxidación electrolítica con plasma. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 46–57. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.63888>

<sup>b</sup>Grupo de Investigación en Ciencia Aplicada para el Desarrollo de la Ecorregión- GICADE del IIC. Universidad del Quindío. jagarciag@uniquindio.edu.co

<sup>c</sup>Grupo de Investigación en Ciencia Aplicada para el Desarrollo de la Ecorregión- GICADE del IIC. Universidad del Quindío. fgordillo@uniquindio.edu.co

<sup>d</sup>Grupo de Investigación en Ciencia Aplicada para el Desarrollo de la Ecorregión- GICADE del IIC. Universidad del Quindío. dtorresce@unal.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

La oxidación electrolítica con plasma (OEP) es una técnica usada para el recubrimiento cerámico de metales como aluminio, titanio y magnesio (Stojadinovic *et al.*, 2010; Li *et al.*, 2013; Galvis *et al.*, 2012); este tratamiento aumenta la dureza y la resistencia al desgaste y a la corrosión (Lugovskoy & Zinograd, 2013; De Viteri *et al.*, 2014). En general, se trata de un método de bajo costo, ya que los dispositivos utilizados son comunes; por otro lado, es amigable con el medio ambiente si se tiene en cuenta que no utiliza solventes orgánicos, ni genera residuos tóxicos. La OEP se presenta ante una diferencia de potencial eléctrico entre dos láminas metálicas que se encuentran inmersas en un electrolito.

En la OEP se utilizan altos niveles de tensión eléctrica entre los dos electrodos; una capa dieléctrica de óxido que se genera sobre la superficie pierde estabilidad en ciertas regiones en las que aparecen zonas de alta conductividad, lo que lleva a que se presenten descargas eléctricas (chispas) entre puntos de la superficie. Esto hace que localmente aumente la presión y la temperatura hasta alcanzar valores del orden de  $10^4$  K (Yerokhin *et al.*, 1999). De esta forma se crean microcavidades del material oxidado en la superficie de la lámina metálica, que finalmente se convierte en una estructura porosa con mayor espesor debido a que también se da la expulsión del óxido. El material de revestimiento puede contener fases cristalinas y amorfas, con especies constituyentes derivadas del metal y del electrolito (Stojadinovic *et al.*, 2010).

En la técnica de OEP, el control de frecuencia y ciclo útil del voltaje aplicado entre los electrodos puede afectar el carácter de las descargas y por consiguiente las propiedades de las capas obtenidas. Esto corresponde con lo que se puede observar en el experimento, ya que una modificación de la frecuencia de operación modifica la densidad de corriente catódica (Gebarowski & Pietrzyk, 2014).

Las fuentes de alimentación usadas en la OEP presentan características tales como: tensión de operación con valores entre 100 V y 600 V, corrientes hasta de 50 A, rangos de frecuencia entre 10 y 1000 Hz y variación del ciclo útil del 20 % al 80 %; al respecto se reporta la implementación de fuentes de conversión AC/DC por empresas fabricantes como *Kepco S.A.* y *Keronite*; cuyo funcionamiento se basa en la rectificación, filtrado y conmutación de la alimentación de corriente alterna comercial en corriente pulsante y controlada; dichas fuentes presentan circuitos electrónicos de medición y control de parámetros eléctricos de salida y etapas de potencia utilizando transistores de conmutación tales como IGBT o MOSFET (Galvis *et al.*, 2012). En este trabajo se presenta la implementación de una fuente conmutada para un sistema de OEP; con ésta, la circulación de corriente pulsante es controlada por dispositivos de activación en función de una señal de control con una frecuencia y ciclo útil determinados. Esta fuente es de fácil implementación, los componentes son de fácil adquisición comercial y la operación es sencilla.

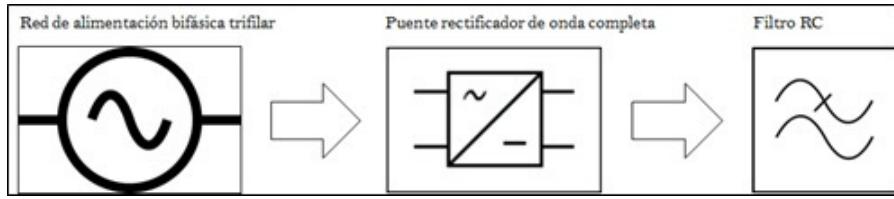


Figura 1: Esquema básico de un conversor AC/DC. Fuente: Elaboración propia.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

Una fuente conmutada es un sistema que entrega una potencia a una carga mediante la modificación de algún parámetro de control como la frecuencia o ciclo útil de la señal de salida. A diferencia de una fuente de alimentación lineal, la corriente consumida no depende enteramente de la carga, sino también de la conmutación realizada en la etapa de potencia de la fuente, como menciona Zhang *et al.* (2013). Las fuentes conmutadas presentan mejor rendimiento frente a las lineales o reguladas, ya que estas últimas entregan la corriente demandada por la carga sin ningún tipo de control y hay calentamiento de los dispositivos electrónicos por el consumo de corriente, incluso cuando no se tiene una carga conectada. Existen diversas propuestas para el desarrollo de una fuente conmutada, pero todas se componen básicamente de un conversor AC/DC con diodos (rectificación no controlada) o tiristores (rectificación controlada) y un circuito de conversión DC/DC que permite eliminar armónicos presentes en la alimentación, mediante el uso de inductores y condensadores. La etapa de potencia se compone por transistores de conmutación, cuyas características físicas varían de acuerdo a la tensión y corriente eléctrica de trabajo y en algunos casos se considera un circuito de realimentación, que permite a la etapa de control detectar cambios de tensión de salida para realizar el ajuste respectivo.

### 2.1. Conversor AC/DC

El esquema básico del conversor AC/DC, presentado en la figura 1, consta de una entrada de corriente alterna, un puente rectificador de cuatro diodos y un filtro resistencia-condensador (RC); en algunas ocasiones se adiciona un filtro inductor-capacitor (LC) con el fin de eliminar armónicos presentes en la alimentación de la fuente (Yu *et al.*, 2013). Como la tensión de salida no es completamente continua se le agrega un circuito conversor DC/DC para reducir el voltaje de rizado de salida y garantizar una tensión fija, aun cuando la carga exija una alta potencia de alimentación.

En este trabajo, se implementó un conversor AC/DC con alimentación bifásica trifilar de 220 V; se usó un puente rectificador de potencia con una corriente máxima de 35 A y el circuito de filtrado fue construido con condensadores electrolíticos de  $470 \mu\text{F}/400 \text{ V}$ . La configuración del conversor fue la de modo doblador de tensión; por lo tanto el neutro se comporta como tierra para obtener un potencial eléctrico máximo aproximado de 340 V, como se muestra en la figura 2.

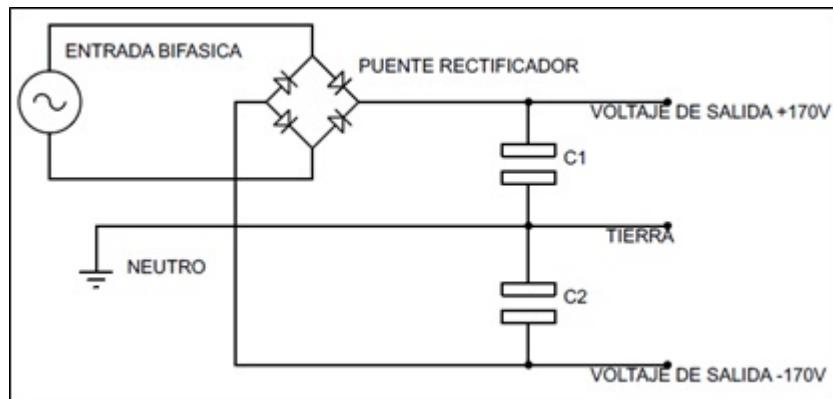


Figura 2: Conversor AC/DC en modo doblador de tensión. Fuente: Elaboración propia.

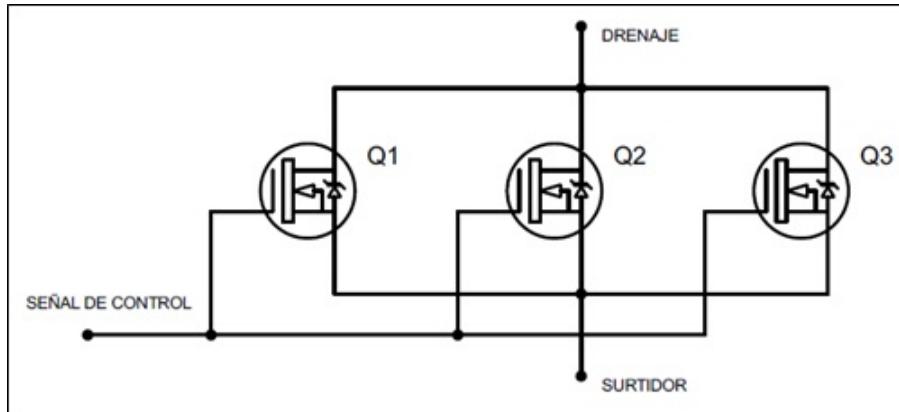


Figura 3: Conexión en paralelo de los transistores MOSFET. Fuente: Elaboración propia.

## 2.2. Conversor DC/AC

Con el fin de generar una tensión pulsante a partir de la modificación de la frecuencia y ciclo útil se implementó un inversor mediante transistores MOSFET de potencia (referencia IRFP460, con un voltaje máximo VDS de 500 V y una corriente de drenaje ID de 20 A) en configuración “*low side*”. Esta configuración sitúa la tensión de disparo aplicado entre la compuerta y el surtidor (VGS) con respecto a un punto neutro. De esta forma, los electrodos del sistema de OEP se conectan entre la alimentación y el drenaje, y el surtidor se acopla a un punto neutro. En este caso, la activación del MOSFET se hizo con una tensión entre 5 y 12 VDC. La comutación del transistor en función de la frecuencia y ciclo útil permite que la corriente pase por la carga (electrodos inmersos en la solución), cruzando por el drenaje y surtidor del transistor (Taniguchi *et al.*, 1988). Los transistores MOSFET se conectaron en paralelo, como se muestra en la figura 3, con el fin de mejorar el control de la corriente y disminuir la disipación de potencia en cada transistor (Xiao *et al.*, 2015).

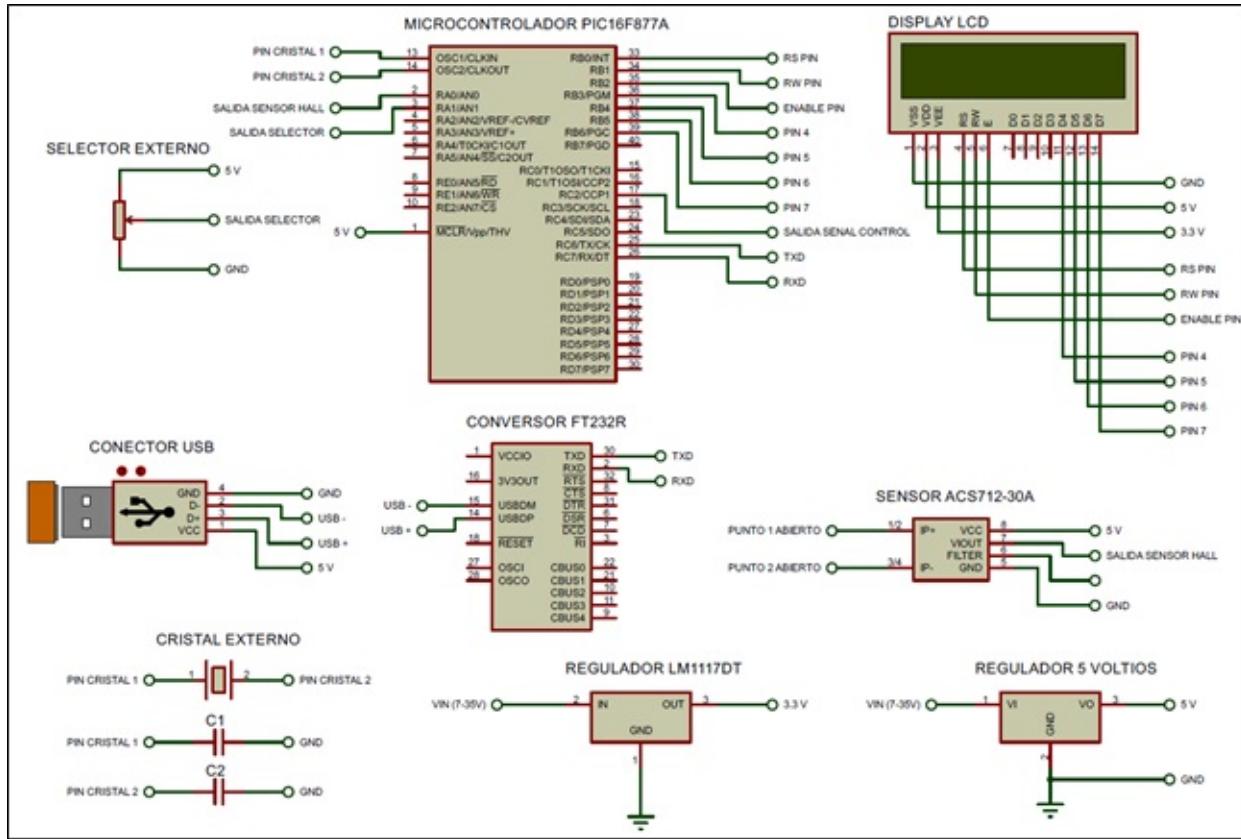


Figura 4: Esquema de conexiones de la etapa de control. Fuente: Elaboración propia.

### 2.3. Etapa de control

El circuito de control se compone de un microcontrolador PIC16F877A con una frecuencia de operación de 4 MHz, cuya configuración se muestra en la figura 4. Se implementó un algoritmo en lenguaje C configurando el registro interno del temporizador para obtener una señal digital con una frecuencia y ciclo útil variable y se obtuvo una variación de frecuencia entre 500 y 5000 Hz con una resolución de 0.1 Hz. En la técnica de OEP, el ciclo útil influye en las características del material obtenido; la corriente circulante aumenta con un valor mayor del ciclo útil y por lo tanto el tiempo de la reacción lámina-electrolito tiende a ser mayor. Por otro lado, la frecuencia del pulso se relaciona de manera directa con la densidad de las microcavidades que se forman en la superficie del electrodo durante la electroerosión con plasma.

La etapa de control que se presenta en la figura 4 cuenta con su propio sistema de alimentación para disminuir el ruido eléctrico proveniente de la etapa de potencia. La visualización de la información se implementó en una pantalla de cristal líquido alfanumérica. El valor del ciclo útil fue determinado mediante un selector externo al microcontrolador y leído por conversión analógica a digital (ADC). La conexión entre la etapa de control y la etapa de potencia se hizo mediante optoacopladores, como se muestra en la figura 5;

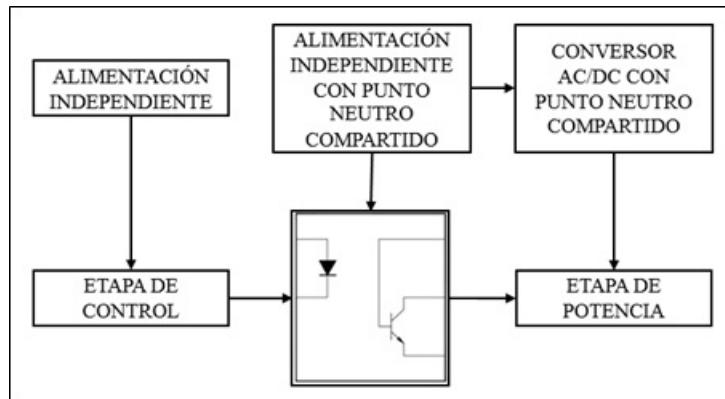


Figura 5: Conexión entre la etapa de control y la etapa de potencia por aislamiento óptico. Fuente: Elaboración propia.

para evitar que un fallo en la etapa de potencia repercuta en la etapa de control se hizo cada alimentación por separado. Esta etapa de acople se construyó de tal forma que tuviera su propia fuente de alimentación y solo compartiera el punto neutro con la etapa de potencia, con el fin de mantener el  $V_{GS}$  para disparar los transistores de potencia.

## 2.4. Montaje para la técnica de OEP

En la figura 6 se muestra el esquema del montaje de la técnica de la OEP utilizando la fuente conmutable implementada en este trabajo; dentro de una cubeta de acero inoxidable se coloca el sustrato inmerso en una solución de fosfato trisódico ( $\text{Na}_3\text{PO}_4$ ) e hidróxido de sodio ( $\text{NaOH}$ ) disueltos en agua destilada; se sujetó por pinzas mecánicas el electrodo positivo al sustrato de titanio y el electrodo negativo a la cubeta de acero inoxidable. La información de la corriente medida durante el proceso, así como la frecuencia y ciclo útil de operación es enviada al computador para su visualización.

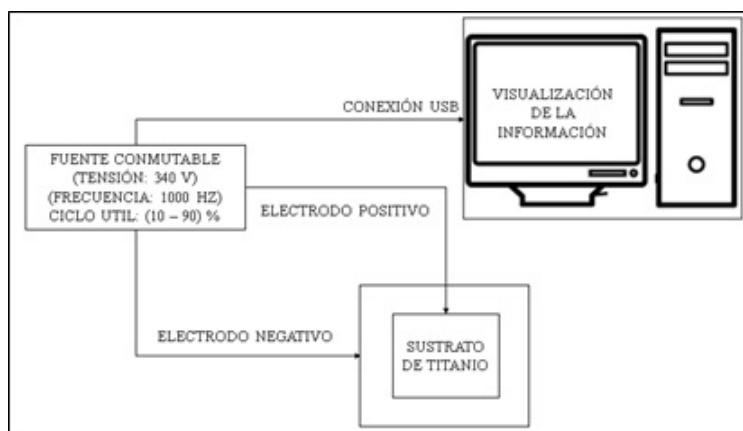


Figura 6: Esquema del montaje para la técnica de OEP. Fuente: Elaboración propia.

### 3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

El conversor AC/DC implementado arrojó un voltaje de salida máximo de 340 VDC entre las dos terminales (positivo y negativo) y un voltaje de  $\pm 170$  VDC entre el punto positivo o el negativo con respecto al punto neutro. La señal de control de frecuencia y ciclo útil programable activó los transistores MOSFET (Dehnavi *et al.*, 2013); cada uno de ellos en esta configuración presentó una caída de tensión muy baja entre los terminales de drenaje y de surtidor que puede ser despreciada; por lo tanto la tensión obtenida del conversor AC/DC fue la misma suministrada en la OEP, mientras que la corriente demandada se controló con la conmutación de los transistores. En la práctica se observó que una variación del ciclo útil de la señal de control se ve reflejada en la tensión de alimentación del montaje de la OEP. Esto se debe a que el voltímetro mide el valor RMS (Raíz Media Cuadrática) del voltaje presente en la carga, incluso cuando se aplica todo el voltaje de entrada como se muestra en la figura 7 (Kurokawa & Furukawa, 2014).

Así, para una frecuencia de 1000 Hz y un ciclo útil del 50 % se midió un voltaje medio en la carga de 170 V, inclusive cuando se tuvo toda alimentación del conversor AC/DC de 340 V; para un ciclo útil del 10 %, el voltaje de salida promedio fue de 340 V y para un ciclo del 90 % el voltaje promedio de salida fue de 306 V. El consumo de corriente depende de las condiciones experimentales del montaje de OEP y presentó picos de hasta 25 A. La medición de corriente se hizo mediante un sensor de referencia ACS712-30A que se ubicó en serie a lo largo de la malla de la etapa de potencia. Este sensor utiliza el Efecto Hall, de tal forma que la medición se hace considerando el campo magnético asociado a la corriente en el conductor; la tensión de salida, entre 0 y 5 V, es proporcional a la corriente que pasa por la etapa de potencia y la respuesta del sensor es lineal para corriente alterna o continua de acuerdo con la información del fabricante.

La visualización de la información se hizo a través de una interfaz desarrollada en el software de programación gráfica LabVIEW, con lo que se logró la comunicación USB entre el microcontrolador y el computador; cabe resaltar que este dispositivo no cuenta con un periférico interno para el correspondiente protocolo de comunicación, así que se utilizó un conversor TTL-USB; este dispositivo externo es reconocido por el sistema operativo del computador como un serial emulado y el algoritmo en LabVIEW recibe la información utilizando la herramienta VISA (Virtual Instrument Software Architecture). La interfaz presenta al usuario los valores en tiempo real de la corriente suministrada al sistema de OEP, así como la frecuencia de operación y el ciclo útil de la tensión de salida.

Durante el proceso de OEP de una lámina de titanio, la curva de densidad de corriente en función del tiempo, expuesta en la figura 8, muestra que la densidad de corriente alcanzó un valor máximo de  $1.84 \text{ A/cm}^2$  y disminuyó a valores entre  $0.50$  y  $0.65 \text{ A/cm}^2$  cuando se usó un ciclo de trabajo de 90 %. Por otro lado, se observó que con un ciclo útil del 10 % el valor máximo es de  $1.2 \text{ A/cm}^2$  y llega a un valor cercano a  $0.2 \text{ A/cm}^2$ . Estas caídas abruptas son atribuidas a la cinética de la formación de los óxidos de titanio.

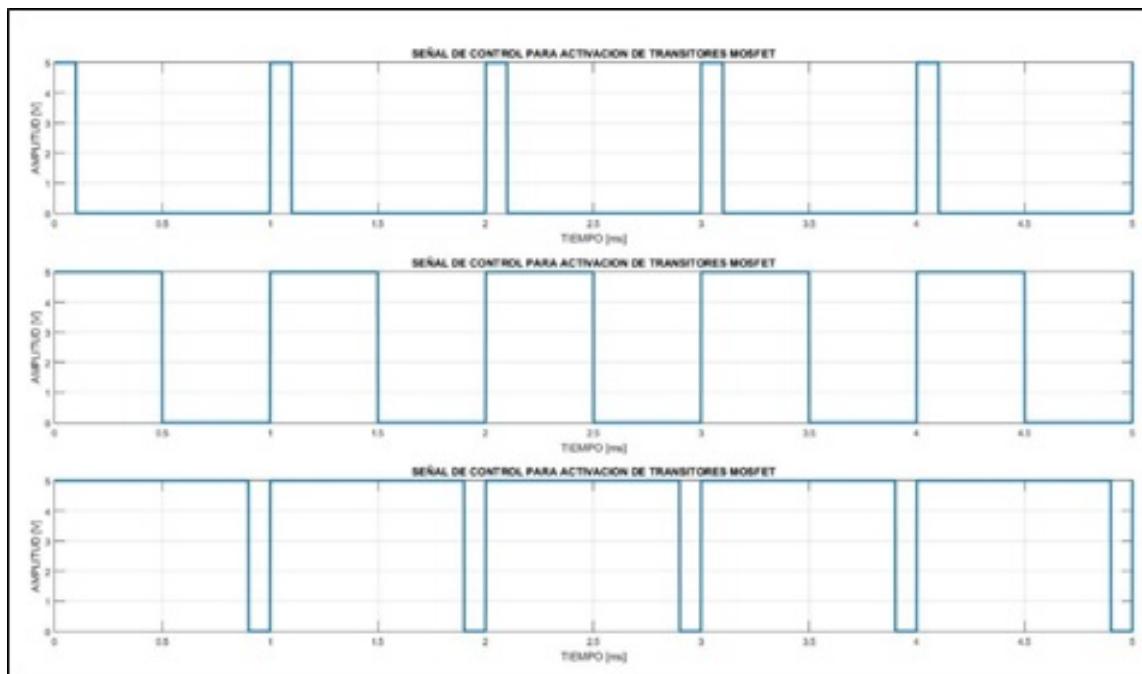


Figura 7: Señal de control con frecuencia de 1 kHz y ciclo útil de 10, 50 y 90 %. Fuente: Elaboración propia.

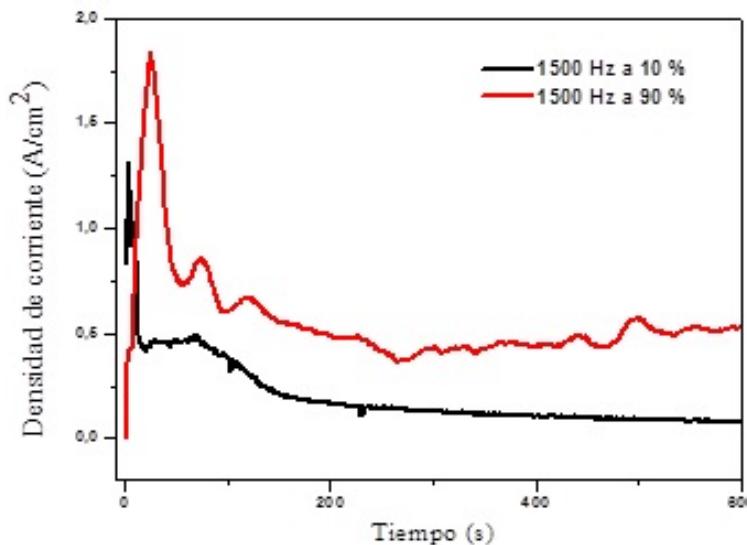


Figura 8: Comportamiento de la densidad de corriente en función del tiempo durante la OEP de una lámina de titanio. Fuente: Elaboración propia.

Una de las muestras obtenidas luego del proceso de OEP se observó con un microscopio electrónico de barrido (JEOL JSM-6390LV). En la figura 9 se presenta la imagen obtenida, en la que se aprecia la formación de las microcavidades uniformes de alta densidad espacial y de diámetro entre 500 y 1000 nm sobre la lámina de titanio (tamaño  $2 \times 2 \times 0.1$  cm, fabricada por ASME, SB-265 grade-2); estas cavidades presentan baja

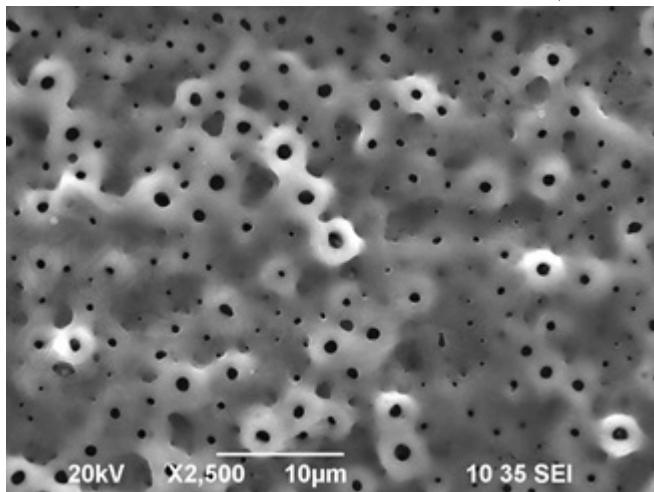


Figura 9: Imagen SEM de la morfología de la superficie del recubrimiento o revestimiento cerámico de  $\text{TiO}_2$  obtenido con una frecuencia de pulso de 1000 Hz, ciclo útil de trabajo de 10 % y tratamiento térmico posterior a 500 °C. Fuente: Elaboración propia.

profundidad debido a la baja duración del pulso relacionada con el ciclo útil de trabajo de 10 %; la composición química del revestimiento sobre la lámina de titanio se determinó por Espectroscopía de Dispersión de Energía (EDS), se encontró un 72.29 % de oxígeno y 21.36 % de titanio y un máximo de 6,35 % de fósforo, lo que indica la formación superficial del revestimiento cerámico de dióxido de titanio ( $\text{TiO}_2$ ) (Chang *et al.*, 2016; Gowtham & Arunnellaiappan, 2016).

Los difractogramas de rayos X, presentados en la figura 10 fueron tomados con un equipo de marca X Bruker D8- Advance; estos corresponden al sustrato de titanio y al sustrato de titanio tratado por el proceso de OEP; se evidencia una reducción de la intensidad de los picos correspondientes al titanio puro y la aparición de uno característico de los nanocristales de  $\text{TiO}_2$  fase anatasa en el revestimiento cerámico.

Aunque los análisis de EDS mostraron la presencia de fósforo en la superficie de la muestra, ésta no se observó en los difractogramas de rayos X, posiblemente por encontrarse en fase amorfa y en baja proporción, de tal forma que no puede ser detectado por DRX (Venkateswarlu *et al.*, 2012). Los resultados reportados por otros autores (Galvis *et al.*, 2012; Srinivasan *et al.*, 2016), que usan fuentes reguladas convencionales en la OEP, son similares a los obtenidos con la fuente descrita en este trabajo; sin embargo, hacer una estricta comparación es complicado porque en los experimentos descritos se involucran otros parámetros de crecimiento que no se fijan con la fuente sino que dependen por ejemplo del tipo de electrolito y tiempo de exposición del sustrato. Por otro lado, el dispositivo presentado en este trabajo es de bajo costo, sencillo y eficiente en la OEP de láminas titanio, mientras que los usados en los trabajos mencionados son robustos, lo que aumenta el costo del proceso.

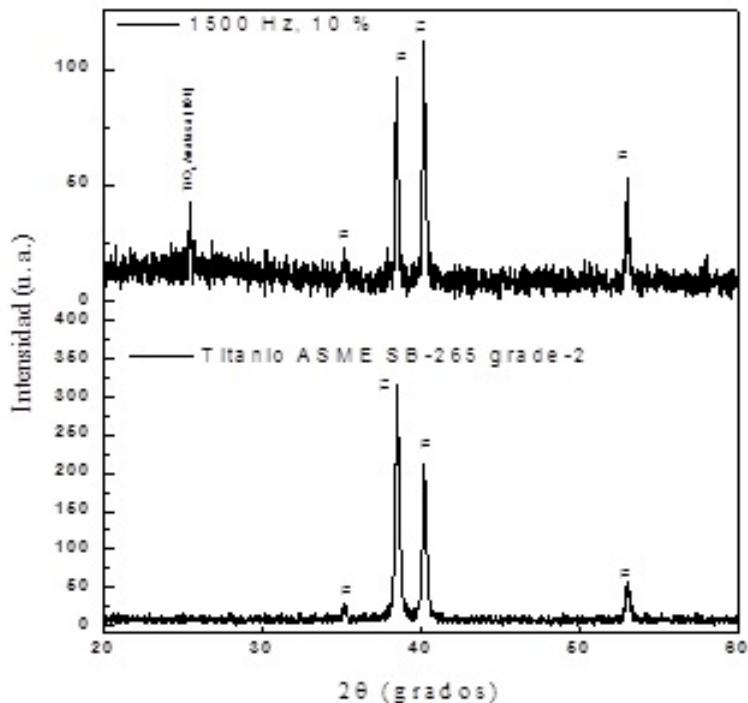


Figura 10: En la parte superior: el difractograma de rayos X correspondiente a la modificación superficial por OEP de titanio a 1500 Hz y ciclo útil de trabajo de 10 %. En la parte inferior: el difractograma del sustrato. Fuente: Elaboración propia.

#### 4. CONCLUSIONES

Se implementó una fuente de alimentación para ser usada en un sistema de OEP con dispositivos de bajo costo, de fácil adquisición comercial, que presenta un buen funcionamiento con corrientes pico de 25 A y tensiones de salida de 340 V, con la que se obtienen pulsos de voltaje con frecuencias en el rango 500-5000 Hz y el ciclo útil puede ser modificado entre 10 y 90 %. Esta fuente conmutada no utiliza un transformador para el control de tensión de la alimentación y por tanto la tensión de operación de salida es fijo. Este valor de voltaje (340 V) y el comportamiento de la corriente fueron suficientes para obtener un recubrimiento cerámico de TiO<sub>2</sub> sobre el sustrato de titanio.

Con el sistema de OEP, con pulsos de voltaje de frecuencia 1000 Hz y ciclo útil de 10 %, se generó un revestimiento cerámico de dióxido de titanio en fase anatasa, poroso y nanoestructurado; esto fue evidenciado con los resultados de DRX y SEM. Las microcavidades que se formaron sobre la superficie del sustrato son de baja profundidad, aparentemente uniformes en forma y tamaño. Esto es muy importante cuando se trata de aplicaciones relacionadas con el aumento de la resistencia mecánica y de aplicaciones fotocatalíticas en las que el aumento del razón área/volumen es fundamental para aumentar la eficiencia del proceso.

## Referencias

- Chang, F. C.; Wang, C. J.; Lee, J. W. & Lou, B. S. (2016). Microstructure and mechanical properties evaluation of molybdenum disulfide-titania nanocomposite coatings grown by plasma electrolytic oxidation. *Surface and Coatings Technology*, 303, 68-77
- De Viteri, V. S.; Igartua, A.; Bayón, R.; Barandika, G.; Pérez-Jorge, C.; Esteban, J. & Martínez, M. (2014). *Tribocorrosion and antibacterial behaviour of TiO<sub>2</sub> coatings obtained by OEP technique*. In Medical Measurements and Applications (MeMeA), IEEE International Symposium on, 1-4.
- Dehnavi, V.; Luan, B. L.; Shoesmith, D. W.; Liu, X. Y. & Rohani, S. (2013). Effect of duty cycle and applied current frequency on plasma electrolytic oxidation (OEP) coating growth behavior. *Surface and Coatings Technology*, 226, 100-107.
- Galvis, O.; Quintero, D.; Pavón, J. J.; Castaño, J. G. & Echeverría, F. (2012). Fabricación de películas anódicas porosas sobre titanio mediante oxidación electrolítica por plasma. *Revista ION*.
- Gebarowski, W. & Pietrzyk, S. (2014). Growth characteristics of the oxide layer on aluminium in the process of plasma electrolytic oxidation. *Archives of Metallurgy and Materials*, 59(1), 407-411.
- Gowtham, S.; Arunnellaippalan, T. & Rameshbabu, N. (2016). An investigation on pulsed DC plasma electrolytic oxidation of cp-Ti and its corrosion behaviour in simulated body fluid. *Surface and Coatings Technology*, 301, 63-73.
- Kurokawa, F. & Furukawa, Y. (2014). *High performance digital control switching power supply*. In Power Electronics and Motion Control Conference and Exposition (PEMC), 16th International, 1165-1170.
- Li, Q.; Liang, J. & Wang, Q. (2013). Plasma electrolytic oxidation coatings on lightweight metals. *Modern Surface Engineering Treatments*.
- Lugovskoy, A. & Zinigrad, M. (2013). Plasma electrolytic oxidation of valve metals. *Materials science-advanced topics*.
- Stojadinovic, S.; Vasilic, R.; Belca, I.; Petkovic, M.; Kasalica, B.; Nedic, Z. & Zekovic, L. (2010). Characterization of the plasma electrolytic oxidation of aluminium in sodium tungstate. *Corrosion Science*, 52(10), 3258-3265.
- Srinivasan, V.; Karthik, P.; Mukesh, P. & Praven, S. (2016). Review on Plasma Electrolytic Oxidation of Titanium Coatings. *International Journal of Advanced Research in Biology, Engineering, Science and Technology*, 2(1), 29-34
- Taniguchi, K.; Ogino, Y. & Irie, H. (1988). PWM technique for power MOSFET inverter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 3(3), 328-334.

- Venkateswarlu, K.; Rameshbabu, N.; Sreekanth, S.; Bose, A. C.; Muthupandi, V.; Babu, N. K. & Subramanian, S. (2012). Role of electrolyte additives on in-vitro electrochemical behavior of micro arc oxidized titania films on Cp Ti. *Applied Surface Science*, 258(18), 6853-6863.
- Xiao, Q.; Yan, Y.; Wu, X.; Ren, N. & Sheng, K. (2015). A 10kV/200A SiC MOSFET module with series-parallel hybrid connection of 1200V/50A dies. In 2015 IEEE 27th International Symposium on Power Semiconductor Devices & IC's (ISPSD), 349-352.
- Yerokhin, A. L.; Nie, X.; Leyland, A.; Matthews, A.; & Dowey, S. J. (1999). Plasma electrolysis for surface engineering. *Surface and Coatings Technology*, 122(2), 73-93.
- Yu, T. H.; Liang, T. J.; Chen, K. H.; Li, J. S., & Lee, J. S. (2013). Design of an AC-DC and DC-DC interleaved PWM controller for switching power supply. In 2013 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, 4172-4179.
- Zhang, H. J. (2013). Basic concepts of linear regulator and switching mode power supplies. *Linear Technology*, [Online]. Available: <http://cds.linear.com/docs/en/application-note/AN140fa.pdf>. [Accessed Jun. 2014].

## LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI<sup>a</sup>

### THE BANACH-TARSKI PARADOX

CARLOS A. CADAVID M.<sup>b</sup>, JUAN D. VÉLEZ C.<sup>c</sup>

Recibido 01-06-2017, aceptado 03-08-2017, versión final 14-09-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** En este artículo se explican las paradojas de Hausdorff y de Banach-Tarski.

**PALABRAS CLAVE:** Acción; Axioma de Elección; conjunto paradójico; medibilidad.

**ABSTRACT:** In this paper the Hausdorff and Banach-Tarski paradoxes are explained.

**KEYWORDS:** Action; Axiom of Choice; paradoxical set; measurability.

### 1. INTRODUCCIÓN

Se sabe que el Axioma de Elección es independiente de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Dicho de manera más precisa, se ha demostrado que si la teoría de Zermelo-Fraenkel no contiene contradicciones, entonces la teoría que se obtiene añadiéndole el Axioma de Elección carece de contradicciones, y la teoría que se obtiene añadiéndole la *negación* del Axioma de Elección también carece de contradicciones (Jech, 2008). Así, puede decirse que hay dos matemáticas, al menos en el sentido formal: matemáticas con el Axioma de Elección y matemáticas con la negación del Axioma de Elección. Sin embargo, la matemática con el Axioma de Elección es enormemente más rica que la matemática que lo niega. Por ejemplo, los resultados que se obtienen aplicando el conocido lema de Zörn (el cual es equivalente al Axioma de Elección (Jech, 2008)) serían, en algunos casos, imposibles de probar (porque la consecuencia obtenida resulta equivalente al lema de Zörn y por lo tanto, al Axioma de Elección) o, en otros casos, muy difíciles de probar. Se ha demostrado que sin el Axioma de Elección no es posible demostrar que existe un conjunto no medible en el sentido de Lebesgue. De hecho, en la matemática con la negación del Axioma de Elección es posible construir una medida invariante bajo translación sobre el conjunto de partes de los reales (Jech, 2008).

La paradoja de Banach-Tarski demuestra un hecho totalmente contraintuitivo, y su prueba involucra el Axioma de Elección. Esta paradoja dice que es posible tomar una esfera sólida en el espacio tridimensional,

<sup>a</sup>Álvarez, C., & Vélez, J. (2017). La paradoja de Banach-Tarski. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 58–72. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.65409>

<sup>b</sup>Departamento de Ciencias Matemáticas. Universidad EAFIT. Medellín, Colombia. ccadavid@eafit.edu.co

<sup>c</sup>Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. jdvelez@unal.edu.co

dividirla en un número finito de piezas, de tal manera que, moviendo rígidamente algunas de ellas, se vuelve a formar una esfera sólida del mismo radio de la esfera original, moviendo rígidamente otras de las piezas ocurre lo mismo, es decir, se forma una esfera sólida del mismo radio de la original, y sobran algunas piezas que son simplemente ignoradas. Es decir, de una esfera sólida salen dos esferas sólidas iguales a la original y sobra un conjunto no vacío. Por supuesto, las piezas en que se parte la esfera original no son medibles en el sentido de Lebesgue. Se sabe que la demostración de la paradoja de Banach-Tarski no es posible sin usar el Axioma de Elección (Jech, 2008). Esta paradoja ha sido usada como evidencia de lo extraño que resulta, en ciertos aspectos, aceptar el Axioma de Elección dentro de la matemática.

El propósito de este artículo es hacer accesible a cualquier estudiante de matemáticas una demostración completa y rigurosa de este asombroso resultado. Se ha tratado de condensar en pocas páginas lo que en la literatura aparece, o bien en artículos de carácter puramente divulgativo (Wagon, 1993; Stromberg, 1979; French, 1988), o en textos algo prolijos. En las secciones 2 y 3 se sientan las bases para explicar, en las secciones 4 y 5, las paradojas de Hausdorff y de Banach-Tarski.

## 2. GRUPO LIBRE EN LAS LETRAS $a$ Y $b$

La noción de grupo libre en dos letras será clave más adelante.

La definición precisa de grupo libre en un conjunto  $A$  puede consultarse en Rotman (2012). En este artículo sólo se considerará el caso donde  $A = \{a, b\}$  es un conjunto con dos elementos  $a$  y  $b$ . De manera intuitiva, este grupo, que se denotará por  $F\langle a, b \rangle$  consiste de todas las *palabras* que se pueden formar con los miembros del conjunto de símbolos

$$X = \{a^c, b^d : \text{donde } c, d, \text{ son enteros no nulos}\} \quad (1)$$

El término *palabra* significa una secuencia finita de símbolos de  $X$  en la cual no aparecen adyacentes dos potencias de  $a$  o dos potencias de  $b$ . La *longitud* de una palabra, es simplemente la cantidad de elementos de  $X$  de que está compuesta. Además, se considerará que la secuencia vacía es también una palabra, que se llamará la *identidad* y que se denotará por 1. La longitud de la identidad es cero. Este conjunto puede dotarse en forma natural de estructura de grupo, donde la multiplicación de palabras se define por inducción sobre la suma de las longitudes de ambas palabras, de la siguiente manera. Si  $p = x_1x_2\dots x_n$  y  $q = y_1y_2\dots y_m$  con  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in X$ , son palabras ( $n, m \geq 0$ ), entonces

1. el producto de cualquier palabra  $p$  por la identidad es igual a  $p$ . En símbolos,

$$p1 = 1p = p ; \quad (2)$$

2. si  $x_n$  y  $y_1$  no son potencias de la misma letra, se define  $pq = x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_m$  ;

3. si  $x_n$  y  $y_1$  son potencias de la misma letra, se dice  $a^c$  y  $a^d$  (respectivamente  $b^c$  y  $b^d$ ), el producto se define de acuerdo a los siguientes dos casos:

a)  $c+d \neq 0$ . En este caso  $pq = x_1 \dots x_{n-1} hy_2 \dots y_m$  donde  $h$  denota la palabra  $a^{c+d}$  (respectivamente  $b^{c+d}$ ).

b)  $c+d = 0$ . En este caso  $pq = (x_1 x_2 \dots x_{n-1})(y_2 \dots y_m)$ .

Por ejemplo, si  $p = a^2 b^{-1} a^{-4}$  y  $q = a^4 b^3 a$ , el producto se computa inductivamente así:

$$pq = (a^2 b^{-1})(b^3 a) = a^2 b^2 a. \quad (3)$$

No es difícil ver que esta operación dota a  $F\langle a, b \rangle$  de estructura de grupo, donde la palabra vacía, es el elemento neutro y donde el inverso de la palabra  $p = x_1 \dots x_n$  es la palabra  $p^{-1} = z_1 \dots z_n$ , con  $z_i$  igual a la potencia de signo contrario a aquella dada por  $x_{n-i+1}$ .

### 3. ACCIONES DE GRUPOS SOBRE CONJUNTOS

La noción de *acción de un grupo sobre un conjunto*, será la base de las construcciones que se presentarán más adelante.

**Definición 3.1.** Una acción a izquierda de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $X \neq \emptyset$ , es una función  $\tau$  que envía cada par  $(g, x) \in G \times X$  en un elemento de  $X$  (que se denota por  $g.x$ ), y que satisface las siguientes propiedades:

1.  $e.x = x$ , donde  $e \in G$  es el elemento neutro y  $x$  es cualquier elemento de  $X$ .

2.  $(gh).x = g.(h.x)$  para todo par de elementos  $g, h \in G$  y todo  $x \in X$ .

Si  $C \subset G$  y  $A \subset X$ , entonces el conjunto

$$\{c.x : c \in C \text{ y } x \in A\}, \quad (4)$$

se denominará por  $C.A$ . Cuando  $C = \{g\}$ , entonces es usual escribir  $g.A$ , en vez de  $\{g\}.A$ . Si  $x \in X$ , entonces el conjunto  $G.\{x\}$  es llamado órbita de  $x$ , y se denominará por  $Orb(x)$ . Se llamará translación por  $g \in G$  a la función que va de  $X$  en sí mismo, y que envía a cada elemento  $x$  en  $g.x$ . Note que, por las propiedades de acción, toda translación es una biyección, donde la inversa de la translación por  $g \in G$ , es la translación por  $g^{-1}$ .

Si  $g \in G$  y  $x \in X$ , se dirá que  $x$  es un punto fijo de  $g$  ó que  $g$  tiene como punto fijo a  $x$ , si  $g.x = x$ . Se dirá que una acción es una acción sin puntos fijos si ningún elemento de  $G$ , distinto de la identidad, tiene algún punto fijo.

**Definición 3.2.** Sea  $A$  un conjunto no vacío. Una partición finita propia de  $A$  (que se abreviará como *partición f. p.*) es una colección no vacía y finita  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de subconjuntos no vacíos de  $A$ , tal que

1.  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  y
2.  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , si  $i \neq j$ .

**Ejemplo 3.1.** Es fácil verificar que las órbitas de una acción son siempre no vacías, que dos órbitas, o son idénticas, o son disjuntas, y que la unión de las órbitas es el conjunto  $X$  sobre el que está actuando el grupo. Si se supone que se tiene una acción tal que el número de órbitas es finito, entonces la familia formada por las órbitas de la acción es una partición f. p. de  $X$ . En el caso general, cuando el conjunto de orbitas es de cardinalidad arbitraria, el Axioma de Elección garantiza la existencia de un conjunto  $R \subset X$ , el cual contiene exactamente un representante de cada órbita. Entonces

$$X = \bigcup_{x \in R} Orb(x), \quad (5)$$

con

$$Orb(x) \cap Orb(y) = \emptyset, \quad (6)$$

si  $x, y$  son elementos distintos en  $R$ .

**Definición 3.3.** Sea  $\tau : G \times X \rightarrow X$  una acción, y sean  $A, B$  subconjuntos no vacíos de  $X$ . Se dice que  $A$  es  $m$ -equivalente a  $B$  respecto a la acción  $\tau$  (lo cual se denota por  $A \stackrel{m}{\sim} B$ ), si existen particiones f. p.  $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$  y  $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ , y elementos  $g_1, \dots, g_m \in G$ , tal que  $g_i \cdot A_i = B_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Se dice que  $A$  es equivalente a  $B$  respecto a la acción  $\tau$  (lo cual se denota por  $A \sim B$ ), si  $A$  es  $m$ -equivalente a  $B$  respecto a  $\tau$ , para algún  $m \geq 1$ .

**Teorema 3.1.** La relación “ser equivalente a”, es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de  $X$ .

**Demostración 3.1.** Es obvio que esta relación es reflexiva y simétrica. Se ve que es también transitiva. Sean  $A, B$  y  $C$  subconjuntos no vacíos de  $X$ . Suponga que  $A$  es  $m$ -equivalente a  $B$ , y que  $B$  es  $n$ -equivalente a  $C$ . Esto significa que existen particiones f. p.

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad B = B_1 \cup \dots \cup B_m, \quad B = B'_1 \cup \dots \cup B'_n, \quad C = C_1 \cup \dots \cup C_n \quad (7)$$

y elementos  $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ , tales que

$$B_i = g_i \cdot A_i \text{ para } i = 1, \dots, m, \quad y \quad C_j = h_j \cdot B'_j \text{ para } j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Sea  $B_{ij} = B_i \cap B'_j$ , para  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ . Suprimiendo aquellos  $B_{ij}$  que sean vacíos, se obtienen  $r$  subconjuntos de  $B$ , con  $r \leq mn$ , los cuales forman una partición f. p. de  $B$ . Sean ahora

$$A_{ij} = g_i^{-1} \cdot B_{ij} \text{ y } C_{ij} = h_j \cdot B_{ij}, \quad (9)$$

si  $B_{ij} \neq \emptyset$ , para  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ . Es fácil ver que  $\bigcup A_{ij}$  y  $\bigcup C_{ij}$  son particiones f. p. de  $A$  y  $C$  en  $r$  conjuntos, respectivamente. En efecto, se ve en primer lugar que  $A_{ij} \cap A_{kl} = \emptyset$  si  $(i, j) \neq (k, l)$ . Se divide la verificación en casos.

1.  $i \neq k$ . Como

$$A_{ij} = g_i^{-1} \cdot B_{ij} \subset g_i^{-1} \cdot B_i = A_i, \quad (10)$$

y, por razones análogas,

$$A_{kl} \subset A_k, \quad (11)$$

entonces

$$A_{ij} \cap A_{kl} \subset A_i \cap A_k = \emptyset. \quad (12)$$

2.  $i = k$  y  $j \neq l$ . Como

$$A_{ij} \cap A_{kl} = A_{ij} \cap A_{il} = (g_i^{-1} \cdot B_{ij}) \cap (g_i^{-1} \cdot B_{il}) = g_i^{-1} \cdot (B_{ij} \cap B_{il}), \quad (13)$$

y

$$B_{ij} \cap B_{il} = \emptyset, \quad (14)$$

se tiene que,

$$A_{ij} \cap A_{kl} = \emptyset. \quad (15)$$

Se ve ahora que  $\bigcup A_{ij} = A$ . Es obvio que  $\bigcup A_{ij} \subset A$ . Ahora, si  $x \in A_i$  entonces  $g_i \cdot x \in B_{ij}$  para algún  $j$ , y  $x \in g_i^{-1} \cdot B_{ij} = A_{ij}$ . Como  $A = \bigcup A_i$ , entonces  $A \subset \bigcup A_{ij}$ .

En forma similar se muestra que los  $C_{ij}$  no vacíos forman una partición f. p. de  $C$ . Claramente,

$$C_{ij} = (h_j g_i) \cdot A_{ij}. \quad (16)$$

Esto muestra que  $A$  es  $r$ -equivalente a  $C$  respecto a la acción.  $\square$

**Definición 3.4.** Sea  $\tau$  una acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $X$  y  $A$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Se dice que el conjunto  $A$  es paradójico respecto a  $\tau$ , si existen subconjuntos disjuntos por pares  $A', A'', A'''$ , de  $A$ , con  $A' \sim A$  y  $A'' \sim A$  y  $A = A' \cup A'' \cup A'''$ .

**Teorema 3.2.** Sea  $\tau : G \times X \rightarrow X$  una acción, y sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$ , con  $A \overset{m}{\sim} B$ . Entonces, si  $A$  es paradójico,  $B$  también es paradójico. Además, si

$$A = A' \cup A'' \cup A''', \quad (17)$$

con  $A' \overset{r}{\sim} A$  y  $A'' \overset{s}{\sim} A$ , entonces  $B$  se puede descomponer como unión disjunta de tres subconjuntos  $B', B'', B'''$ , los dos primeros no vacíos, con  $B' \overset{l}{\sim} B$ , para un  $l \leq rm^2$ , y  $B'' \overset{t}{\sim} B$ , para un  $t \leq sm^2$ .

**Demostración 3.2.** Sean  $\bigcup_{i=1}^m A_i$  y  $\bigcup_{i=1}^m B_i$  particiones f. p. de  $A$  y  $B$ , respectivamente, y sean  $g_1, \dots, g_m$  elementos de  $G$  tales que  $g_i \cdot A_i = B_i$ , para  $i = 1 \dots m$ . Se define

$$\begin{aligned} B' &= \bigcup_{i=1}^m g_i \cdot (A' \cap A_i), \\ B'' &= \bigcup_{i=1}^m g_i \cdot (A'' \cap A_i), \\ B''' &= \bigcup_{i=1}^m g_i \cdot (A''' \cap A_i), \end{aligned} \tag{18}$$

donde sólo se considera, en cada unión, aquellas intersecciones de  $A_i$  con los conjuntos  $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$ , que no sean vacías. Es claro que

$$B = B' \cup B'' \cup B''' \tag{19}$$

y que  $B'$  y  $B''$  no son vacíos. Se verifica que  $B' \cap B'' = \emptyset$ . Para ello se ve que para cada  $(i, j)$ ,

$$g_i \cdot (A' \cap A_i) \cap g_j \cdot (A'' \cap A_j) = \emptyset. \tag{20}$$

En primer lugar, se supone que  $i = j$ . Como la translación por cada  $g_i$  es una biyección, los conjuntos  $g_i \cdot (A' \cap A_i)$  y  $g_i \cdot (A'' \cap A_i)$  son disjuntos, puesto que  $A' \cap A_i$  y  $A'' \cap A_i$  lo son. En segundo lugar, como

$$g_i \cdot (A' \cap A_i) \subset g_i \cdot A_i = B_i \text{ y } g_j \cdot (A'' \cap A_j) \subset g_j \cdot A_j = B_j, \tag{21}$$

para todo  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, m$ , entonces si  $i \neq j$ ,

$$g_i \cdot (A' \cap A_i) \cap g_j \cdot (A'' \cap A_j) \subset B_i \cap B_j = \emptyset. \tag{22}$$

Esto muestra que  $B'$  y  $B''$  son disjuntos. En forma similar se muestra que  $B' \cap B''' = \emptyset$ , y que  $B'' \cap B''' = \emptyset$ . De aquí se sigue que  $B$  es la unión disjunta  $B' \cup B'' \cup B'''$ .

Ahora, como

$$g_i \cdot (A' \cap A_i) \subset g_i \cdot A_i = B_i \tag{23}$$

para cada  $i = 1, \dots, m$ , y si  $i \neq j$ , entonces  $B_i \cap B_j = \emptyset$ , se tiene que el conjunto formado por todos los conjuntos  $g_i \cdot (A' \cap A_i)$ , tales que  $A' \cap A_i \neq \emptyset$ , es una partición f. p. de  $B'$ . Entonces  $A'$  y  $B'$  son equivalentes. Por transitividad de la relación  $\sim$  se tiene que como  $B' \sim A' \sim A \sim B$ , entonces  $B' \sim B$ . Como cada conjunto en esta cadena es equivalente al siguiente, con particiones que tienen un número de conjuntos menor o igual a  $m$ ,  $r$  y  $m$ , respectivamente, entonces se sigue que  $B'$  es  $l$ -equivalente a  $B$  para un  $l \leq rm^2$ . Similarmente se ve que  $B''$  es  $t$ -equivalente a  $B$  para un  $t \leq sm^2$ .  $\square$

**Observación 3.1.** De la demostración anterior se sigue que, en total,  $B$  se parte en un número de pedazos menor o igual a  $m^2 + rm^2 + sm^2$ , de los cuales  $m^2$  son desechados y con los restantes, después de transladarlos adecuadamente (usando elementos de  $G$ ), se ensamblan dos copias de  $B$ .

**Definición 3.5.** Sea  $\tau : G \times X \rightarrow X$  una acción. Se dice que  $G$  actúa sin puntos fijos si  $g \cdot x = x$ , para algún  $x \in X$ , implica que  $g = e$ .

Un grupo  $G$  siempre actúa sobre sí mismo por multiplicación a izquierda.

**Definición 3.6.** Sea  $G$  un grupo. Se llama acción tautológica de  $G$ , a la acción  $\tau_G : G \times G \rightarrow G$  definida por  $g.h = gh$ .

Es fácil ver que los axiomas de grupo implican que  $\tau_G$  es una acción *sin puntos fijos*.

Sean ahora  $A^+$  y  $A^-$  los conjuntos formados por todas las palabras de  $F\langle a, b \rangle$  que empiezan por una potencia *positiva* (respectivamente, *negativa*) de  $a$  y  $B^+, B^-$  los conjuntos de palabras que empiezan por una potencia *positiva* (respectivamente, *negativa*) de  $b$ . Claramente,

$$A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup \{1\}, \quad (24)$$

es una partición f. p. de  $F\langle a, b \rangle$ .

**Teorema 3.3.** Cada una de  $A^+ \cup a.A^-$  y  $B^+ \cup b.B^-$  es una partición f. p. de  $F\langle a, b \rangle$ .

**Demostración 3.3.** Obviamente  $a.A^-$  consta de la identidad 1 y de los elementos de  $F\langle a, b \rangle$  que comienzan por una potencia cualquiera de  $b$  o una potencia negativa de  $a$ . Esto implica que  $a.A^- = \{1\} \cup (B^+ \cup B^-) \cup A^-$  y que por lo tanto  $A^+ \cap a.A^- = \emptyset$  y  $A^+ \cup a.A^- = F\langle a, b \rangle$ . De forma similar se demuestra que  $B^+ \cup b.B^-$  es también una partición f. p. de  $F\langle a, b \rangle$ .  $\square$

**Teorema 3.4.** Suponga que  $F\langle a, b \rangle$  actúa sobre un conjunto  $X$ , y que esta acción no tiene puntos fijos. Entonces  $X$  es un conjunto paradójico respecto a esta acción.

**Demostración 3.4.** El Axioma de Elección garantiza la existencia de un conjunto  $R \subset X$  conteniendo exactamente un elemento de cada órbita de  $X$ . Se define

$$X' = (A^+.R) \cup (A^-.R), \quad X'' = (B^+.R) \cup (B^-.R) \quad \text{y} \quad X''' = \{1\}.R = R. \quad (25)$$

En primer lugar;

$$\begin{aligned} X &= F\langle a, b \rangle.R \\ &= (A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup \{1\}).R \\ &= ((A^+.R) \cup (A^-.R)) \cup ((B^+.R) \cup (B^-.R)) \cup (\{1\}.R) \\ &= X' \cup X'' \cup X''. \end{aligned} \quad (26)$$

Ahora, si  $C$  y  $D$  son subconjuntos disjuntos de  $F\langle a, b \rangle$ , entonces  $C.R$  y  $D.R$  también lo son. En efecto, si  $C.R$  y  $D.R$  no fueran disjuntos, es decir, si existieran  $c \in C$ ,  $d \in D$ , y  $x, y \in R$  tales que  $c.x = d.y$ , se tendría que  $(d^{-1}c).x = y$ . Esto último implicaría que  $x$  y  $y$  están en la misma órbita de  $X$ , y como  $R$  contiene exactamente un representante de cada órbita, entonces tendría que ser que  $x = y$ . Ahora, como la acción no tiene puntos fijos y  $(d^{-1}c).x = x$ , se tiene que  $d^{-1}c = 1$ , y por consiguiente  $d = c$ . Este último elemento estaría en la intersección  $C \cap D$ , pero se ha supuesto que este último conjunto es vacío. De lo anterior se deduce que  $X'$ ,  $X''$  y  $X'''$ , son disjuntos por pares y que  $A^+.R \cup A^-.R$  y  $B^+.R \cup B^-.R$  son particiones f. p. de  $X'$  y  $X''$ , respectivamente.

Por otro lado, el teorema anterior implica que  $X'$  es 2-equivalente a  $X$ , ya que si se toma  $g_1 = 1$  y  $g_2 = a$ , se tiene que

$$g_1 \cdot (A^+ \cdot R) = A^+ \cdot R \text{ y } g_2 \cdot (A^- \cdot R) = (a \cdot A^-) \cdot R, \quad (27)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (A^+ \cdot R) \cup g_2 \cdot (A^- \cdot R) &= A^+ \cdot R \cup ((a \cdot A^-) \cdot R) \\ &= (A^+ \cup (a \cdot A^-)) \cdot R \\ &= F \langle a, b \rangle \cdot R \\ &= X. \end{aligned} \quad (28)$$

En forma similar se demuestra que  $X''$  es 2-equivalente a  $X$ . Esto concluye la demostración.  $\square$

## 4. LA PARADOJA DE HAUSDORFF

### 4.1. Dos matrices muy especiales en el grupo $SO(3, \mathbb{R})$

Recordar que el grupo  $O(3, \mathbb{R})$  consta de las matrices reales  $C$  de tamaño  $3 \times 3$  tales que  $CC^T = I_3$  bajo la operación de multiplicación de matrices. La condición  $CC^T = I_3$  implica que  $\det(C) = \pm 1$ . Los elementos de  $O(3, \mathbb{R})$  cuyo determinante es  $+1$  forman un subgrupo, el cual se denota como  $SO(3, \mathbb{R})$ . Estos grupos puede interpretarse geométricamente de la siguiente manera. Se introduce primero la noción de orientación.

**Definición 4.1.** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base (ordenada) de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que dicha base es positiva, si el determinante de la matriz de cambio de la base  $\mathcal{B}$  a la base canónica es positivo. En caso contrario, se dice que  $\mathcal{B}$  es una base negativa. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de la forma  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + A\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{v}$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$ , y  $A$  es una matriz invertible de tamaño  $n \times n$ . Se dice que  $f$  preserva orientación si premultiplicación por  $A$  envía la base canónica en una base positiva. En caso contrario, se dice que  $f$  reversa orientación.

**Definición 4.2.** Se dice que una función

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es una isometría si para todo par de elementos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , se cumple que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (29)$$

Es claro que toda isometría es inyectiva. Lo que no es inicialmente claro es que es también sobreyectiva. Se puede ver que si una isometría  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  preserva el origen, es decir  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , entonces  $f$  es una función lineal. Se tiene así que una isometría que preserve el origen es una función inyectiva y lineal, y por lo tanto es sobreyectiva. Ahora, se puede ver que una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una isometría si y sólo si la matriz  $A$  tal que  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  pertenece a  $O(3, \mathbb{R})$ . Se concluye así que  $f$  es una isometría que preserva el origen si y sólo si  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  donde  $A \in O(3, \mathbb{R})$ . Ahora, si  $f$  es una isometría que no preserva el origen, es decir, si  $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ , entonces  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$  es una isometría que sí preserva el origen y por tanto  $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  para alguna  $A \in O(3, \mathbb{R})$ . Esto muestra que  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + f(\mathbf{0})$ . La gran conclusión es que  $f$  es una isometría de  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$  para cierta  $A \in O(3, \mathbb{R})$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ .

**Definición 4.3.** Una isometría se denomina movimiento rígido si además preserva orientación. Se denota por  $\mathcal{M}_3$  al conjunto formado por todos los movimientos rígidos del espacio euclíadiano. Este es un grupo bajo la operación de composición.

Resulta inmediato verificar que una matriz  $A \in O(3, \mathbb{R})$  es tal que la transformación  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$  preserva orientación si y sólo si  $A \in SO(3, \mathbb{R})$ . Esto permite afirmar que  $\mathcal{M}_3$  está formado por las funciones  $L_{C, \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{v}$ , donde  $C \in SO(3, \mathbb{R})$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Claramente, el grupo  $SO(3, \mathbb{R})$  puede considerarse como un subgrupo de  $\mathcal{M}_3$ . Note que una rotación cuyo eje sea una recta  $l$  que no pase por el origen, es un elemento de  $\mathcal{M}_3$ .

El siguiente teorema expresa un hecho básico acerca de  $SO(3, \mathbb{R})$ , el cual será útil más adelante. Para enunciarlo, se necesita el siguiente concepto.

**Definición 4.4.** Se llama rotación positiva alrededor del vector unitario  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  por un ángulo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , a la transformación lineal  $\rho_{\mathbf{u}, \theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cuya matriz en toda base ortonormal positiva que empieza con el vector  $\mathbf{u}$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ , es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (30)$$

La transformación lineal  $\rho_{\mathbf{u}, \theta}$  se puede interpretar geométricamente de la siguiente manera. Sea  $l$  la línea recta que pasa por el origen y que es dirigida por el vector  $\mathbf{u}$ . Entonces  $\rho_{\mathbf{u}, \theta}(\mathbf{x})$  es  $\mathbf{x}$  si  $\mathbf{x} \in l$  y es el punto del espacio en el plano que contiene a  $\mathbf{x}$  y que es perpendicular a la recta  $l$ , que se obtiene rotando a  $\mathbf{x}$  por un ángulo  $\theta$ , barrido en la dirección dada por la regla de la mano derecha con el pulgar señalando en la dirección del vector  $\mathbf{u}$ , si  $\mathbf{x} \notin l$ . El siguiente resultado es bien conocido, y describe la relación entre el grupo  $SO(3, \mathbb{R})$  y las rotaciones positivas alrededor de vectores unitarios.

**Teorema 4.1.** Sea  $L_C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal inducida por  $C \in SO(3, \mathbb{R})$ . Entonces  $L_C = \rho_{\mathbf{u}_C, \theta_C}$ , para un cierto  $\mathbf{u}_C \in \mathbb{R}^3$  y  $0 \leq \theta_C < 2\pi$ .

Este teorema tiene la siguiente consecuencia. Dada una transformación  $L_C$ , con  $C \in SO(3, \mathbb{R})$ , existe un camino continuo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$  tal que  $\gamma(0) = I_3$  y  $\gamma(1) = C$ . Basta definir  $\gamma(t)$  como la matriz tal que  $L_{\gamma(t)}$  es la rotación positiva alrededor de  $\mathbf{u}_C$ , y por un ángulo  $t\theta_C$ .

**Teorema 4.2.** Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (31)$$

en  $SO(3, \mathbb{R})$ , son tales que el subgrupo  $\langle A, B \rangle$  que ellas generan en  $SO(3, \mathbb{R})$ , es isomorfo al grupo libre  $F\langle a, b \rangle$ , vía el (único) isomorfismo  $\psi : F\langle a, b \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$  que envía  $a$  a en  $A$  y  $b$  en  $B$ .

**Demostración 4.1.** En primer lugar, las matrices  $A$  y  $B$  se corresponden con rotaciones positivas por ángulo  $\arcsin(1/3)$ , alrededor de los vectores  $\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{e}_1$ , respectivamente. Se define a  $\Psi : F\langle a, b \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$  como el único homomorfismo que envía  $a$  a en  $A$  y  $b$  en  $B$ . Este homomorfismo envía una palabra  $w = x_1 \dots x_t$  (con  $x_i = a^{n_i}$  ó  $x_i = b^{n_i}$ ) en  $\Psi(w) = X_1 \dots X_t$ , donde  $X_i = A^{n_i}$  ó  $X_i = B^{n_i}$ , y es, en particular, sobreyectivo. Se ve que  $\Psi$  es también inyectivo. Por inducción sobre la longitud de  $w$ , no es difícil demostrar que si  $w$  no es la palabra identidad, entonces la matriz  $\Psi(w)$  multiplicada por el vector  $(1, 0, 0)^T$  produce un vector de la forma

$$\frac{1}{3^k}(m, n\sqrt{2}, s)^T \quad (32)$$

con  $m, n, s$ ,  $k$  enteros, y donde  $n$  no es divisible por 3. De lo anterior se sigue que  $\Psi(w)$  es la matriz identidad, si y sólo si,  $w$  es la palabra identidad.  $\square$

Considere ahora la acción  $\tau$  del grupo  $\langle A, B \rangle$  sobre el espacio  $\mathbb{R}^3$  definida por  $C.\mathbf{x} = C\mathbf{x}$ . Sea

$$S^2 = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad (33)$$

la esfera de radio 1, centrada en el origen en el espacio tridimensional. Es claro que la acción  $\tau$  puede ser restringida a  $S^2$ . Como se vió en el teorema anterior, cada elemento de  $SO(3, \mathbb{R})$  es una rotación por un cierto ángulo, alrededor de una recta que pasa por el origen. En particular, todo elemento de  $\langle A, B \rangle$  tiene esta forma. Esto implica que la acción  $\tau$  de  $\langle A, B \rangle$  sobre  $S^2$  tiene puntos fijos. En efecto, toda rotación que no sea la identidad, tendrá exactamente dos puntos fijos. Estos puntos son las intersecciones del eje de rotación con la esfera  $S^2$ . Considere el conjunto de todos los puntos fijos de algún elemento de  $\langle A, B \rangle$  distinto de la identidad,

$$F = \{p \in S^2 : p \text{ es un punto fijo de algún elemento } C \neq I_3 \text{ de } \langle A, B \rangle\}. \quad (34)$$

Este conjunto es *numerable* ya que el grupo  $\langle A, B \rangle$  claramente lo es, y cada elemento distinto de la identidad contribuye con exactamente dos puntos fijos. Se puede por lo tanto escoger una ordenación de  $F$ , y escribir  $F = \{p_1, p_2, \dots\}$ . Considere ahora el subconjunto  $S^2 - F$  de  $S^2$ . Este conjunto se llamará *la esfera perforada*. Se ve que la acción de  $\langle A, B \rangle$  sobre la esfera *restringe* a la esfera perforada. Si  $\mathbf{x} \in S^2 - F$  y  $C \in \langle A, B \rangle$  entonces  $C.\mathbf{x}$  no puede ser un punto fijo de ningún elemento  $D \in \langle A, B \rangle$  distinto de la identidad, ya que si  $D.(C.\mathbf{x}) = C.\mathbf{x}$ , entonces, haciendo actuar  $(DC)^{-1}$  a ambos lados, se tendría que

$$\mathbf{x} = (DC)^{-1} \cdot (C.\mathbf{x}) = (C^{-1}D^{-1}) \cdot (C.\mathbf{x}) = (C^{-1}D^{-1}C).\mathbf{x}. \quad (35)$$

Pero  $C^{-1}D^{-1}C \neq I_3$  puesto que de lo contrario  $D^{-1} = I_3$ , y por lo tanto  $D = I_3$ , lo cual es una contradicción. Por tanto, la acción de  $\langle A, B \rangle$  sobre la esfera perforada es una acción *sin puntos fijos*. Si se aplica el Teorema 4 con  $X$  siendo la esfera perforada, se concluye que *ésta es un conjunto paradójico respecto a la acción de  $\langle A, B \rangle$* . Más aún, la demostración de ese teorema permite deducir que la esfera perforada puede partirse en cinco pedazos,  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$ , tales que existen elementos  $C_1, C_2, C_3, C_4$  en  $SO(3, \mathbb{R})$  con

$$C_1.P_1 \cap C_2.P_2 = \emptyset \text{ y } C_1.P_1 \cup C_2.P_2 = S^2 - F \quad (36)$$

y

$$C_3.P_3 \cap C_4.P_4 = \emptyset \text{ y } C_3.P_3 \cup C_4.P_4 = S^2 - F. \quad (37)$$

Esto dice, de acuerdo al comentario a continuación del Teorema 5, que existen caminos continuos

$$\gamma_i : [0, 1] \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$$

tales que

$$\gamma_i(0) = I_3 \text{ y } \gamma_i(1) = C_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4. \quad (38)$$

Entonces cada  $L_{\gamma_i(\cdot)}(P_i)$  es un camino continuo de conjuntos congruentes con  $P_i$ , que comienza en  $P_i$  y termina en  $C_i.P_i$ . En conclusión ¡una sola esfera perforada puede partirse en cinco pedazos, de tal forma que dos de ellos pueden moverse rígidamente (pero independientemente) para formar *una copia de la esfera perforada* y otros dos pueden moverse rígidamente (pero independientemente) para formar *otra copia de la esfera perforada!*. El quinto pedazo simplemente se desecha. A continuación se verá que lo mismo puede hacerse con toda la esfera  $S^2$ .

**Teorema 4.3.** (*Paradoja de Hausdorff*) La esfera  $S^2$  es equivalente a  $S^2 - F$  respecto a la acción de  $SO(3, \mathbb{R})$  sobre  $S^2$ , y por consiguiente, del Teorema 2 y la discusión anterior,  $S^2$  es un conjunto paradójico.

**Demostración 4.2.** Como el conjunto  $F$  es numerable, deberá existir alguna línea recta  $l$  que pasa por el origen, y tal que los dos puntos de intersección de ésta con la esfera unitaria no estén en  $F$ . Sea  $\mathbf{u}_1$  un vector unitario determinado por uno cualquiera de estos dos puntos, y escoja vectores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , tales que  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  sea una base positiva y ortonormal. A continuación se demuestra que debe existir un  $\theta \in [0, 2\pi)$ , para el cual ninguna rotación positiva alrededor de  $\mathbf{u}_1$  por un ángulo de la forma  $n\theta$ , con  $n \geq 1$ , lleva un punto de  $F$  a otro punto (no necesariamente distinto) de  $F$ . En símbolos, se quiere ver que existe  $\theta \in [0, 2\pi)$ , tal que

$$\rho_{\mathbf{u}_1, \theta}^n(F) \cap F = \emptyset, \quad (39)$$

para todo  $n \geq 1$ . Se denota a  $\rho_{\mathbf{u}_1, \theta}$  por  $\rho_\theta$ .

Por cada tripla  $(p_i, p_j, n) \in F \times F \times \{1, 2, \dots\}$  existe un único ángulo  $\theta_{ij} \in [0, 2\pi)$ , tal que

$$\rho_{\theta_{ij}}^n(p_i) = p_j. \quad (40)$$

Como el conjunto  $F \times F \times \{1, 2, \dots\}$  es numerable, por ser un producto cartesiano de una familia numerable (de hecho finita) de conjuntos numerables, entonces el conjunto  $\{\theta_{ij} : i, j \in \{1, 2, \dots\}\} \subset [0, 2\pi)$ , es numerable. Como el conjunto  $[0, 2\pi)$  no es numerable, se puede escoger un ángulo  $0 \leq \theta < 2\pi$ , distinto de todos los ángulos  $\theta_{ij}$ . La rotación  $\rho_\theta$  tiene la propiedad deseada. En efecto, si  $p_i, p_j \in F$  y  $\rho_\theta^n(p_i) = p_j$ , para cierto  $n \geq 1$ , entonces se tendría que  $\theta = \theta_{ij}$ , lo cual contradice la forma como fue escogido  $\theta$ . En lo que sigue, se denota a  $\rho_\theta$  simplemente por  $\rho$ . La relación

$$\rho^n(F) \cap F = \emptyset \quad (41)$$

para  $n \geq 1$ , implica que

$$\rho^n(F) \cap \rho^m(F) = \emptyset \quad (42)$$

para todo  $n, m \geq 0$  y  $n < m$ . Basta observar que la relación

$$\rho^n(F) \cap \rho^m(F) = \emptyset \quad (43)$$

es cierta, si y sólo si, la relación

$$\begin{aligned} \rho^{-n}(\rho^n(F) \cap \rho^m(F)) &= (\rho^{-n} \circ \rho^n)(F) \cap (\rho^{-n} \circ \rho^m)(F) \\ &= F \cap \rho^{m-n}(F) \\ &= \emptyset \end{aligned} \quad (44)$$

es cierta. Pero esta última relación es precisamente la hipótesis.

Defina ahora el conjunto

$$F^* = \bigcup_{n \geq 0} \rho^n(F). \quad (45)$$

Este conjunto es la unión de todos los transladados de  $F$ , con potencias no negativas de  $\rho$ . Se nota que

$$\rho(F^*) = F^* - F. \quad (46)$$

Es claro que

$$S^2 = (S^2 - F^*) \cup F^* \quad (47)$$

es una partición f. p. de  $S^2$ . Ahora,

$$\begin{aligned} S^2 - F &= ((S^2 - F) - \rho(F^*)) \cup \rho(F^*) \\ &= (S^2 - (F \cup \rho(F^*))) \cup \rho(F^*) \\ &= (S^2 - F^*) \cup \rho(F^*). \end{aligned} \quad (48)$$

El último miembro de esta cadena de igualdades proporciona una partición f. p. de  $S^2 - F$ . Estas particiones f. p. de  $S^2$  y  $S^2 - F$ , respectivamente, muestran que estos dos conjuntos son 2-equivalentes respecto a la acción de  $SO(3, \mathbb{R})$  sobre  $S^2$ .  $\square$

Note que los dos elementos de  $SO(3, \mathbb{R})$  que realizan la equivalencia entre la esfera y la esfera perforada, son la identidad y la rotación  $\rho$ . Además, el Teorema 2 y la demostración del Teorema 4 permiten concluir que tanto  $X'$  como  $X''$  son  $l$ -equivalentes a  $S^2$  con  $l \leq 2 \times 2^2 = 8$ . En resumen, de la Observación 1 se sigue que, la esfera  $S^2$  puede ser partida en menos de  $2^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^2 = 20$  trozos, desechar a lo sumo los primeros cuatro, y con los restantes 16 se pueden formar dos grupos de 8 los cuales se usan para ensamblar ¡dos nuevas esferas idénticas a la original!

## 5. LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI

En esta sección se ve cómo se puede explotar el hecho de que la esfera unitaria es paradójica respecto a la acción de  $SO(3, \mathbb{R})$ , para deducir que la bola sólida unitaria

$$B^3 = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \quad (49)$$

es paradójica respecto a la acción del grupo de los movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^3$ . Esta última afirmación se conoce con el nombre de *Paradoja de Banach-Tarski*.

**Teorema 5.1.**  $B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}$  es un conjunto paradójico respecto a la acción de  $SO(3, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{R}^3$ , y por lo tanto, también respecto a la acción de  $M_3$  sobre  $\mathbb{R}^3$ . Además,  $B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}$  es equivalente a  $B^3$ , respecto a la acción del grupo  $M_3$  sobre  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto  $B^3$  es un conjunto paradójico respecto a la acción de  $M_3$  sobre  $\mathbb{R}^3$ .

**Demostración 5.1.** Ya se sabe que  $S^2$  es paradójico respecto a la acción de  $SO(3, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{R}^3$ . Recuerde que esto significa que  $S^2$  se puede escribir como una unión disjunta

$$X' \cup X'' \cup X''', \quad (50)$$

donde  $X' \sim S^2$  y  $X'' \sim S^2$ . Para cada  $H \subset S^2$  se define el cono (sin vértice) determinado por  $H$ , como

$$C(H) = \{ \lambda(u, v, w)^T : (u, v, w)^T \in H \text{ y } 0 < \lambda \leq 1 \}. \quad (51)$$

Es claro que si  $H$  y  $H'$  son subconjuntos disjuntos de  $S^2$ , entonces  $C(H)$  y  $C(H')$  también lo son. Por lo tanto  $C(X')$ ,  $C(X'')$  y  $C(X''')$  son disjuntos a pares, y claramente su unión es  $C(S^2) = B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}$ . Por otro lado, es fácil ver que si  $\rho$  es una rotación cuyo eje sea una recta que pase por el origen, entonces

$$\rho(C(H)) = C(\rho(H)). \quad (52)$$

Por tanto, si  $H$  es un subconjunto de  $S^2$ , tal que hay una partición f. p.  $H = H_1 \cup \dots \cup H_r$  y elementos  $C_1, \dots, C_r \in SO(3, \mathbb{R})$  tales que  $C_1.H_1 \cup \dots \cup C_r.H_r$  es una partición f. p. de  $S^2$ , entonces  $C(H_1) \cup \dots \cup C(H_r)$  es una partición f. p. de  $C(H)$ , y  $C_1.C(H_1) \cup \dots \cup C_r.C(H_r)$  es una partición f. p. de  $C(S^2) = B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}$ . Aplicando este último hecho a  $H = X'$  y  $H = X''$ , se deduce que

$$C(X') \sim C(S^2) = B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}, \quad (53)$$

y

$$C(X'') \sim C(S^2) = B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}. \quad (54)$$

Esto demuestra que  $B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}$  es paradójico respecto a la acción de  $SO(3, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Para demostrar la segunda parte del teorema, se fija una rotación  $\phi$  cuyo eje es la recta perpendicular al plano  $z = 0$ , y que pasa por el punto  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ , por un ángulo  $\theta_0$  tal que  $2\pi/\theta_0$  no sea un número racional. La elección de  $\theta_0$  hace imposible que  $m\theta_0 = 2\pi n$ , para algún par de enteros no nulos  $m$  y  $n$ . De lo anterior se sigue que si  $G$  es el conjunto

$$G = \bigcup_{n \geq 0} \phi^n((0, 0, 0)^T), \quad (55)$$

entonces

$$\phi(G) = G - \{(0, 0, 0)^T\}. \quad (56)$$

En efecto, la inclusión

$$G - \{(0, 0, 0)^T\} \subset \phi(G) \quad (57)$$

es clara, ya que todo elemento de la forma  $\phi^m((0, 0, 0)^T)$  con  $m \geq 1$ , se puede escribir en la forma  $\phi(\phi^{m-1}((0, 0, 0)^T)) \in \phi(G)$ .

La inclusión

$$\phi(G) \subset G - \{(0, 0, 0)^T\} \quad (58)$$

también es cierta, ya que  $\phi(G) \subset G$ , y  $\phi(G)$  no puede contener a  $\{(0, 0, 0)^T\}$  puesto que de lo contrario ocurriría que  $\phi^m((0, 0, 0)^T) = (0, 0, 0)^T$ , para algún  $m \geq 1$  y por tanto  $m\theta_0 = 2\pi n$ , lo cual contradice la escogencia de  $\theta_0$ . Finalmente, se ve que  $B^3$  es equivalente a  $B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}$  respecto a la acción de  $\mathcal{M}_3$  sobre  $\mathbb{R}^3$ . Se comienza por escribir

$$B^3 = (B^3 - G) \cup G. \quad (59)$$

Si se le aplica  $id_{\mathbb{R}^3}$  al primer conjunto y  $\phi$  al segundo, se obtiene

$$(B^3 - G) \cup \phi(G) = (B^3 - G) \cup (G - \{(0, 0, 0)^T\}) = B^3 - \{(0, 0, 0)^T\}. \quad (60)$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

Ya se había visto que  $S^2$  se puede partir en un número de piezas menor o igual a 40, desechar a lo sumo 4, y con las piezas restantes formar dos nuevas esferas. Si se aplica nuevamente la Observación 1, se puede concluir que  $B^3$  se puede partir en un número de piezas  $\leq 2 \times 20 = 40$ , desechar a lo sumo  $2 \times 4$  y con las restantes 32 ensamblar dos nuevas bolas sólidas!

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado, con absoluto detalle, las paradojas de Hausdorff y de Banach-Tarski. Aunque se llaman paradojas, éstas son resultados correctos en la teoría de conjuntos dotada del Axioma de Elección. Estas paradojas no solo sirven para mostrar todo lo que hace posible dicho axioma dentro de la teoría de conjuntos, sino que también pone de manifiesto lo extraño que puede ser el comportamiento de los subconjuntos no medibles de los espacios euclídeos.

## Referencias

- French, R. M. (1988). The Banach-Tarski theorem. *The Mathematical Intelligencer*, 10(4), 21-28.
- Jech, T. (2008). *The axiom of choice*. Courier Corporation.
- Rotman, J. (2012). *An introduction to the theory of groups*. Springer Science and Business Media, 148.
- Stromberg, K. (1979). The Banach-Tarski paradox. *The American Mathematical Monthly*, 86(3), 151-161.
- Wagon, S. (1993). *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press, 24.

# EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE HIERRO EN LA GUAYABA (*Psidium guajava*) Y PIMENTÓN (*Capsicum annuml*) Y SU IMPACTO COMO COMPLEMENTO EN LA DIETA<sup>a</sup>

## EVALUATION OF IRON CONTENT IN GUAYABA (*Psidium guajava*) AND PIMENTON (*Capsicum annuml*) AND ITS IMPACT AS A COMPLEMENT IN THE DIET

PEDRO DÍAZ<sup>b</sup>, ANGEL NAVA<sup>c</sup>, RUTH ÁLVAREZ<sup>d</sup>

Recibido 01-06-2017, aceptado 03-08-2017, versión final 14-09-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** Ingerir alimentos conocidos en Venezuela como guayaba (*Psidium guajava*) y pimentón (*Capsicum annum L.*), pueden estimular la fijación de Fe (II) en el organismo, por lo que, evaluar su participación y sinergia en el cuerpo es de suma importancia. La evaluación estuvo basada en una metodología de diseño no experimental, de tipo campo, con nivel descriptivo. Para ello, se trataron entre 30 a 35 g de cada especie, para la guayaba en diferentes disposiciones (trozos: t, jugo: j y residuo: r), para el pimentón (t) y para la mezcla de ambas especies (jugo y residuo). Después de digerir las muestras con HCl 6M a 100 °C, se analizaron por espectroscopía de absorción atómica (EAA) y espectroscopía de absorción molecular (UV-visible) (EAM), complejando el Fe (II) con o-fenantrolina. Los resultados obtenidos sugieren que la guayaba presenta mayor concentración de Fe en el orden r>t>j. En el pimentón la concentración de Fe resultó ser mayor en los trozos en comparación con los valores obtenidos en la guayaba (trozos y jugo) y la mezcla de ambos con excepción del residuo de la guayaba y de la mezcla. Los resultados sugieren que la fruta y hortaliza estudiada pueden ser utilizadas como complemento en la dieta alimenticia del ser humano.

**PALABRAS CLAVE:** Hierro; *Psidium guajava*; organismo; *Capsicum annum L.*; sinergia.

**ABSTRACT:** Ingestion of food known in Venezuela as guava (*Psidium guajava*) and paprika (*Capsicum annum L.*), may stimulate Fe (II) fixation, in the body, so, assessing their participation and synergy in the body is of utmost importance. The evaluation was based on a non-experimental, field-type design methodology with a descriptive level. For this purpose, 30 to 35 g of each species were treated for guava in different arrangements (pieces: t, juice: and residue: r), for paprika (t) and for the mixture of both species (juice and residue) (A) and molecular absorption (UV) spectroscopy (EAM), complexing the Fe (II) with o-phenanthroline, were analyzed after the samples were digested

<sup>a</sup>Díaz, P., Nava, A. & Álvarez, R. (2017). Evaluación del contenido de hierro en la guayaba (*Psidium guajava*) y pimentón (*Capsicum annuml*). *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 73–86. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64678>

<sup>b</sup>Instituto Universitario de Tecnología de Valencia. Departamento de Química. pedrojdc@hotmail.com

<sup>c</sup>Instituto Universitario de Tecnología de Valencia. Departamento de Química. angelnav1988@gmail.com

<sup>d</sup>Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Salud. Escuela de Ciencias Biomédicas y Tecnológicas. Departamento de Bioquímica. Unidad de Síntesis de Materiales y Metales de Transición (SIMMET). ralvarez1982@gmail.com

with 6M HCl at 100 °C. Results obtained suggest that the guava has a higher concentration of Fe in the order r>t>j. In the paprika, the concentration of Fe was higher in the pieces compared to the values obtained in guava (chunks and juice) and the mixture of both with the exception of guava residue and the mixture. The results suggest that the studied fruit and vegetable can be used as a complement in the human diet.

**KEYWORDS:** Iron; *Psidium guajava*; organism; *Capsicum annuum L.*; synergy.

## 1. INTRODUCCIÓN

La importancia de las frutas y hortalizas en la alimentación humana ha sido valorada desde la antigüedad hasta el punto que los antiguos la denominaban como la comida de los dioses y se le atribuían propiedades mágicas y divinas. En la actualidad, las hortalizas junto con las frutas, forman parte de los alimentos que han adquirido mayor importancia en la dieta humana, esto debido a la información difundida sobre la gran cantidad de vitaminas y minerales que ellas proporcionan. La adquisición de minerales es imprescindible para una buena salud. El hierro, por ejemplo, es necesario para la formación de la hemoglobina proteína encargada de llevar oxígeno a los tejidos. La deficiencia de hemoglobina origina anemia en el organismo (Díez-Lopez *et al.*, 2016). Aunque existen alimentos de origen animal, como la carne de vaca y de pescado que contienen hierro, este mineral puede obtenerse a partir de las frutas y hortalizas, entre las cuales se encuentran la guayaba (*Psidium guajava*) y pimentón (*Capsicum annum L.*). Por tal motivo, es de importancia evaluar el contenido del mineral, para determinar de acuerdo a las diferentes disposiciones de consumo, su aporte en la dieta diaria y su impacto como posible complemento en la asimilación del hierro por el organismo (Maury, 2010). Para el desarrollo del estudio del contenido de hierro en *Psidium guajava* y *Capsicum annum L.*, se emplearon métodos de espectroscopía de absorción atómica (EAA) y espectroscopía de absorción molecular (UV-visible) (EAM).

Hoy en día una de las situaciones de salud que afecta a la población mundial, es el déficit nutricional, es decir, el consumo real de alimentos (Licata, 2010). Por tal motivo, se han investigado las propiedades y beneficios de todos los alimentos, en especial las frutas y hortalizas, ya que proporcionan, entre otros componentes, vitaminas y minerales necesarios en la dieta humana para la conservación de la salud y la prevención de enfermedades ocasionadas ante la carencia o insuficiencia de los mismos en el organismo (FAO & WHO, 2002; Filer & Ziegler, 1997). La cantidad de hierro asimilado de los alimentos varía entre el 1 al 10 por ciento de los alimentos vegetales, en promedio, sólo se absorbe del 10 a 15 por ciento del hierro ingerido a través de la dieta (Serpa *et al.*, 2016; Instituto Nacional de Nutrición, 2001). Los alimentos ricos en hierro promueven la absorción de este elemento en sangre, así como, contribuye al transporte y actuación del oxígeno en el organismo (Díaz & Santana, 2009). Por lo antes expuesto, surge la necesidad de evaluar el contenido de hierro en la guayaba (*Psidium guajava*) y pimentón (*Capsicum annum L.*) y su impacto como complemento en la dieta del ser humano, en función de la cantidad de hierro que aporta la fruta y hortaliza, además de contrastar si en las diferentes formas de consumir dichos alimentos, cambia la disposición del mineral en estudio (Serpa *et al.*, 2016; Instituto Nacional de Nutrición, 2001; Díaz & Santana, 2009; Norma

EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE HIERRO EN LA GUAYABA (*PSIDIUM GUAJAVA*) Y PIMENTÓN (*CAPSICUM ANNUM L.*) Y SU IMPACTO COMO COMPLEMENTO EN LA DIETA  
COVENIN 1409, 1979; Norma COVENIN 1170, 1983).

## 2. PARTE EXPERIMENTAL

La investigación realizada fue de tipo no experimental-descriptiva, debido a que no fue manipulada ninguna variable de manera intencional y se realizó bajo un nivel descriptivo puesto que se estudiaron las muestras de guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) rojo y su mezcla a fin de determinar su contenido de hierro. (Hernández, 2012; Arias, 2006). Se empleó una población formada por la cantidad de seis guayabas y seis pimentones provenientes de un supermercado, ubicado en el municipio Valencia, Estado Carabobo-Venezuela. De dicha población se tomó un total de tres muestras de guayaba de un peso aproximado de 31 g y dos muestras de pimentón rojo, con un peso aproximado de 36 g. Las muestras recolectadas están constituidas por concha, pulpa y semilla. El tipo de muestreo es no probabilístico, puesto que se desconoce la probabilidad que tiene cada elemento de la población para integrar la muestra; además es casual ya que se eligieron los elementos sin juicio o criterio pre establecido (Hernández, 2012; Arias, 2006).

### 2.1. Tratamiento de las muestras (vía húmeda)

El método empleado para tratar las muestras de las especies guayaba (*Psidium guajava*) y pimentón (*Capsicum annum L.*), fue seleccionado con el propósito de hacer la digestión lo más similar al proceso natural de la descomposición de los alimentos en el aparato digestivo humano una vez que se consumen. Es por ello, que se utilizó ácido clorhídrico en alta concentración (6 M) y aplicando calentamiento por debajo de 100°C (Skoog *et al.*, 2001). Para la determinación de hierro se procedió primeramente a preparar las muestras por pesada, se trajeron muestras de guayaba (*Psidium guajava*), en diferentes disposiciones, (trozos, jugo y residuo); para el pimentón se tomaron solamente trozos y luego se hicieron mezclas en iguales proporciones (1:1) de ambas especies para sus análisis respectivos (Skoog *et al.*, 2001).

En la figura 1, se muestra el procedimiento esquematizado para tratar las muestras antes descritas. Se pesaron 30 g de guayaba (*Psidium guajava*), en trozos y en jugo separando de éste el residuo para su análisis, 35 g de pimentón y una mezcla compuesta por 15 g aproximadamente de cada especie. Se colocaron las muestras sobre una plancha de calentamiento por debajo de 100 °C y en agitación continua para su digestión con 25 mL de HCl 6 M por un tiempo de 30 minutos. Se filtraron por gravedad con papel de filtro Whatman N° 42. Se decoloró el filtrado obtenido con carbón activado, filtrando nuevamente. Finalmente, el filtrado se trasvasó y aforó con agua destilada en balones de 100.00 mL (Díaz & Santana, 2009).

### 2.2. Técnicas instrumentales empleadas en la caracterización de las muestras de guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla

Para determinar el contenido de hierro en las muestras de guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla, en sus diferentes disposiciones, (guayaba: trozos, jugo y residuo y pimentón:

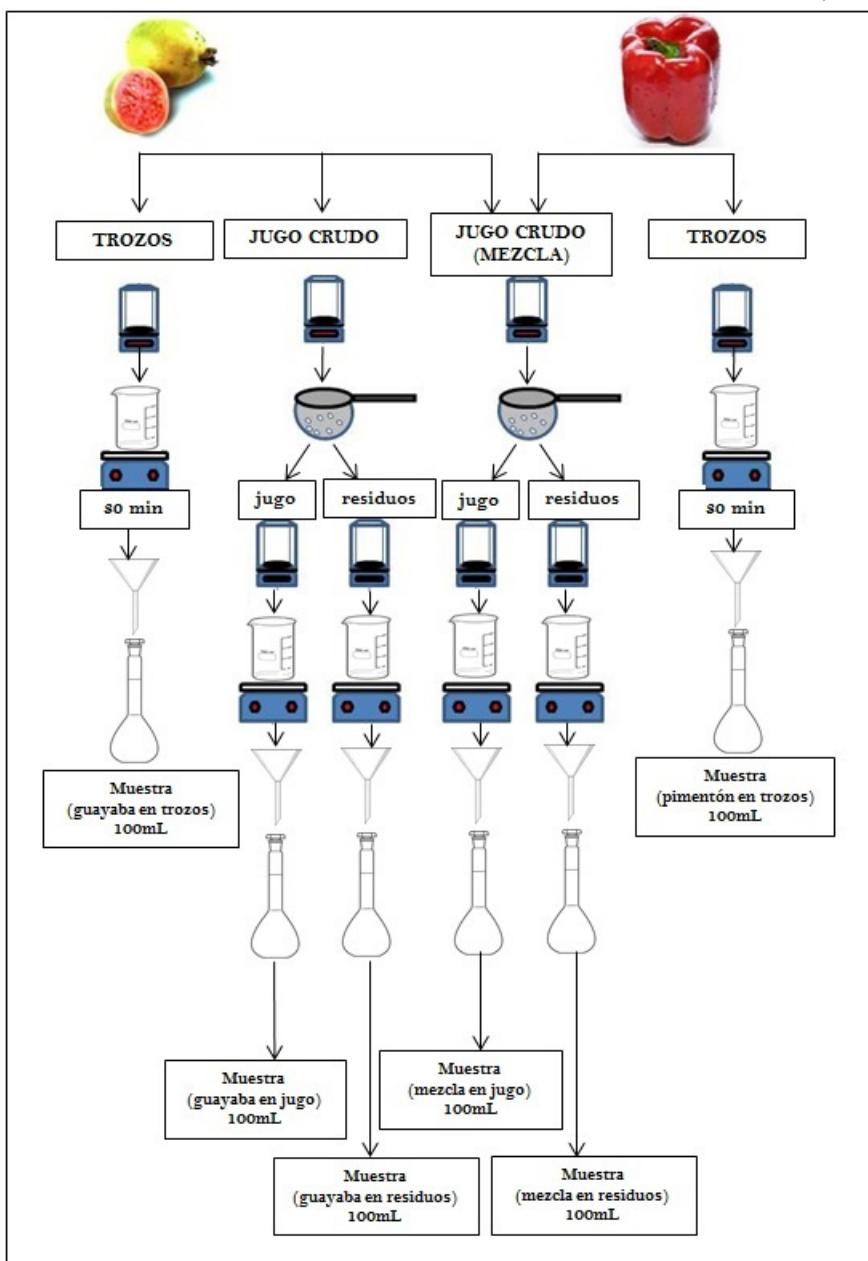


Figura 1: Procedimiento esquematizado para tratar las muestras de guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla en igual proporción. Fuente: Elaboración propia.

trozos), se aplicaron técnicas instrumentales tales como: espectroscopía de absorción atómica (EAA) y espectroscopía de absorción molecular UV-visible (EAM), con la EAA, para determinar el contenido de Fe (II) en las muestras extraídas. Todas las muestras fueron tratadas con ácido y calor hasta llevarlas a digestión para luego poder ser cuantificados el contenido de hierro valorando el contenido del mineral presente en las diferentes disposiciones.

Por su parte, con la EAM, se analizó el hierro en los dos estados de oxidación presentes en el organismo humano, a la muestra se le agregó hidroquinona, como agente reductor del Fe (III) a Fe(II) y o- fenantrolina para el desarrollo de color del complejo Fe (II) y su cuantificación. Las muestras fueron tratadas con HCl y calor hasta su completa digestión; pasando luego por un proceso de decoloración con carbón activado. Posteriormente, fueron separados en dos porciones de volúmenes iguales, a uno se le adicionó hidroquinona y o-fenantrolina y al otro solamente o-fenantrolina, con el fin de observar el contenido de hierro total (Norma COVENIN 1409, 1979; Norma COVENIN 1170, 1983).

### **2.2.1. Determinación analítica del contenido de hierro total en las muestras de guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla**

A continuación se describe por técnica empleada (EAA/EAM), el procedimiento a seguir de acuerdo a las Normas COVENIN anteriormente mencionadas.

**EAA:** Se preparó una solución madre de hierro 100 ppm y, a partir de la misma, una solución estándar de 50 ppm. Luego, fueron preparados cinco, soluciones patrones a partir de la solución estándar en balones aforados de 100.00 mL, y un rango de concentración del hierro (0.5 - 2.5) ppm. Adicionalmente, se preparó un blanco con las mismas características de las soluciones patrones. Finalmente, se midió la absorbancia de cada uno de los patrones y de las muestras, las cuales fueron utilizadas en para construir la curva de calibración de absorbancia en función de la concentración y determinar la concentración de hierro mediante la ecuación de la curva.

**EAM:** Se preparó una solución de hidroquinona disolviendo 0.50 g en 50.00 mL de agua desionizada, paralelamente se preparó una solución de citrato de sodio disolviendo 5.00 g de éste en 50.00 mL de agua desionizada. Por su parte, fue preparada una solución de o-fenantrolina disolviendo 0.124 g de ésta en de 50.00 mL con agua desionizada con 10 mL de etanol. Adicionalmente, se preparó la solución madre de hierro (Fe) de 100 ppm pesando 0.1777 g de  $\text{Fe}(\text{NH}_4)_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , disolviendo y aforando en un balón volumétrico de 250.00 mL con agua desionizada.

Una vez obtenida todas las soluciones, se procedió a disponer de una solución estándar de 25 ppm en un balón de 100.00 mL, por dilución a partir de la solución madre. De esta solución estándar se prepararon en balones aforados de 100.00 mL, cinco soluciones patrones adicionando a cada patrón y muestras problema 2 mL de solución de hidroquinona y 3 mL de solución de o-fenantrolina, en el rango de concentración del hierro (0.25 - 1.25) ppm. Con respecto a las muestras problema, se prepararon con un factor de dilución 1/5 en balones de 25.00 mL a partir de las muestras tratadas a cada dilución de muestra fue añadido 2 mL de solución de hidroquinona y 3 mL de solución de o-fenantrolina, luego se prepararon iguales diluciones de muestras, pero sin añadir la hidroquinona. Finalmente, fue preparado un blanco con las mismas características de las soluciones patrones, se midió la absorbancia de cada uno de los patrones y de

las muestras, para así obtener la curva de calibración. Cabe destacar que la matriz analizada está conformada por: guayaba (g): trozos “t”, jugo “j” y residuos “r”, pimentón (p): trozos “t”, mezcla en igual proporción (g/p) (Norma COVENIN 1409, 1979; Norma COVENIN 1170, 1983).

### **2.3. Comparación de las concentraciones de hierro presente en la guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) con los valores establecidos por el Instituto Nacional de Nutrición (INN)**

Una vez obtenida la concentración de hierro presente en las muestras, se comparó estos resultados, con los reportados por el INN a fin de comprobar si cumplían con los requisitos establecidos por este organismo.

## **3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Los resultados experimentales obtenidos para las muestras de los frutos de guayaba, pimentón y su mezcla, se muestran en función de las variaciones existentes en las concentraciones de hierro (Fe (II) y Fe total), en las diferentes disposiciones y al mezclarse.

### **3.1. Determinación de hierro (II) por espectroscopía de absorción atómica (EAA)**

Los resultados presentados en la tabla 1, gráficamente, en la figura 2, demuestran que el hierro se concentra en mayor proporción en el residuo de la guayaba, seguido en el residuo de la mezcla, este último disminuye probablemente debido a que el residuo del pimentón está compuesto prácticamente de una piel fina que aporta masa pero no aporta hierro, por lo tanto la concentración disminuye por unidad de cada 100 g.

A su vez, el hierro en las especies dispuestas en trozos señala una diferencia notoria, estando en mayor concentración en el pimentón en trozos, mientras que en el jugo de guayaba disminuye, esto probablemente puede ser atribuido a la extracción previa del residuo. Cabe destacar, que aumenta en la mezcla con el pimentón, pudiendo expresarse como el promedio de las concentraciones de hierro en la matriz analizada (García *et al.*, 2016).

Tabla 1: Concentración de Fe (II) guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla determinado por EAA.

Tipo de muestra	Presentación	Cantidad de Fe(II) (mg ± Δmg)/100g
Guayaba	(trozos)	(0.626 ± 0.004)
Pimentón		(1.061 ± 0.008)
Guayaba	(jugos)	(0.534 ± 0.004)
	(residuo)	(2.12 ± 0.06)
Mezcla (1:1)	(jugos)	(0.730 ± 0.005)
	(residuo)	(1.30 ± 0.02)

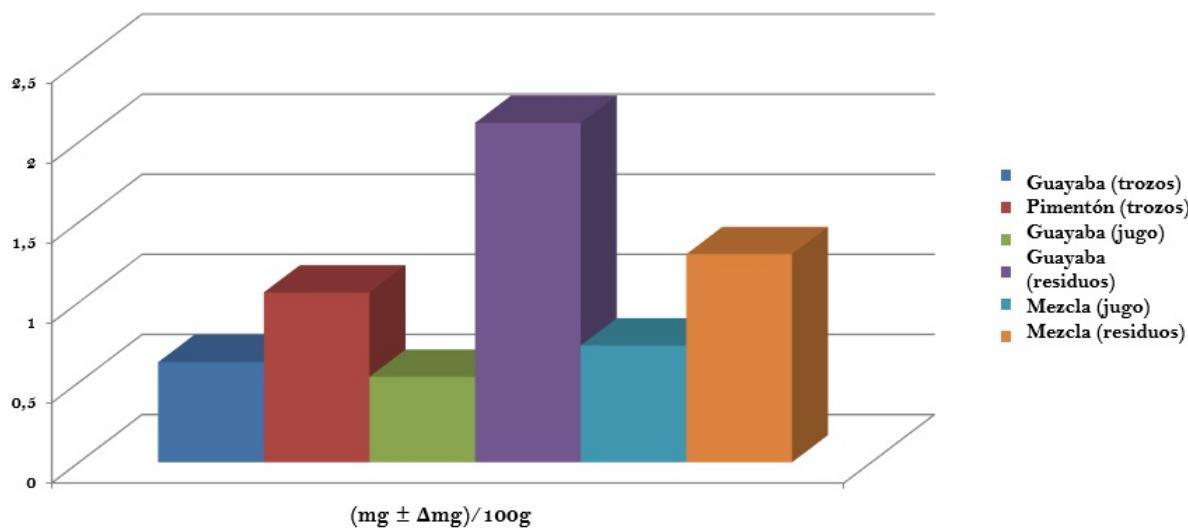


Figura 2: Concentración de Fe (II) en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla por EAA. Fuente: Elaboración propia.

### 3.2. Determinación del hierro (II) y hierro total por espectroscopía de absorción molecular UV-visible (EAM)

Los resultados reflejados en la tabla 2, figura 3 demuestran la concentración de Fe (II) obtenida al aplicar EAM, sin hidroquinona. Al observar los valores obtenidos con este método de espectroscopía de absorción molecular UV-visible, es importante destacar que son similares a los aportados por el método de espectroscopía de absorción atómica, en ambos métodos se evidencia la mayor concentración de hierro en la muestra del residuo de la guayaba, seguido por el residuo de la mezcla, y en menor concentración en los trozos de pimentón; estos resultados son similares, ya que la condición para la determinación de hierro por ambos métodos es que el hierro sea reducido previamente, con el fin de obtener valores de disponibilidad de hierro para el ser humano, en su forma Fe(II) (García *et al.*, 2016).

Tabla 2: Concentración de Fe (II) en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla determinado por UV-visible (Sin Hidroquinona-SH).

Tipo de muestra	Presentación	Cantidad de Fe(II) (mg ± Δmg) / 100g
Guayaba	(trozos)	(0.864 ± 0.008)
Pimentón		(1.024 ± 0.008)
Guayaba	(jugo)	(0.455 ± 0.009)
	(residuo)	(2.4 ± 0.1)
Mezcla (1:1)	(jugo)	(0.98 ± 0.01)
	(residuo)	(1.39 ± 0.03)

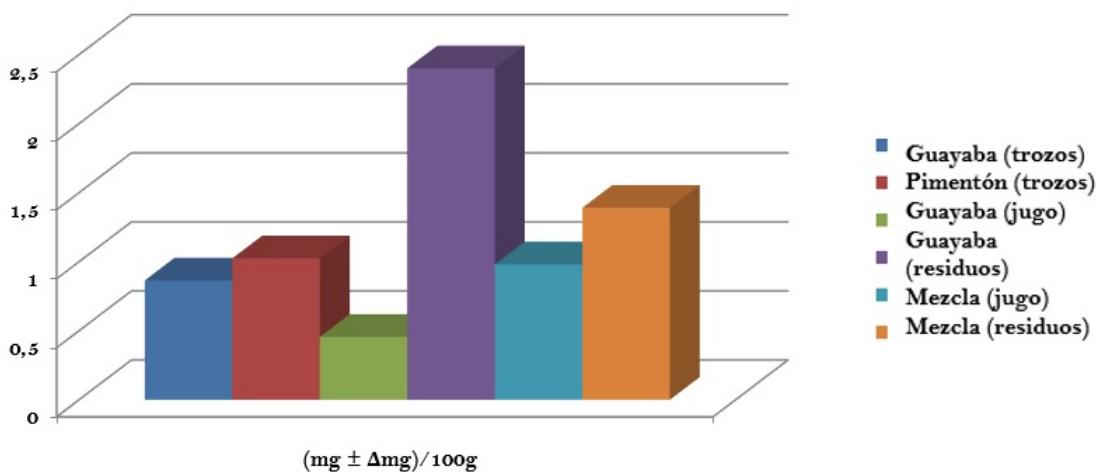


Figura 3: Concentración de Fe (II) en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla determinado por Espectroscopía UV-Visible (Sin Hidroquinona-SH). Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 3, y la figura 4, se muestra la concentración de Fe total en guayaba, pimentón y mezcla determinado por la técnica de UV-visible con hidroquinona. A diferencia del procedimiento anterior, en la aplicación de éste se consideró la adición de una sustancia reductora para transformar las especies de Fe (III) a Fe (II) como valor agregado, con el fin de poder obtener valores de Fe total presente en cada especie por cada 100 g y en cada una de las disposiciones analizadas en la investigación. Es notable que las concentraciones aumentan considerablemente para cada especie y sus disposiciones, debido al hecho de la reducción previa del Fe(III) presente en las especies, de forma tal determinar Fe(II) que representa el total, manteniendo casi proporcionalmente la diferencia en las concentraciones de hierro entre las especies y sus disposiciones, caso distinto con la mezcla de en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) en jugo donde se aprecia un aumento incluso mayor que cada especie por separado, además la diferencia de concentración de hierro en el residuo de la guayaba (*Psidium guajava*), que aumenta considerablemente, esto permite indicar que las mayores concentraciones de hierro se encuentran en su residuo y no en su jugo en forma de Fe (III). Con esta evidencia, se logró demostrar que el procesado de la muestra por licuado permite la oxidación del Fe (II) a Fe (III) en pequeñas proporciones, debido al contacto directo con el oxígeno proporcionado por la fuerte de agitación del procesador de alimentos, con relación a las muestras no reducidas previamente (Díaz & Santana, 2009). Es importante acotar, que la concentración es un factor que depende de las proporciones del mineral por unidad de masa, para este caso por cada 100 g de fruto o especie.

### 3.3. Comparación de las concentraciones de hierro presente en la guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla obtenidos por EAA y EAM

En la tabla 4, y la figura 5, se reflejan los resultados obtenidos. La guayaba al estar en diferentes disposiciones, demuestra que el hierro determinado pueden estar presente en sus diferentes estados de oxidación; al

EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE HIERRO EN LA GUAYABA (*PSIDIUM GUAJAVA*) Y PIMENTÓN (*CAPSICUM ANNUM L.*) Y SU IMPACTO COMO COMPLEMENTO EN LA DIETA

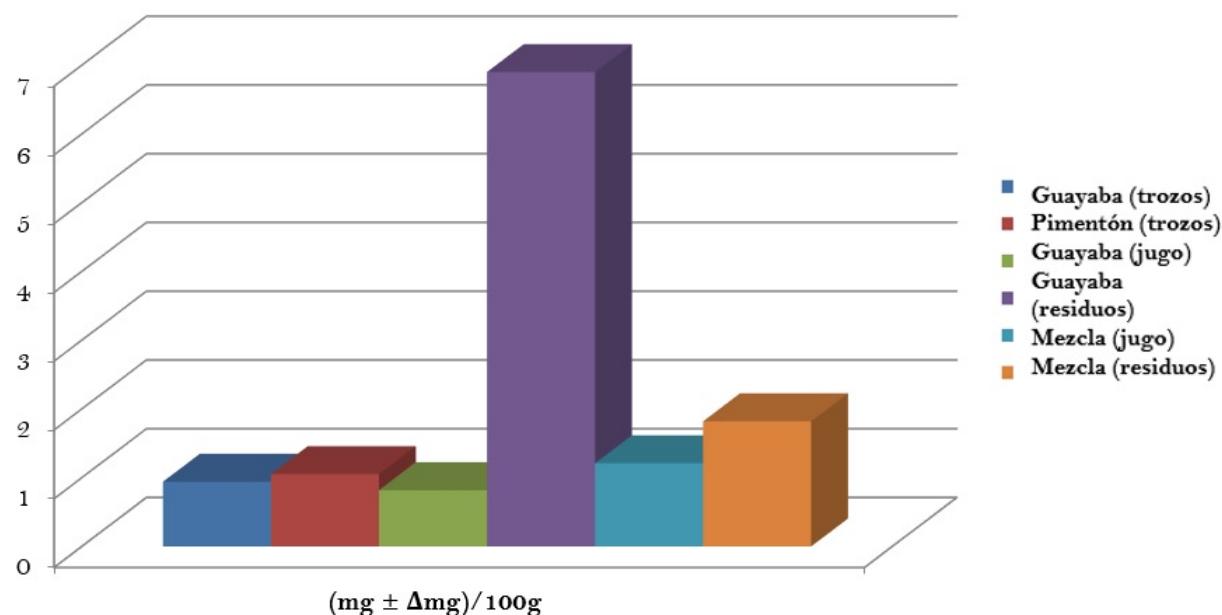


Figura 4: Concentración de Fe (II) en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla por Espectroscopía UV-visible (Sin Hidroquinona-SH). Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3: Concentración de Fe (II) en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla por UV-visible (Con Hidroquinona-CH).

Tipo de muestra	Presentación	Cantidad de Fe total (mg ± Δmg)/100g fruta
Guayaba	(trozos)	(0.941 ± 0.009)
Pimentón	(trozos)	(1.052 ± 0.008)
Guayaba	(jugo)	(0.819 ± 0.009)
Guayaba	(residuo)	(6.9 ± 0.1)
Mezcla (1:1)	(jugo)	(1.21 ± 0.01)
Mezcla (1:1)	(residuo)	(1.82 ± 0.04)

ser tratada en trozos, sólo se observó una diferencia de Fe(III), entre la tratada sin hidroquinona y la tratada con hidroquinona; diferencia menor que la guayaba en jugo, esto es atribuido a posibles factores naturales, como la oxidación por medio del oxígeno presente en el aire atmosférico, y el rompimiento de su estructura liberando sustancias que faciliten su oxidación (Licata, 2010). El consumo de jugo de guayaba (*Psidium guajava*) con pimentón (*Capsicum annum L.*) tiene por objetivo incrementar la probabilidad de fijación del hierro en sangre y ser garante del transporte de oxígeno en el organismo. La mezcla de ambas especies, busca generar un efecto biológico de la captura del hierro en el sistema inmunológico para aquellos pacientes que presentan perdida de energía, cansancio y fatiga (Díez-Lopez *et al.*, 2016).

Cuando se observan las cantidades de hierro (II) determinadas en el residuo de la guayaba se obtiene una diferencia significante entre ambas determinaciones por el método UV-visible (sin hidroquinona y con hidro-

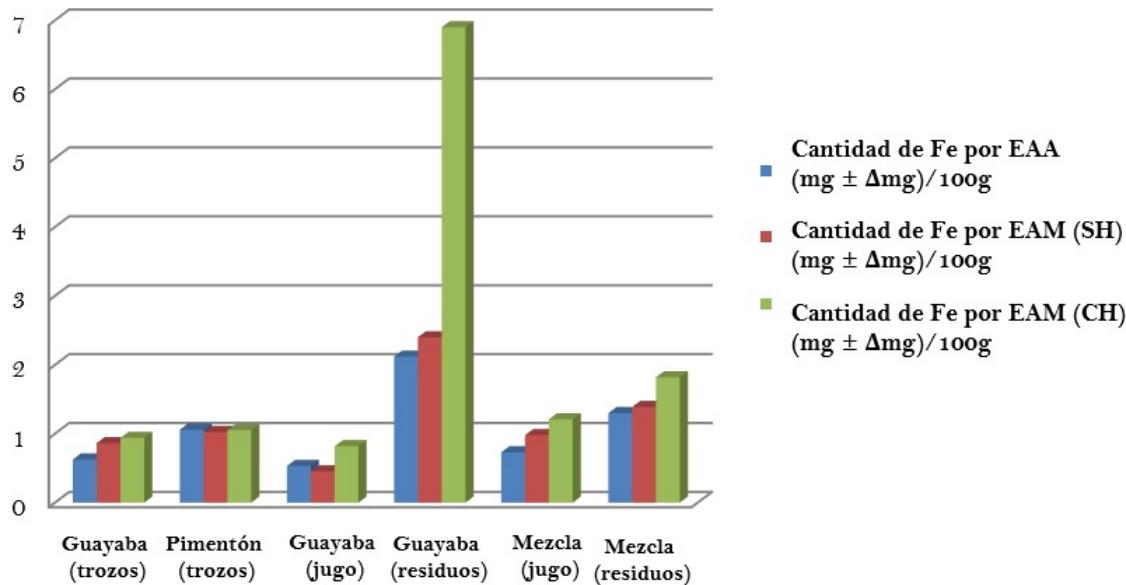


Figura 5: Comparación del contenido de Fe (II) en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y su mezcla por EAM y EAA. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4: Comparación del contenido de Fe (II) en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) y la mezcla de ambas determinado por UV-visible y absorción atómica.

Tipo de muestra	Cantidad de Fe por EAA (mg ± Δmg)/100g	Cantidad de Fe por EAM (SH) (mg ± Δmg)/100g	Cantidad de Fe por EAM (CH) (mg ± Δmg)/100g
Guayaba (trozos)	(0.626 ± 0.004)	(0.864 ± 0.008)	(0.941 ± 0.009)
Pimentón (trozos)	(1.061 ± 0.008)	(1.024 ± 0.008)	(1.052 ± 0.008)
Guayaba (jugo)	(0.534 ± 0.004)	(0.455 ± 0.009)	(0.819 ± 0.009)
Guayaba (residuos)	(2.12 ± 0.06)	(2.4 ± 0.1)	(6.9 ± 0.1)
Mezcla (jugo)	(0.730 ± 0.005)	(0.98 ± 0.01)	(1.21 ± 0.01)
Mezcla (residuos)	(1.30 ± 0.02)	(1.39 ± 0.03)	(1.82 ± 0.04)

Nota: SH: Sin Hidroquinona; CH: Con Hidroquinona.

quinona), esto atribuido a la forma del hierro contenida en el residuo (semilla, restos de concha, partículas no procesadas), la cual en mayor parte es hierro (III). Además, la concentración de hierro en el residuo aumenta con respecto a la guayaba en las disposiciones de trozo y jugo, debido a que en esta parte de la fruta es donde se encuentra la mayor concentración del mineral estudiado (Urdampilleta *et al.*, 2010; Filer & Ziegler, 1997).

Mientras que, en el pimentón de manera contraria muestra un contenido de hierro casi constante, revelando de tal manera que la mayor proporción de hierro es Fe(II), atribuido a no presentar una diferencia relevante en la muestra tratada sin hidroquinona y la tratada con hidroquinona. Por otra parte, se observa en el hierro total determinado por reducción con hidroquinona una mayor concentración en el jugo de la mezcla de ambas especies en comparación con las especies por separado, Asumiendo de esta manera un efecto sinérgico de

EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE HIERRO EN LA GUAYABA (*PSIDIUM GUAJAVA*) Y PIMENTÓN (*CAPSICUM ANNUM L.*) Y SU IMPACTO COMO COMPLEMENTO EN LA DIETA

intercambio de masa, suponiendo que al mezclarse estos pudieran provocar extracción del hierro presente en el residuo o afectar su disponibilidad para los análisis y posiblemente para su asimilación por el organismo (Díez-Lopez *et al.*, 2016; García *et al.*, 2016; Urdampilleta *et al.*, 2010).

### 3.4. Comparación de las concentraciones de hierro presente en la guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annum L.*) con los valores establecidos por el Instituto Nacional de Nutrición (INN)

En la tabla 5, y en la figura 6, se puede observar claramente como el contenido de hierro determinado en la guayaba (*Psidium guajava*) se encuentra por debajo de lo establecido en Venezuela por el Instituto Nacional de Nutrición (Instituto Nacional de Nutrición, 2001; Guerra *et al.*, 2015); con respecto a los valores obtenidos en el pimentón (*Capsicum annum L.*) rojo, estos últimos superan el valor reportado en dicha tabla los cuales fueron obtenidos aplicando EAA (40) (Instituto Nacional de Nutrición, 2001). Cabe destacar que la comparación se realizó con los resultados arrojados mediante los métodos de espectroscopía de absorción atómica y de absorción molecular UV-visible (García *et al.*, 2016).

Tabla 5: Comparación de los valores obtenidos de hierro (Fe), en guayaba (*Psidium guajava*) y pimentón (*Capsicum annum L.*) con los valores establecidos por el INN.

Tipo de muestra	Cantidad de Fe por EAA (mg ± Δmg)/100g	Cantidad de Fe por EAM (SH) (mg ± Δmg)/100g	Cantidad de Fe por EAM (CH) (mg ± Δmg)/100g	Cantidad de Fe según INN (Parte comestible)
Guayaba (trozos)	(0.626 ± 0.004)	(0.864 ± 0.008)	(0.941 ± 0.009)	1.1
Pimentón (trozos)	(1.061 ± 0.008)	(1.024 ± 0.008)	(1.052 ± 0.008)	0.7

Nota: SH: Sin Hidroquinona; CH: Con Hidroquinona.

Es importante mencionar que el hierro total de ambas especies está conformado por proporciones reducidas y oxidadas de Fe (II) y Fe (III), conociendo que para la absorción por el ser humano debe estar en forma reducida, Fe (II).

Un factor natural para la reducción del mineral es el ácido ascórbico contenido en el fruto o especie, en presencia de HCl el cual es segregado por el aparato digestivo humano; por ello es importante mencionar que las tablas proporcionadas por el Instituto Nacional de Nutrición (Instituto Nacional de Nutrición, 2001; Serpa *et al.*, 2016), establecen altos contenidos de ácido ascórbico para la guayaba (*Psidium guajava*), y el pimentón (*Capsicum annum L.*). Esto quiere decir, que la cantidad de hierro que poseen los alimentos no siempre es un indicativo de una asimilación efectiva, ya que también depende de factores bioquímicos, como la deficiencia del mineral en el individuo (ferropenia) (Urdampilleta *et al.*, 2010) que consume la especie, lo que ocasiona un aumento en la asimilación de éste y la presencia de agentes que catalicen su absorción de forma positiva como el ácido ascórbico, ácido cítrico, ácido fólico, entre otros y negativa como los fitatos, oxalatos, fosfatos, entre otros. Es importante realzar que la fruta y hortaliza estudiada puede ser utilizada como complemento en la dieta alimenticia del ser humano para un posible

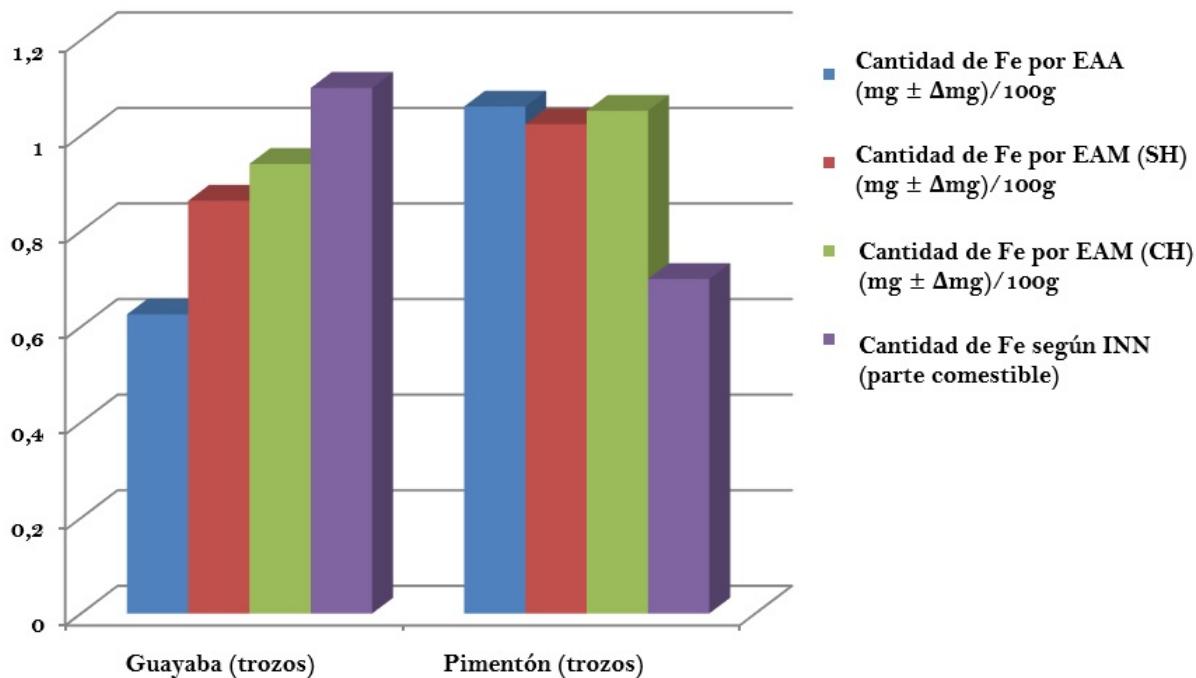


Figura 6: Comparación de los valores obtenidos de hierro (Fe), en guayaba (*Psidium guajava*), pimentón (*Capsicum annuum L.*) con los valores establecidos por el INN. Fuente: Elaboración propia.

impacto en la asimilación de hierro por el organismo (García *et al.*, 2016; Díez-Lopez *et al.*, 2016; Díaz & Santana, 2009).

#### 4. CONCLUSIONES

Al determinar hierro en la guayaba (*Psidium guajava*), en sus diferentes disposiciones, se verifica claramente que la mayor concentración se encuentra en el residuo, constituido principalmente por concha y semillas, el cual proporciona un alto impacto al momento de ser extraído en la preparación de jugo, como también la oxidación del mineral al procesar el fruto por mayor contacto con el oxígeno atmosférico.

En cuanto al pimentón (*Capsicum annum L.*), en comparación con la guayaba (*Psidium guajava*) en trozos, se observó que los valores no difieren, sino que se mantienen en la misma proporción entre métodos de análisis (EAA y EAM).

Por su parte, en la mezcla del jugo de ambas especies guayaba (*Psidium guajava*) y pimentón (*Capsicum annum L.*), se obtiene mayor concentración de hierro que en las especies por separado, resultado determinado por reducción con hidroquinona.

Los resultados obtenidos sugieren que el mayor aportante de hierro para la dieta alimenticia humana es la

EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE HIERRO EN LA GUAYABA (*PSIDIUM GUJAVA*) Y PIMENTÓN (*CAPSICUM ANNUM L.*) Y SU IMPACTO COMO COMPLEMENTO EN LA DIETA

mezcla de la guayaba (*Psidium guajava*) con el pimentón (*Capsicum annum L.*), superando el hierro total determinado en las especies de forma separada (trozos); mientras que el mayor aporte de las especies es el pimentón constituyendo casi en su totalidad hierro en su forma Fe (II) demostrado en los diferentes métodos de análisis EAA y EAM.

Dado a los resultados obtenidos y la discrepancia que existe con los valores reportados en las tablas de composición de alimentos para uso práctico del INN.; es importante expresar que la fruta y hortaliza que se estudiaron pueden ser utilizadas como complemento en la dieta alimenticia del ser humano para un posible impacto en la asimilación de hierro por el organismo.

## Referencias

- Arias, F. (2006). *El Proyecto de Investigación: Introducción a la metodología científica* (5<sup>a</sup> ed.). Caracas: Episteme.
- Díaz, J. & Santana, J. (2009). Cuantificación de hierro, zinc, calcio y vitamina “A” en leche de soya en polvo, de tres marcas comercializadas en los alrededores del centro urbano “José simeon cañas”. Tesis para optar al título de Licenciado en Química y Farmacia. Universidad de El Salvador, Ecuador.
- Díez-Lopez, C.; Lupon, J.; De Antonio, M.; Zamora, E; Domingo, M; Santesmases, J.; Troya, M; Boldó, M. & Bayes-Genis, A. (2016). Cinética de la hemoglobina y pronóstico a largo plazo en insuficiencia cardiaca. *Revista Española de Cardiología*, 69(9), 820-826.
- FAO (Food and Agriculture Organization of the United Nations) & WHO (World Health Organization). (2002). Human Vitamin and Mineral Requirements. Disponible en://www.fao.org/docrep/004/y2809e/y2809e00.html. 04.03.2015
- Filer, L. & Ziegler, E. (1997). *Conocimientos Actuales Sobre Nutrición* (7<sup>a</sup> ed.). Washington: ILSI Press.
- García, C.; Llanos, M.; Mazón, B.; Dávila K. & Cun, J. (2016). Determinación de vitamina C en pimiento capsicum annum por voltametría de barrido lineal. *Revista de Investigación de Talentos III*, (2), 1-9.
- Guerra, A.; Vélez, L.; Barajas, J.; Castro, C. & Gallego, R. (2015). Compuestos de hierro para la fortificación de alimentos: El desarrollo de una estrategia nutricional indispensable para países en vía de desarrollo. *Acta Agronómica*, 65(4), 340-353.
- Hernández, L. (2012). Guía Práctica de Metodología de la investigación en ciencias de la salud (3<sup>a</sup> ed.). Bogotá: Ecoe Ediciones, 134 p. ISBN: 978-958-648-709-2
- Instituto Nacional de Nutrición. (2001). Tabla de Composición de alimentos para Uso Práctico N° 54 “Serie Cuadernos Azules”. Caracas: INN. 8,54,58.

Licata, M. (2010). El hierro en la nutrición. [Fecha de consulta: 27 mayo 2016]. Disponible en: <http://www.zonadiet.com/nutricion/hierro.htm>.

Norma COVENIN 1409-1979: Determinación de Hierro por absorción atómica.

Norma COVENIN 1170-1983: Determinación de Hierro por absorción molecular UV-Visible.

Maury, E.; Mattei, A.; Perozo, K.; Bravo, A.; Martínez, E. & Vizcarra, M. (2010). Niveles Plasmáticos de Hierro, Cobre y Zinc en escolares Barí. *Revista "Pediatría"*, 37(2). [Fecha de consulta: 20 septiembre 2016]. Disponible en: [http://www.pediatria.spp.org.py/revistas/ed\\_2010/nivel\\_plasm.htmL](http://www.pediatria.spp.org.py/revistas/ed_2010/nivel_plasm.htmL)

Serpa, A.; Vélez, L.; Barajas, J.; Castro, C.; Zuluaga, H. & Zuluaga, R. (2016). Compuestos de hierro para la fortificación de alimentos: El desarrollo de una estrategia nutricional indispensable para países en vía de desarrollo. -Una revisión. *Acta Agron*, 65(4), 340-353.

Skoog, D.; Holler, F. & Nieman, T. (2001). *Principios de Análisis Instrumental* (5<sup>a</sup> ed.). Madrid: Mc Graw Hill.

Urdampilleta, A.; Martínez-Sanz J. & González-Muniesa P. (2010). Intervención dietético-nutricional en la prevención de la deficiencia de hierro. *Nutrición clínica y dietética hospitalaria*, 30(3), 27-41.

# EVALUACIÓN DE MÉTODOS PARA ERRADICAR HONGOS ENDÓFITOS DE RAÍCES EN SEMILLAS DE *Brachiaria decumbens* Stapf<sup>a</sup>

## EVALUATION OF METHODS TO ELIMINATE ROOT ENDOPHYTIC FUNGI FROM SEEDS OF *Brachiaria decumbens* Stapf

DIANA TAMAYO<sup>b</sup>, JUAN C. PÉREZ<sup>c</sup>, ELIZABETH MENESES<sup>d</sup>

Recibido 08-05-2017, aceptado 12-09-2017, versión final 19-09-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** La adaptación de plantas a ambientes extremos puede depender de la asociación con hongos endófitos de raíces. Sin embargo, las demostraciones del papel de esos endófitos en las simbiosis son limitadas si no se experimenta con plantas libres de ellos. Este estudio adaptó y evaluó un sistema de germinación masivo de semillas (SGMS) para probar métodos de desinfección de semillas de *Brachiaria decumbens* en estudios con hongos endófitos de raíces. Con este sistema se evaluaron en semillas métodos de desinfección externa (Soluciones de NaOCl al 5% ó Ca(ClO)<sub>2</sub> al 7.14%, o calor [60°C] en baño de agua u horno en varios tiempos), e interna (Captan<sup>TM</sup> y Benomil 50WP (0.1 mg/ml)). El SGMS fue adecuado para el desarrollo de plántulas de *B. decumbens* ya que en cinco días se obtiene abundante material de trabajo (7 a 10 plántulas). Adicionalmente, los métodos de desinfección externa disminuyeron la actividad microbiológica superficial en semillas, comparado con el control (agua). Aplicar NaOCl (5%) resultó en mayor germinación y desarrollo de plántulas, pero no fue posible eliminar estructuras internas de hongos de las raíces, lo que sugiere una relación innata planta-endófito en pasto *B. decumbens*, que impide obtener plantas libres de endófitos. Algunas implicaciones experimentales son presentadas y discutidas a la luz de estos resultados.

**PALABRAS CLAVE:** Bolsas de germinación; hongos endófitos; métodos de desinfección; pastos, simbiosis.

**ABSTRACT:** Plant adaptation to extreme environmental conditions may depend on symbiotic root fungi. However research on this topic is hampered by the difficulties to obtain experimental plants free of endophytes. This study adapted and tested a system of seeds germination (SSG) of *Brachiaria decumbens* which allows evaluating seed disinfection methods for experimental purposes with this important tropical grass and its roots endophytes. The system called germination bags used inexpensive, locally available materials. Using seeds, this system evaluated external (5% NaOCl, heat, 7.14% Ca(ClO)<sub>2</sub>) and internal (Captan<sup>TM</sup> and Benomil 50WP (0.1 mg/ml)) disinfection methods. The results indicated that our SSG is suitable for the development of *B. decumbens* seedlings and yields abundant working plant material in five days. In addition the three external disinfection methods tested reduced the outer microbial activity

<sup>a</sup>Tamayo, D., Pérez, J. & Meneses, E. (2017). Evaluación de métodos para erradicar hongos endófitos de raíces en semillas de *Brachiaria decumbens* Stapf. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 87–101. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64691>

<sup>b</sup>Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. dmtamayol@unal.edu.co

<sup>c</sup>Laboratorio Microbiología del Suelo. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. jcpe-rez@unal.edu.co

<sup>d</sup>Centro de Investigación Corporación Universitaria Minuto de Dios - Seccional Bello. elizabeth.meneses@uniminuto.edu

of the seeds as compared to a control treatment (water), with the use of 5% NaOCl showing the highest germination rate of seeds per bag. Fungicide use as internal disinfection method did not eliminate root fungal internal structures, suggesting an innate plant-endophyte relationship on *B. decumbens* grass that prevents to study plants without the presence of endophytes. Further experimental consequences of these results are discussed.

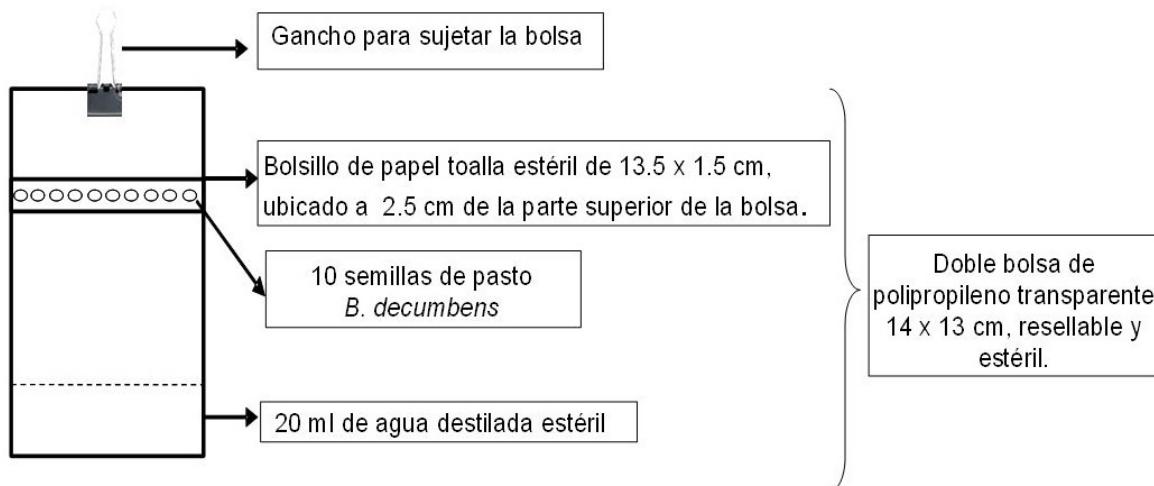
**KEYWORDS:** Disinfection methods; fungal endophytes; germination bags; grasses; symbiosis

## 1. INTRODUCCIÓN

Muchas especies vegetales forman simbiosis con hongos endófitos y micorrizas, que proveen beneficios nutricionales y tolerancia a condiciones ambientales adversas (Rodriguez *et al.*, 2004). *Brachiaria decumbens* es un pasto común en el trópico alto y bajo de Suramérica, que comúnmente presenta raíces colonizadas por hongos septados, cuyo papel es desconocido. Estos hongos de los filos Ascomycota y Basidiomycota, poseen hifas melanizadas y septadas, forman microesclerocios (Jumpponen & Trappe, 1998) y son comunes en raíces de plantas en ambientes extremos, por ejemplo zonas con temperatura muy baja (Newsham *et al.*, 2009) o temperatura muy alta y suelos secos (Porras *et al.*, 2008). Para entender el papel de esa simbiosis es prerrequisito usar plantas libres de hongos como controles experimentales. Sin embargo, esos microorganismos son transmitidos y al parecer imposibles de erradicar del material de propagación (Barrow *et al.*, 2004). Para ello se han evaluado sistemas de propagación controlada que emplean en condiciones estériles estacas o semillas (Alarcón & Ferrera-Cerrato, 1999) sembradas en medios de crecimiento líquidos (cultivos hidropónicos) (Groleau-Renaud *et al.*, 1998), sólidos porosos (Henry *et al.*, 2006), agares (Heist *et al.*, 2002), arena (Henry *et al.*, 2006), arcilla (Biondini, 1988) y/o perlas de vidrio (Sandnes & Eldhuset, 2003).

Para esterilizar componentes inertes del sistema a emplear se ha usado irradiación gama o autoclave (Henry *et al.*, 2006), mientras que para desinfectar semillas se han utilizado métodos térmicos (Misaghi & Donndelinger, 1990; Kannadan & Rudgers, 2008) o inmersión en soluciones diluidas de etanol ( $C_2H_6O$ ) (Ernst *et al.*, 2003), hipoclorito de sodio (NaOCl) (Simons *et al.*, 1996), hipoclorito de calcio ( $Ca(ClO)_2$ ) (Knudson, 1929), ácido sulfúrico ( $H_2S_4$ ) (Hepper, 1981). Para desinfección interna de raíces se usan fungicidas de acción sistémica, de contacto, o traslaminar (Latch, & Christensen, 1982; Gibert & Hazard, 2011; Barney, 2003; Ernst *et al.*, 2003). El uso de calor es una de las técnicas más utilizadas para eliminar hongos endófitos en pastos por exposición a diferentes tiempos y grados de temperatura (Latch, & Christensen, 1982; Wali *et al.*, 2011), ya sean en hornos de convección (Kannadan & Rudgers, 2008) o por inmersión de semillas en baños de agua (Wali *et al.*, 2011).

No obstante, la no inclusión de pruebas de verificación de desinfección del material vegetal en algunos estudios (Mergulhao *et al.*, 2001; Redman *et al.*, 2002) o el uso de métodos de verificación poco rigurosos deja dudas acerca de si el material vegetal empleado estaba realmente limpio al momento de tomar variables de interés como la capacidad de colonización de los hongos endófitos, el efecto fisiológico sobre las plantas

Figura 1: Sistema de germinación masiva de semillas de *B. decumbens*. Las semillas usadas tienen una longitud media de 3 mm.

Fuente: Elaboración propia.

o su potencial en la adaptación de las plantas a condiciones extremas de fertilidad de suelo y clima. En cualquier caso, es necesario obtener un gran número de plantas si se desea evaluar en poblaciones de ellas y en condiciones semi-controladas los efectos de hongos simbiontes en raíces. Hasta el presente no existe un método económico y rápido para ello. En estudios anteriores con el pasto *B. decumbens* en los que se pretendía evaluar el papel de estos hongos endófitos en la tolerancia del pasto a condiciones extremas de sequía o nutrición, se encontró que todas las plantas incluidas en tratamientos control no inoculados, y obtenidas del mismo lote de semillas usadas aquí, presentaban una alta colonización por estos hongos, lo que limitó el poder concluir claramente sobre el papel de esta simbiosis en el desempeño de las plantas (Tamayo, 2017). El objetivo de este estudio fue desarrollar un sistema de germinación masivo de semillas de *B. decumbens* que permitiera evaluar métodos de desinfección de raíces bajo condiciones de laboratorio y obtener plántulas libres de endófitos para ser usadas en experimentos posteriores.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

### 2.1. Sistema de germinación masiva de semillas de *B. decumbens*

Este sistema se adaptó a partir del reportado previamente por Kloepfer & Schroth (1981) en bolsas de crecimiento, y fue modificado según la descripción detallada en la Figura 1.

El sistema es presentado como de germinación masiva, ya que cada bolsa con un conjunto de semillas ocupa el mismo volumen que una carpeta legajadora, de las cuales pueden apilarse hasta 50 en un gabinete regular para almacenar documentos. En una prueba inicial se determinó la efectividad del sistema para germinación de semillas y desarrollo inicial de plántulas de *B. decumbens* en condiciones estériles. Se utilizaron semillas comerciales (Agrosemillas, lote: R044/12, pureza: 95.1%) sometidas a dos condiciones de temperatura (alterna (24 horas a 4°C y 96 horas a temperatura ambiente) y continua (120 horas a temperatura ambiente))

en un diseño completamente al azar con 10 repeticiones. Cada repetición estuvo constituida por una bolsa de germinación con 10 semillas (Figura 1). En el laboratorio, después de aplicar los tratamientos, las bolsas se colgaron del borde superior (usando ganchos) en carpetas plásticas oscuras y se mantuvieron tres días en oscuridad y luego dos días en períodos alternos de 12 horas oscuridad y 12 horas luz natural indirecta incidente sólo sobre el borde superior de la bolsa. Las variables medidas fueron: germinación de semillas (%) y crecimiento de raíces (cm) a los cinco días después de iniciada la prueba. Usando el software R se realizó una prueba t de student para comparar los promedios de las variables en los dos tratamientos.

## **2.2. Efectividad de métodos para la desinfección de semillas de *B. decumbens***

### **2.2.1. Desinfección superficial de semillas**

Se tomaron conjuntos de 40 semillas que se sometieron a tratamientos previamente presentados en la literatura: solución de NaOCl al 5% (Simons *et al.*, 1996), Ca(ClO)<sub>2</sub> al 7.14% (Knudson, 1929), calor (Misaghi & Donndelinger, 1990), y agua destilada estéril (control). Las soluciones de hipoclorito de calcio o sodio se obtuvieron a partir de sales suministradas por la empresa Protokimica S.A. ([www.protokimica.com](http://www.protokimica.com)). Se registró la actividad microbial residual en la superficie de la semilla, es decir, se determinó si hubo microorganismos que sobrevivieron después de estar expuestos por cierto tiempo al agente desinfectante. Se colocaron las semillas en placas petri con agar PDA, se incubaron en oscuridad a 25°C por tres días y después de 24 y 72 horas se registró en cada tratamiento el número de semillas rodeadas por unidades formadoras de colonias (UFC) de hongos o bacterias.

### **2.2.2. Combinación de desinfección externa e interna de semillas**

Consistió en cuatro experimentos independientes. En cada uno se evaluó un método de desinfección superficial de semillas, combinado con dos tratamientos para desinfección interna (fungicidas) o un control con agua. Cada experimento utilizó un diseño completamente al azar y 10 réplicas, cada una conformada por una bolsa de germinación con 10 semillas de *B. decumbens* (Figura 1), que se incubó por cinco días en las mismas condiciones descritas arriba. Los métodos de desinfección evaluados se presentan en la Tabla 1. Después de ese tiempo se determinó la germinación de semillas (%), longitud de raíces (cm) a partir de fotografías analizadas en el software libre ImageJ (Rasband, 2007), y actividad microbiológica interna de las semillas determinada indirectamente en fragmentos de raíces. Para estas últimas se tomaron de cada réplica las raíces con al menos 1cm de longitud y se desinfectaron para prevenir cualquier contaminación externa (etanol al 95% 1 minuto, agua destilada estéril 10 segundos, NaOCl al 2.5% 1 minuto, agua destilada estéril 2 minutos), se secaron sobre papel toalla estéril, se cortaron en fragmentos de 1 cm, y finalmente se tiñeron de acuerdo al método de Vierheilig *et al.* (1998). Se consideró una raíz colonizada si al menos uno de sus fragmentos presentaba estructuras de hongos. Los datos se presentan como la relación entre el número de raíces positivas y el total de raíces presentes en cada réplica.

Para diferenciar claramente estructuras formadas por los hongos endófitos en raíces, en el experimento

siguiente se usó la tinción doble (azul tripano-para hongos y Sudan IV-para lípidos) modificada de Barrow (2003).

### **2.2.3. Desinfección externa (NaOCl al 5 %) e interna (calor a diferentes tiempos)**

Consistió en cinco tratamientos donde las semillas que se desinfectaron externamente con NaOCl al 5 % se mantuvieron a 60°C durante 10, 20 ó 30 minutos en baño de agua o durante 6 días en horno seco. Adicionalmente se incluyó un control a temperatura ambiente. Se utilizó un diseño completamente al azar y cada tratamiento con cinco repeticiones, cada una conformada por una bolsa de germinación con diez semillas de *B. decumbens* (Figura 1), que se incubó por ocho días en las mismas condiciones descritas anteriormente. Como variables se midieron la germinación de semillas (%), longitud de raíces y plúmula (cm) a partir de imágenes (Rasband, 2007), actividad microbiológica interna de las semillas por tinción doble presentada por Barrow (2003) y porcentaje de colonización (Giovanetti & Mosse, 1980) por hifas, esporas, cuerpos lipídicos y otras estructuras atípicas mencionadas por Barrow (2003) como protoplastos, sin pared distinguible o con paredes muy delgadas hialinas y de difícil detección por tinciones para quitina fúngica.

$$\text{Colonizaci}\text{o}\text{n} (\%) = \frac{\text{Conteos positivos}}{\text{Conteos positivos} + \text{Conteos negativos}} \times 100 \quad (1)$$

Tabla 1: Métodos de desinfección de semillas de *B. decumbens*.

Experimento	Método de desinfección superficial	Métodos de desinfección interna
I	NaOCl al 5 % (Simons et al., 1996)	Fungicida Captan™,
II	Calor (Misaghi y Donndelinger, 1990)	Fungicida Benomil 50WP,
III	Ca(ClO) <sub>2</sub> al 7.14 % (Knudson, 1929)	Agua destilada estéril (control)
IV	Agua destilada estéril (testigo)	

Nota: Los fungicidas Captan y Benomil se emplearon a un concentración de 0.1mg/ml y se adicionaron al agua de las bolsas de germinación correspondientes.

Para el análisis estadístico se revisaron los supuestos de normalidad de residuales y homogeneidad de varianzas previo al Anova. La variable longitud de raíz del experimento IV se transformó (logaritmo) para cumplir con los supuestos del Anova y todos los análisis se realizaron con el paquete estadístico libre R ([www.r-project.org](http://www.r-project.org)).

## **3. RESULTADOS**

### **3.1. Desempeño del sistema de germinación masiva de semillas de *B. decumbens***

Cinco días después de iniciada la prueba se obtuvieron 7 a 10 semillas germinadas en cada bolsa, con longitudes promedio en raíces de  $4.6 \pm 0.8$  cm. No se presentaron diferencias significativas ( $p>0,05$ ) entre los tratamientos de temperatura evaluados (Figura 2), y en general el desarrollo de plántulas fue adecuado.

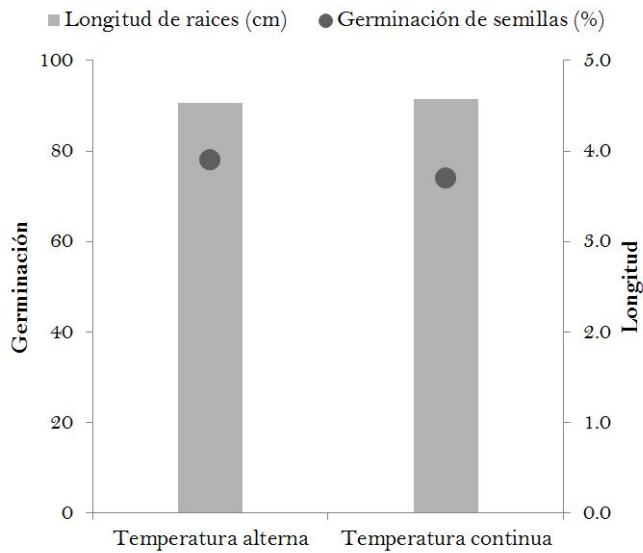


Figura 2: Germinación de semillas y longitud de raíces después de los tratamientos con temperatura alterna o continua. Fuente: Elaboración propia.

Además al usar bolsas transparentes dentro de carpetas oscuras pudieron revisarse superficialmente las raíces sin interrumpir el desarrollo del experimento.

### **3.2. Efectividad de métodos para la desinfección externa e interna de semillas de *B. decumbens***

#### **3.2.1. Desinfección externa de semillas**

Los tres métodos de desinfección externa disminuyeron diferencialmente la actividad microbial residual superficial en las semillas, en comparación con el tratamiento control con aplicación de agua. En general, ningún tratamiento individual fue completamente efectivo para eliminar simultáneamente bacterias y hongos cultivables durante el período de evaluación de las semillas. Por ejemplo, el tratamiento con  $\text{Ca}(\text{ClO})_2$  eliminó bacterias superficiales, mientras que el tratamiento con calor eliminó hongos (Figura 3).

#### **3.2.2. Combinación de desinfección externa e interna de semillas**

La germinación de semillas fue afectada diferencialmente por los métodos de desinfección externa. La aplicación de  $\text{Ca}(\text{ClO})_2$  o  $\text{NaOCl}$  ( $p=0.0022$ ) en semillas resultó en niveles de germinación superiores a 70 %. Pero en el tratamiento con calor las semillas no germinaron (Figura 4).

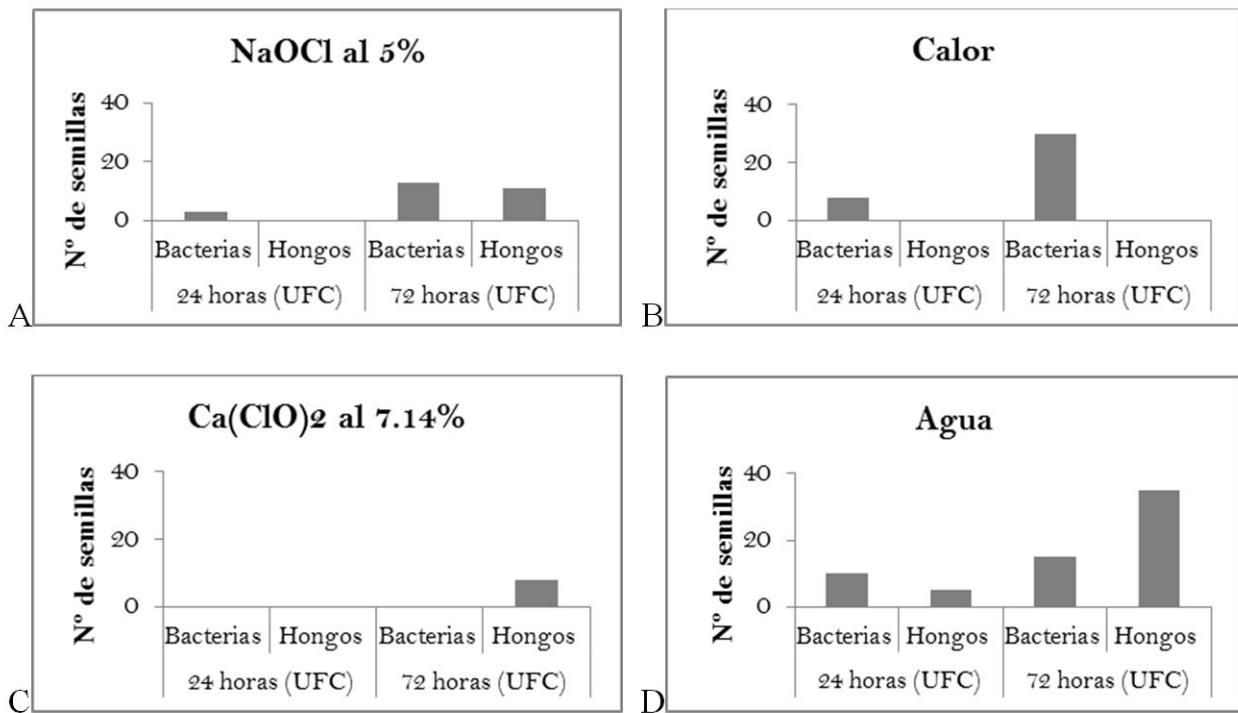


Figura 3: Actividad microbial residual en la superficie de las semillas 24 y 72 horas después de aplicar métodos de desinfección externa en semillas de *B. decumbens*. Los paneles A, B y C representan tratamientos externos de desinfección. El panel D representa un control que recibió solo agua. El eje vertical indica el número de semillas que presentaron crecimiento de colonias de hongos o bacterias. Fuente: Elaboración propia.

Al combinar la aplicación de Captan con NaOCl se incrementó significativamente la germinación, aunque este efecto no se observó al aplicarlo en semillas pretratadas con Ca(ClO)<sub>2</sub>. La aplicación de Benomil sin desinfección externa tuvo mayor germinación si se compara con el Captan ( $p=0.008$ ), a su vez el tratamiento con Captan fue significativamente menor en germinación que cuando no se les aplicó ningún tipo de desinfección externa o interna (control) ( $p=0.021$ ), mientras que al aplicar benomil tuvo mayor longitud de la raíz en comparación al control ( $p = 0.0042$ ). Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 4. Con respecto a la actividad microbial residual al interior de la semilla, en los dos primeros experimentos que presentaron germinación se observó colonización por hongos endófitos (Figura 4), evidenciada por la presencia abundante de esporas de hongos endófitos en las raíces a los cinco días de germinadas las semillas.

### 3.2.3. Desinfección externa (NaOCl al 5 %) e interna (calor a diferentes tiempos)

La utilización de calor no eliminó totalmente los hongos endófitos de la raíz, sin embargo los tratamientos en semillas a 60°C por 10 y 30 minutos redujeron significativamente alrededor del 40 ( $p=0.047$ ) y 80 % respectivamente la colonización de estructuras fungicas en la raíz, comparado con semillas no sometidas

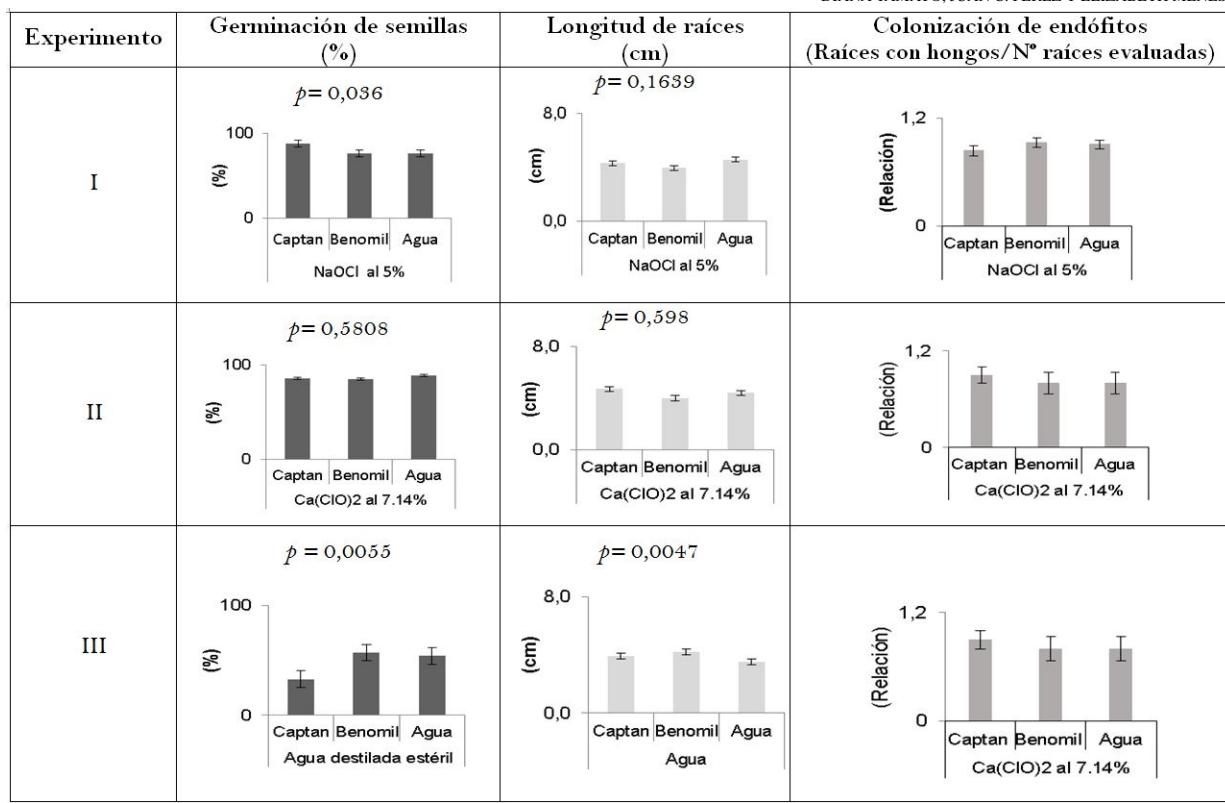


Figura 4: Germinación de semillas, longitud de raíces y colonización por hongos endófitos en raíces en cada tratamiento. Las barras en las columnas indican el error estándar (ES), ( $n=300$ ). Fuente: Elaboración propia.

a calor, aunque este último tratamiento tuvo efecto negativo significativo en la germinación de semillas, y longitud de la raíz ( $p = 0,006$ ) y la plúmula ( $p = 0,022$ ) (Figura 5).

La tinción dual permitió observar diferentes estructuras de los hongos endófitos en las raíces, con paredes quitinosas de color azul y nombradas por Barrow (2003) como atípicas, rodeando posibles cuerpos lipídicos, teñidos de color rojo. Esas estructuras fueron muy comunes en el tratamiento con agua, mientras que el tratamiento en horno presentó un mayor número de esporas.

## 4. DISCUSIÓN

Este estudio permitió adaptar un sistema para obtener plántulas de pasto *B. decumbens* en condiciones controladas, que permitirá evaluar en el laboratorio la efectividad de métodos o tratamientos, en menos de cinco días, para obtener plantas libres de hongos endófitos o al menos con niveles reducidos de ellos, y analizar así sus interacciones entre ellos o con las plantas. Adicionalmente, aunque al combinar algunos métodos fue posible reducir la colonización posterior de raíces por hongos endófitos, no fue posible obtener plantas libres de hongos endófitos. Estos resultados permitirían diseñar apropiadamente experimentos futuros para

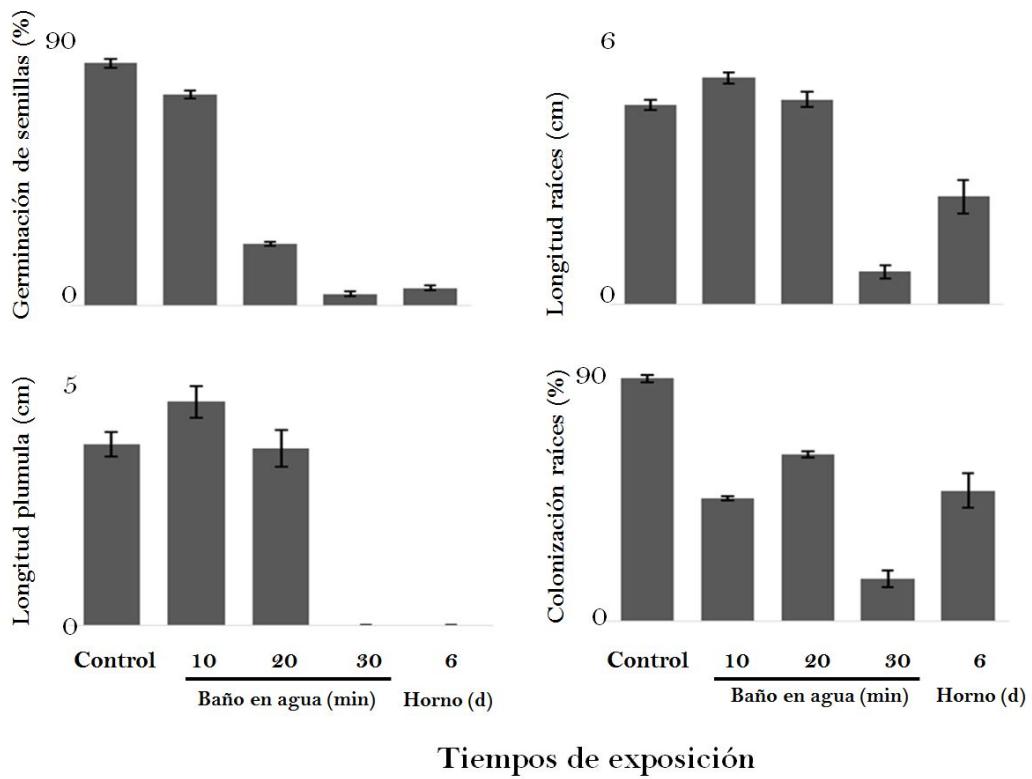


Figura 5: Desinfección de semillas de *B. decumbens* por calor en diferentes tiempos de exposición. Las barras en las columnas indican el error estándar (ES), (n=50 por tratamiento). Fuente: Elaboración propia.

evaluar en las simbiosis con plantas, el papel de estos hongos endófitos, que al menos para otras especies vegetales se han considerado como innatos e imposibles de erradicar con tratamientos probados en áreas como cultivo de tejidos vegetales (Barrow *et al.*, 2004).

Con respecto a la desinfección externa del material vegetal, la aplicación de sales como NaOCl y Ca(ClO)<sub>2</sub> disminuyeron la presencia de hongos y bacterias en la superficie de las semillas de *B. decumbens* y favorecieron la germinación y desarrollo de las plántulas. Una posible razón para la eliminación apenas parcial de microorganismos superficiales puede deberse a que su efectividad dependió de la concentración de microorganismos que allí se encontraban. Sauer & Burroughs (1986), afirman que un alto número de esporas puede crear una barrera que impide la penetración del compuesto químico, así mismo, una alta concentración también puede producir muerte incompleta de esporas como resultado de una pérdida de contacto entre las esporas y el desinfectante, cuando este último no se agita lo suficiente con las semillas. Aunque el método de siembra en PDA como prueba para confirmar la desinfección superficial de las semillas es la más empleada en la literatura, no es la más apropiada ya que ciertas especies de microorganismos son indetectables a través de este medio, por lo tanto, es preferible emplear en experimentos posteriores pruebas adicionales como la microscopía de fluorescencia (Gamalero *et al.*, 2003) o pruebas moleculares cuantitativas independientes de

cultivo. Adicionalmente, por la presencia universal de bacterias asociadas a plantas, será necesario definir también métodos que permitan su cuantificación y reducción, o eliminación. Aunque tanto esos métodos como otros grupos de microorganismos están por fuera del alcance de esta investigación, de la que no se tiene precedente en este tipo de pasturas.

Con base en la ineficacia relativa de los tratamientos probados aquí, es posible sugerir que las pruebas con estos hongos deben partir de niveles de inóculo ya presentes en el material vegetal. Una alternativa razonable es inducir diferencias en niveles de colonización inicial por endófitos a partir de combinaciones de tratamientos fisico-químicos. Por ejemplo el uso de NaOCl al 5 % seguido por calor a 60°C en baño de agua por 10 minutos, redujo el porcentaje de colonización de hongos endófitos en cerca de 40 % sin ocasionar daños evidentes a la planta. Aunque los efectos podrían depender de la forma de distribución de calor en cada especie particular. Wali *et al.* (2011) eliminaron endófitos de semillas de *Festuca arundinacea*, a 56°C por 30 minutos, mientras que en *Poa alsodes* y *Achnatherum sibiricum* se eliminaron endófitos por tratamiento de semillas a 60°C durante 30 días (Kannadan & Rudgers, 2008; Li *et al.*, 2012), sin afectar la germinación.

Con fungicidas se encontró efecto significativo de Captan y Benomil en germinación y desarrollo de semillas, al disminuir en cerca de 50% el porcentaje de germinación (Captan) y aumentar el número de raíces principales por bolsa (Benomil) (Figura 4, experimento IV), pero la desinfección interna de semillas es ineficiente. Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Bayman *et al.* (2002); Gamboa *et al.* (2005) y Chen (2011) quienes empleando concentraciones más altas de Benomil o Captan (Barney, 2003), otras formas de aplicación del fungicida (al sustrato, sobre plántulas) e incluso otros fungicidas de acción translaminar o de contacto como el propiconazol o el procloraz no lograron eliminar en un 100 % los hongos endófitos en plántulas de *Lepanthes rupestris*, *Guarea guidonia* o *Lolium perenne*.

Pero mas allá del sistema de cultivo adaptado para esta investigación, la detección de hongos endófitos en este pasto, así como la imposibilidad de erradicarlos tiene implicaciones para la realización de pruebas de re-inoculación de estos hongos y posiblemente otros microorganismos. Esto sugiere que en el pasto *B. decumbens*, bajo condiciones naturales, existe una relación innata planta-endófito como sucede en especies de *Vaccinium* (Rayner, 1929) o *Bouteloua* (Barrow *et al.*, 2004). De acuerdo con esos autores, no es posible obtener plantas libres de hongos endófitos por desinfección o remoción de la cubierta de las semillas, ya que estos hongos penetran profundamente el endospermo de semillas en reposo; por lo tanto, durante la germinación todos los tejidos que emergen son objeto de invasión por el micelio de dichos hongos. A nivel experimental, si no se cuantifica el efecto de simbiontes innatos en material de propagación antes de inocular otros hongos, sería difícil concluir sobre el papel en el desempeño vegetal por inoculación de aislamientos particulares de hongos. Aunque la transmisión de hongos endófitos puede ser a través de semillas (vertical) o contacto entre plantas (horizontal) (Wiewióra *et al.*, 2015), numerosas investigaciones no registran pruebas sobre la limpieza de plantas testigo. Sin embargo, esos resultados podrían depender de la presencia o ausencia de estos hongos en el material de propagación. Por ejemplo, un ejercicio simple de búsqueda en *Google*

Scholar utilizando los términos *fungal + septate + endophyte + plant + roots + anova* entre 2014 y 2015 indicó que de 89 artículos, apenas 7 indicaban claramente la verificación de colonización o no de hongos endófitos en los tratamientos control, lo que limita el alcance de conclusiones en este tipo de investigaciones.

En esta investigación no se usaron otros métodos de detección de hongos endófitos en semillas, ya que su presencia en ellas no garantiza la colonización posterior de raíces. Pero los argumentos arriba soportan la idea de que muchas pruebas en la literatura, que no verifican la presencia de endófitos originados desde el material de propagación, podrían presentar limitaciones en sus conclusiones acerca del papel de esos microorganismos en simbiosis con plantas. *B. decumbens* es una especie invasora bien adaptada a suelos de baja fertilidad y es ampliamente usada como forraje, aunque se considera perjudicial en algunos lugares del mundo (CABI, 2017). Sin embargo, se conoce poco sobre el papel de estos hongos endófitos en su adaptación ecológica. En otras especies se ha encontrado asociación específica entre tipos de endófitos y éxito reproductivo o distribución de especies o híbridos vegetales en nuevos ambientes. Igualmente se ha sugerido que puede presentarse hibridización entre endófitos, que explicaría su alta diversidad (Rodríguez *et al.*, 2009). En cualquier caso, por la importancia de esta especie vegetal, será necesario realizar investigaciones básicas y usar herramientas más sofisticadas, que permitan identificar el origen y funcionalidad de estas simbiosis.

Como recomendación, el tratamiento de semillas con calor, combinado con aplicación de fungicidas permitiría obtener plantas con poblaciones reducidas de endófitos. Sin embargo, los tiempos y dosis deberán determinarse para cada especie vegetal. No obstante para el caso de los fungicidas después de aplicarlos, será necesario determinar el efecto residual del fungicida en las plántulas a través del tiempo, ya que algunos fungicidas permanecen hasta 20 días en la planta (Proost, & Smit, 2013).

## 5. CONCLUSIÓN

Los resultados sugieren la presencia innata de hongos endófitos en las plantas de *B. decumbens* y la ineeficacia de tratamientos químicos o físicos para erradicarlos. La investigación en este campo deberá partir de la asociación simbiótica ya presente en el material de propagación para determinar la importancia de esta simbiosis en la tolerancia de las plantas a los ambientes extremos comúnmente encontrados en condiciones naturales.

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue desarrollada gracias al apoyo parcial de la Dirección de Investigaciones de la Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín (DIME), a través de la convocatoria del programa nacional de proyectos para el fortalecimiento de la investigación, la creación y la innovación en posgrados de la Uni-

versidad Nacional de Colombia 2013-2015, proyecto Hermes 19846. La revisión de dos jurados anónimos contribuyó a mejorar la versión original de este manuscrito.

## Referencias

- Alarcón, A. & Ferrera-Cerrato, R. (1999). Manejo de la micorriza arbuscular en sistemas de propagación de plantas frutícolas. *Terra Lationoamericana*, 17(3), 179-191.
- Barney, D. (2003). Effects of light, surface sterilization, and fungicides on the germination of black huckleberry seeds. *Small Fruits Review*, 2(2), 73-80.
- Barrow, J. (2003). Atypical morphology of dark septate fungal root endophytes of Bouteloua in arid southwestern USA rangelands. *Mycorrhiza*, 13(5), 239-247.
- Barrow, J.; Osuna, P. & Reyes, I. (2004). Fungal endophytes intrinsically associated with micropropagated plants regenerated from native Bouteloua aeropoda Torr. and Atriplex canescens (Pursh) Nutt. *In Vitro Cellular and Developmental Biology-Plant*, 40(6), 608-612.
- Bayman, P.; Gonzalez, E.; Fumero, J. & Tremblay, R. (2002). Are fungi necessary? How fungicides affect growth and survival of the orchid Lepanthes rupestris in the field. *Journal of Ecology*, 90(6), 1002-1008.
- Biondini, M. (1988). Carbon and nitrogen losses through root exudation by Agropyron cristatum, A smithii and Bouteloua gracilis. *Soil Biology and Biochemistry*, 20(4), 477-482.
- CABI (2017). Invasive Species Compendium. Wallingford, UK: CAB International. Disponible en: <http://www.cabi.org/isc>.
- Cheplick, G. (2011). Endosymbiosis and population differentiation in wild and cultivated Lolium perenne (Poaceae). *American Journal of Botany*, 98(5), 829-838.
- Ernst, M.; Mendgen, K. & Wirsel, S. (2003). Endophytic fungal mutualists: seed-borne Stagonospora spp. enhance reed biomass production in axenic microcosms. *Molecular Plant-Microbe Interactions*, 16(7), 580-587.
- Gamalero, E.; Lingua, G.; Berta, G. & Lemanceau, P. (2003). Methods for studying root colonization by introduced beneficial bacteria. *Agronomie*, 23(5-6), 407-418.
- Gamboa, M., Wen, S., Fetcher, N. & Bayman, P. (2005). Effects of fungicides on endophytic fungi and photosynthesis in seedlings of a tropical tree, Guarea guidonia (Meliaceae). *Acta Biológica Colombiana*, 10(2), 41-48.

- Gibert, A. & Hazard, L. (2011). Endophyte infection of *Festuca eskia* enhances seedling survival to drought and cutting at the expense of clonal expansion. *Journal of Plant Ecology*, 4(4), 201-208.
- Giovanetti, M. & Mosse, B. (1980). An evaluation of techniques for measuring vesicular arbuscular mycorrhizal infection in roots. *New Phytologist*, 84(3), 489-500.
- Groleau-Renaud, V.; Plantureux, S. & Guckert, A. (1998). Influence of plant morphology on root exudation of maize subjected to mechanical impedance in hydroponic conditions. *Plant and Soil*, 201(2), 231-239.
- Heist, E.; Nesmith, W.; & Schardl, C. (2002). Interactions of *Peronospora tabacina* with roots of *Nicotiana* spp. in gnotobiotic associations. *Phytopathology*, 92(4), 400-405.
- Henry, A.; Doucette, W.; Norton, J.; Jones, S.; Chard, J. & Bugbee, B. (2006). An axenic plant culture system for optimal growth in long-term studies. *Journal of Environmental Quality*, 35(2), 590-598.
- Hepper, C. (1981). Techniques for studying the infection of plants by vesicular-arbuscular mycorrhizal fungi under axenic conditions. *New Phytologist*, 88(4), 641-647.
- Jumpponen, A. & Trappe, J. (1998). Dark septate endophytes: a review of facultative biotrophic root-colonizing fungi. *The New Phytologist*, 140(2), 295-310.
- Kannadan, S. & Rudgers, J. (2008). Endophyte symbiosis benefits a raregrass under low water availability. *Functional Ecology*, 22(4), 706-713.
- Kloepfer, J. & Schroth, M. (1981). Plant growth-promoting rhizobacteria and plant growth under gnotobiotic conditions. *Phytopathology*, 71(6), 642-644.
- Knudson, L. (1929). Seed germination and growth of *Calluna vulgaris*. *New Phytologist*, 28(5), 369-376.
- Latch, G. & Christensen, M. (1982). Ryegrass endophyte, incidence, and control. *New Zealand Journal of Agricultural Research*, 25(3), 443-448.
- Li, X.; Ren, A.; Han, R.; Yin, L.; Wei, M. & Gao, Y. (2012). Endophyte-mediated effects on the growth and physiology of *Achnatherum sibiricum* are conditional on both N and P availability. *PloS One*, 7(11), e48010.
- Mergulhao, A.; Burity, H.; Tabosa, J.; Figueiredo, M. & Maia, L. (2001). Salt stress response of *Brachiaria* plants with and without inoculation of arbuscular mycorrhizal fungi. *Agrochimica-Pisa-*, 45(1/2), 24-31.
- Misaghi, I. & Donndelinger, C. (1990). Endophytic bacteria in symptom-free cotton plants. *Phytopathology*, 80(9), 808-811.

- Newsham, K.; Upson, R. & Read, D. (2009). Mycorrhizas and dark septate root endophytes in polar regions. *Fungal Ecology*, 2(1), 10-20.
- Porras, A.; Herrera, J.; Sinsabaugh, R.; Odenbach, K.; Lowrey, T. & Natvig, D. (2008). Novel root fungal consortium associated with a dominant desert grass. *Applied and Environmental Microbiology*, 74(9), 2805-2813.
- Proost, R. & Smit, D. (2013). Fungicide resistance management in corn, soybean, and wheat in Wisconsin. University of Wisconsin. [Fecha de consulta: Marzo de 2015]. Disponible en: <http://ipcm.wisc.edu/download/pubsPM/A3878FungicideResistance.pdf>. 1-8.
- Rasband, W. (2007). IMAGEJ, US. [En línea]. National Institutes of Health, Bethesda, Maryland, USA. [Consultada en Agosto de 2014]. Disponible en: <http://rsbweb.nih.gov/ij/>.2007.
- Rayner, M. (1929). The biology of fungus infection in the genus Vaccinium. *Annals of Botany*, 43(169), 56-69.
- Redman, R.; Sheehan, K.; Stout, R.; Rodriguez, R. & Henson, J. (2002). Thermotolerance generated by plant/fungal symbiosis. *Science*, 298(5598), 1581-1581.
- Rodriguez, R.; Redman, R. & Henson, J. (2004). The role of fungal symbioses in the adaptation of plants to high stress environments. *Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change*, 9(3), 261-272.
- Rodriguez, R.; Freeman, D.; McArthur, E.; Kim, Y. & Redman, R. (2009). Symbiotic regulation of plant growth, development and reproduction. *Communicative and Integrative Biology*, 2(2), 141-143.
- Sandnes, A. & Eldhuset, T. (2003). Soda glass beads as growth medium in plant cultivation experiments. *Journal of Plant Nutrition and Soil Science*, 166(5), 660-661.
- Sauer, D. & Burroughs, R. (1986). Disinfection of seed surfaces with sodium hypochlorite. *Phytopathology*, 76(7), 745-749.
- Simons, M.; Van Der Bij, A.; Brand, I.; De Weger, L.; Wijffelman, C. & Lugtenberg, B. J. (1996). Gnotobiotic system for studying rhizosphere colonization by plant growth-promoting *Pseudomonas* bacteria. *Molecular plant-microbe interactions: MPMI*, 9(7), 600-607.
- Tamayo, D. (2017). Papel de hongos endófitos septados oscuros en la tolerancia del pasto *Brachiaria decumbens* Stapf a condiciones ambientales extremas de sequía y baja fertilidad general del suelo (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín.
- Vierheilig, H.; Coughlan, A.; Wyss, U. & Piche, Y. (1998). Ink and Vinegar, a Simple staining technique for arbuscular-mycorrhizal fungi. *Applied and environmental microbiology*, 64(2), 5004-5007.

- Wali, P.; Helander, M. & Saikkonen K. (2011). Manipulation of Epichlöe/Neotyphodium-endophyte infection in grasses: elimination of endophytes by heat treatment. *Prospects and Applications for Plant-Associated Microbes. A Laboratory Manual, Part B: Fungi.* /Pirttilä, AM, Sorvari, S.(eds), 199-201.
- Wiewióra, B., Żurek, G. & Pańska, D. (2015). Is the vertical transmission of Neotyphodium lolii in perennial ryegrass the only possible way to the spread of endophytes?. *PLoS One*, 10(2), e0117231.

# DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ<sup>a</sup>

## DETERMINATION OF TWO INDICES OF SOIL QUALITY INDICATORS IN COFFEE CUP QUALITY

MARIA LUISA ANAYA GÓMEZ<sup>b</sup>, DANIEL JARAMILLO JARAMILLO<sup>c</sup>

Recibido 14-06-2017, aceptado 10-08-2017, versión final 03-10-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** Se evaluaron algunas propiedades edáficas y foliares en 50 fincas cafeteras de seis municipios de Antioquia. Se determinaron dos índices de la calidad del suelo relacionados con la calidad de la taza de café mediante dos conjuntos de indicadores seleccionados por análisis de componentes principales (MDS1) y análisis de factores (MDS2). El contenido de azufre (S), la actividad enzimática (AE), el índice de Shanon (ISh), la respirometría ( $\text{CO}_2$ ) y los contenidos foliares de N (Nf), Mg (Mgf) y S (Sf) fueron indicadores comunes a los dos índices. Los mejores índices se presentaron en Ciudad Bolívar, finca La Carolina: ICS1 (1.32) e ICS2 (4.32). Los índices más bajos estuvieron en Urrao: ICS1 (finca El Cadillal: 0.82) e ICS2 (fincas El Rosal y El Cadillal: 2.50). El mayor índice general promedio lo presentó el ICS2 (3.19) y el menor el ICS1 (1.05). Se presentaron diferencias significativas en los índices entre ellos y entre núcleos. Se recomienda el uso del ICS2 por ser mayor y requerir menos variables: más económico y fácil de determinar.

**PALABRAS CLAVE:** Calidad de taza de café; indicadores de la calidad del suelo; suelos cafeteros; componentes principales; análisis de factores.

**ABSTRACT:** Some edaphic and foliar properties were assessed in 50 coffee farms in six municipalities of Antioquia. Two soil quality indexes related to coffee quality were determined using two sets of indicators selected by principal component analysis (MDS1) and factor analysis (MDS2). Sulfur content (S), enzyme activity (AE), Shanon index (ISh), respirometry ( $\text{CO}_2$ ) and foliar contents of N (Nf), Mg (Mgf) and S (Sf) were common indicators for both indices. The best indexes were presented in Ciudad Bolívar, La Carolina farm: ICS1 (1.32) and ICS2 (4.32). The lowest rates were in Urrao: ICS1 (El Cadillal farm: 0.82) and ICS2 (El Rosal and El Cadillal farms: 2.50). The highest overall index was presented by ICS2 (3.19) and the lowest by ICS1 (1.05). There were significant differences in the indices between them and between nucleuses. The use of ICS2 is recommended because it is higher and requires fewer variables: more economical and easier to determine.

<sup>a</sup>Anaya, M. & Jaramillo, D. (2017). Determinación de los índices de la calidad del suelo en la calidad de la taza de café. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 102–123. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.65667>

<sup>b</sup>Ingeniera Agrícola, Magíster en Ciencias – Geomorfología y Suelos. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. [milanaya@unal.edu.co](mailto:milanaya@unal.edu.co)

<sup>c</sup>Ingeniero Agrónomo, MSc, Profesor Titular y Maestro Universitario. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. [djaramal@unal.edu.co](mailto:djaramal@unal.edu.co)

## 1. INTRODUCCIÓN

La Soil Science Society of America (SSSA, 1997), Schoenholtz *et al.* (2000), Karlen *et al.* (2003) y Andrews *et al.* (2004) definen la calidad del suelo como “la capacidad de éste para funcionar dentro de los límites de un ecosistema para sostener la productividad biológica, mantener la calidad ambiental y promover la salud de plantas y animales”. Además, afirman que la calidad en un suelo depende de sus propiedades, de su uso y/o las prácticas de manejo de la tierra.

La evaluación de la calidad del suelo puede utilizarse, como una herramienta que ayuda a optimizar la producción de alimentos, manteniendo la calidad ambiental del suelo y, como una medida de la sostenibilidad del suelo para generaciones futuras sometido a diferentes sistemas de manejo (Doran & Parkin, 1994).

Las propiedades del suelo que se utilizan para evaluar su calidad se denominan “indicadores de la calidad del suelo”: una propiedad medible que influye en la capacidad de un suelo para realizar una función. Ellos deben dar información útil para conocer el funcionamiento del suelo, ser accesibles para los usuarios y aplicables a las condiciones de manejo y clima en campo y ser económico de medir. Los indicadores son seleccionados de un conjunto de propiedades físicas, químicas y biológicas del suelo y forman el “conjunto mínimo de datos” (MDS) (Doran & Parkin, 1994; Schoenholtz *et al.*, 2000; Karlen *et al.*, 2003; Andrews *et al.*, 2004; Bastida *et al.*, 2008; Wienhold, 2009).

Según Glover *et al.* (2000), Andrews *et al.* (2002), Rezai *et al.* (2004), Qi *et al.* (2009) y Yu-Dong *et al.* (2013), el MDS para evaluar la calidad del suelo puede ser seleccionado utilizando la opinión de los expertos, las funciones de pedotransferencia o con procedimientos estadísticos multivariados. Luego de la selección del MDS, los indicadores son transformados, con funciones lineales o no lineales, a un sistema adimensional para ser incluidos en el índice de la calidad del suelo (ICS). Una vez transformados, los indicadores son ponderados de acuerdo con la importancia que tienen en la función del suelo que se estudia.

Los indicadores transformados y ponderados se integran en un índice que define la calidad del suelo para la función que se estudia y el método más utilizado para calcular dicho índice es el de la ecuación 1 (Andrews & Carroll, 2001; Andrews *et al.*, 2002).

$$ICS = \sum_{i=1}^n W_i S_i \quad (1)$$

Donde: n= Número de indicadores; S<sub>i</sub>= Calificación del indicador; W<sub>i</sub>= Ponderación del indicador.

La calidad del café en taza está influenciada por las características físicas del grano, su contenido de humedad, sus defectos y la época de cosecha, aspectos que a su vez están afectados por la especie, la variedad, las prácticas de manejo del cultivo y del beneficio, con muy poca influencia de factores como altitud, material parental de los suelos, unidades de suelos y origen geográfico del café (Puerta *et al.*, 2016; Puerta, 2000; Martín *et al.*, 2003). La calidad del café también es afectada, según Puerta (2013), por deficiencia de agua, uso indiscriminado de plaguicidas, suelos con exceso de Ca o deficiencia de Fe, falta de higiene en los equipos y tiempos prolongados de secado.

En trabajos realizados en la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín (UN) se encontraron efectos significativos de la interacción variedad x núcleo (sitio geográfico) sobre la calidad de la taza. Así mismo se presentaron correlaciones significativas e inversas entre el tiempo de almacenamiento del café pergamo seco y los contenidos de Al y de Fe con la calidad de la taza. Además, hubo correlación inversa y significativa entre la altitud y la calidad de la taza en fincas sembradas con la variedad Caturra, explicada por la alta susceptibilidad de esta variedad a la roya en alturas bajas (UN & Gobernación de Antioquia, 2015).

El objetivo de este estudio fue determinar dos índices de calidad del suelo (ICS), con base en dos diferentes grupos de indicadores seleccionados mediante análisis de componentes principales (ACP) y análisis factorial (AF).

## **2. MATERIALES Y MÉTODOS**

### **2.1. Descripción de las áreas de estudio**

El estudio se efectuó en 50 fincas cafeteras de los núcleos de Amalfi, Ciudad Bolívar, Giraldo, La Ceja del Tambo-El Retiro y Urrao, departamento de Antioquia. En cada núcleo se seleccionaron 10 fincas que representaron la mayor parte de la variabilidad en los factores de calidad de taza del café. Estas unidades de muestreo se localizaron en altitudes comprendidas entre los 1206 a los 2280 msnm, con precipitaciones promedias anuales variando entre 1800 y 3100 mm y temperaturas medias anuales entre 16 y 22°C.

### **2.2. Muestreo de suelos y foliar**

En cada una de las fincas seleccionadas se estableció una parcela experimental de 2000 m<sup>2</sup> y se ubicaron cinco sitios en los vértices y el centro. Se midió el espesor del horizonte A y se colectaron muestras entre 20 y 25 cm del suelo que se mezclaron y homogeneizaron, y se tomaron 2 kg para realizar análisis químicos y biológicos y 500 g para determinar la retención de humedad a 33 y 1500 kPa y densidad real. Además, se tomó una muestra de 250 g de suelo para determinar su estabilidad estructural y otra con un cilindro biselado para densidad aparente. Además, se colectaron en la parcela entre 30 y 40 hojas del tercio medio

### 3. Propiedades evaluadas

Se evaluaron las siguientes propiedades edáficas y foliares siguiendo las metodologías estándar presentadas a continuación (Jaramillo, 2014; IGAC, 2006):

- **Propiedades Físicas:** Espesor del horizonte A (EA, Cinta métrica, cm), resistencia a la penetración (RP, penetrómetro de bolsillo, kg/cm<sup>2</sup>), estabilidad estructural en agua y en seco (DPMH y DPMS, Yoder, mm), densidad aparente (Da, Cilindro biselado, Mg/m<sup>3</sup>), densidad real (Dr, Picnómetro, Mg/m<sup>3</sup>), textura (Contenidos de arena (A) limo (L) y arcilla (Ar), Hidrómetro, %), coeficiente higroscópico (CH, Humedad gravimétrica, %), punto de marchitez permanente (PMP, Platos de presión, %), humedad a capacidad de campo (CC, Ollas de presión, %), agua aprovechable (AA, Diferencia entre el punto de marchitez permanente y la capacidad de campo, %), porosidad total (Pt, Relación de densidades aparente y real, %), macroporosidad (Mpr, Diferencia entre porosidad total y microporosidad, %) y microporosidad (mp, Humedad volumétrica a capacidad de campo, %).
- **Propiedades Químicas:** pH (Potenciómetro en agua 1:1), conductividad eléctrica (CE, Extracto de saturación, dS/m), contenido de materia orgánica (MO, Walckley-Black, %), contenidos de Calcio (Ca) y Magnesio (Mg) intercambiables (Extracción con AcNH<sub>4</sub>, 1N, pH 7 y Complexometría, cmolc/kg suelo), contenidos de Potasio (K) y Sodio (Na) intercambiables (Absorción atómica en extractos de AcNH<sub>4</sub>, 1N, pH 7, cmolc/kg suelo), capacidad de intercambio catiónico (CIC7, Extracción con AcNH<sub>4</sub>, 1N, pH 7, cmolc/kg suelo), capacidad de intercambio catiónico efectiva (CICE, Suma de bases más acidez intercambiable, cmolc/kg suelo), saturación de bases con base en la capacidad de intercambio catiónico efectiva (SBE, Relación entre la suma de bases más acidez intercambiable y la capacidad de intercambio catiónica efectiva, %), contenido de Aluminio intercambiable (Al, Extracción con KCl 1M, cmolc/kg suelo), contenido de Fósforo disponible (P, Bray II, mg/kg suelo), contenido de Azufre (S, Fosfato monocálcico 0.008 M, mg/kg suelo), contenidos de Hierro (Fe), Manganese (Mn), Cobre (Cu) y Zinc (Zn) (Olsen-EDTA, mg/kg suelo) y contenido de Boro (B, Agua caliente, mg/kg suelo).
- **Propiedades Biológicas:** Actividad global de microorganismos (CO<sub>2</sub>, Respirometría, mg de CO<sub>2</sub>/g suelo seco/día), actividad enzimática (AE, FDA mg Fluoresceína/kg suelo/3 h), contenido de lombrices (NL, Conteo en un volumen de suelo de 0.015 m<sup>3</sup>), índice de Shanon (ISH, Adimensional) y biodiversidad microbiana (BM, incubación a 100 °C, 24 horas y Conteo de UFC/g suelo).

- **Propiedades Foliares:** Contenido de Nitrógeno total (N, Kjeldhal, %), contenidos de Fósforo y Boro (P, B, Colorimetría, %), contenidos de Hierro, Manganeso, Cobre y Zinc (Fe, Mn, Cu, Zn, Absorción atómica,  $\mu\text{g/g}$ ), contenidos de Calcio, Magnesio y Potasio (Ca, Mg, K, Absorción atómica, %), contenido de Azufre (S, Turbidimetría, %).

### 3.1. Calidad de la taza

Se recolectó el café cereza producido en los 2000 m<sup>2</sup> de la parcela experimental en cada finca, se secó en horno de gas a 75 °C por 18 horas y se almacenó entre 8 y 15 °C entre 30 y 60 días. La taza de café fue evaluada por cinco catadores del Proyecto Cafés Especiales de la Gobernación de Antioquia, mediante 10 atributos sensoriales según la Norma Técnica Colombiana 3566 (NTC 3566, 2011) y el protocolo de análisis sensorial de la Specialty Coffee Association of America (SCAA, 2014).

Tabla 1: Escala de calificación y clasificación de la calidad de la taza de café.

Puntaje final	Clasificación
95 – 100	Café de especialidad súper premium
90 – 94	Café de especialidad premium
85 – 89	Especialidad
80 – 84	Premium
75 – 79	Buena calidad
70 – 74	Calidad promedio
60 – 69	Café que no es taza limpia, no exportable
50 – 59	Rango comercial
40 – 49	Por debajo de estándares
<40	Fuera de norma

En una muestra de 400 g cada catador evaluó la calidad de la bebida de café según los atributos: fragancia y aroma (FA), sabor (Sb), sabor residual (SbR), acidez (Az), cuerpo (Cp), balance (Bn), uniformidad de taza (Ut), taza limpia (TL), dulzor (Dz) y puntaje del catador (PC). A cada atributo se le asignó un puntaje entre 0 y 10 y la suma de los puntajes de los 10 atributos (TT) define la calificación de la calidad de la taza, siendo 100 la calificación máxima obtenida por una taza de café. Con base en el protocolo citado, el Departamento de Ingeniería Agrícola de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, elaboró la siguiente escala de calificación para la calidad de la taza de café (Tabla 1, sin publicar).

### 3.2. Selección de las propiedades potencialmente indicadoras

De las propiedades edáficas y foliares evaluadas se seleccionaron las que se presentan en la Tabla 2 para establecer los MDS. Se eligieron propiedades que representen varias propiedades y/o que la mayoría de

ellas han sido utilizadas como indicadores de la calidad del suelo por diferentes autores.

Tabla 2: Propiedades edáficas y de contenidos foliares de nutrientes para seleccionar los MDS.

Propiedades	Nombre y símbolo
Físicas	Espesor del horizonte A (EA, cm), densidad aparente (Da, Mg/m <sup>3</sup> ), diámetro ponderado medio húmedo (DPMH, mm), agua aprovechable (AA, %) y porosidad total (Pt, %).
Químicas	Materia orgánica (MO, %), contenido de aluminio intercambiable (Al, cmolc/kg de suelo), saturación de bases con base en la capacidad de intercambio catiónico efectiva (SBE, %), contenidos de fósforo (P, de suelo) y azufre (S, mg/kg de suelo).
Biológicas	Índice de Shannon (ISh), respirometría (CO <sub>2</sub> , mg CO <sub>2</sub> /g suelo seco/día) y actividad enzimática (AE, mg fluoresceína/kg suelo/3h).
Contenidos foliares de nutrientes	Nitrógeno (N, %), magnesio (Mg, %) y azufre (S, %).

Se establecieron dos MDS utilizando métodos estadísticos multivariados y las propiedades síntesis de la Tabla 2, uno por medio de un análisis de componentes principales (ACP), y otro, mediante un análisis de factores (AF). En el primero se seleccionaron los componentes principales (CP) que tuvieron valores propios (VP) mayores a uno y en cada componente se extrajeron las propiedades que presentaron un peso mayor o igual al 10% del VP del respectivo componente (Andrews & Carroll, 2001; Rezai *et al.*, 2004). En el segundo se seleccionaron los factores que presentaron un VP mayor a uno y de cada factor se retuvieron las propiedades que presentaron una carga factorial mayor a 0.75, debido a que se trabajó con 50 muestras (Hair *et al.*, 2004).

En cada uno de los dos conjuntos de propiedades preseleccionadas se llevó a cabo un análisis de redundancia para definir el MDS final (Andrews & Carroll, 2001; Rezai *et al.*, 2004). Se hicieron un análisis de correlación lineal (ACL) entre las variables seleccionadas inicialmente y se consideraron redundantes aquellas que presentaron un coeficiente de correlación mayor a 0.7 entre ellas. Luego, se realizó un nuevo ACL entre las propiedades redundantes para seleccionar las que tuvieran mejor correlación y se hizo la sumatoria de los valores absolutos de los coeficientes de correlación de cada propiedad, eliminando la propiedad de cada pareja que presentó la menor sumatoria. Todas las variables que no fueron redundantes ( $r<0.7$ ) se incluyeron en el respectivo MDS.

### 3.3. Calificación de los indicadores

A cada indicador se le asignó una calificación de acuerdo con el efecto esperado de él sobre la calidad de la taza de café. Esta calificación se realizó según los métodos “más es mejor” y “menos es mejor” utilizados por Glover *et al.* (2000), Andrews *et al.* (2002) y Rezai *et al.* (2004), como se indica: indicadores donde

“más es mejor”: se utiliza para indicadores en los cuales el efecto en la función que se estudia aumenta a medida que aumenta el valor del indicador. Se construye dividiendo cada valor del indicador por el mayor valor observado de él, y el mayor valor observado obtiene una calificación de uno. Indicadores donde “menos es mejor”: se utiliza con los indicadores en que el efecto en la función aumenta cuando disminuye el valor del indicador. Para la calificación se divide el menor valor observado por cada observación, y el menor valor obtiene una calificación de uno.

### **3.4. Ponderación de los indicadores de la calidad del suelo**

Se ponderaron los indicadores según el método de selección de los MDS al que pertenecieron. En el MDS1 se tomó como ponderador el resultado de dividir el porcentaje de la varianza explicado por el CP seleccionado, por el porcentaje de varianza acumulada por todos los CP que tuvieron  $VP>1$ . El resultado obtenido en cada CP se le asignó como ponderador a los indicadores seleccionados en el respectivo CP (Andrews *et al.*, 2002). En el MDS2 a los indicadores se les asignó como ponderador el valor de la comunalidad del AF (Qi *et al.*, 2009; Yu-Dong *et al.*, 2013). Los ponderadores de cada MDS se incluyeron en valor absoluto en los índices de calidad.

### **3.5. Cálculo del índice de calidad del suelo (ICS)**

Transformados los indicadores y definidos los ponderadores respectivos para cada MDS se calcularon los correspondientes ICS en cada finca con ambos MDS, con la ecuación 1.

### **3.6. Evaluación de los índices de calidad del suelo (ICS)**

Se realizó mediante análisis de correlación lineal y no lineal entre las propiedades respuesta (calidad de la taza) y los ICS obtenidos. Se realizó, además, un análisis de comparación de promedios entre diferentes índices para los diferentes núcleos mediante la prueba de múltiples rangos que permitió determinar si los índices representaban una o varias poblaciones. Finalmente, se tomó como mejor índice el que presentó el mayor valor.

## **4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

### **4.1. Definición del MDS1 con base en análisis de componentes principales**

De este análisis resultaron 16 CP de los cuales los cinco primeros presentaron  $VP>1$  y explicaron el 72.65 % de la varianza acumulada (Tabla 3). En la Tabla 4 se presentan los pesos de las variables en los cinco prime-

## DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ

ros CP y se resaltan en negrilla las propiedades que dentro de cada CP presentaron un peso en él equivalente o mayor al 10 % del valor propio del componente.

Tabla 3: Componentes principales con valor propio &gt;1 y varianza explicada por ellos.

Componente	Valor propio	Porcentaje de varianza	Porcentaje de varianza acumulado
1	4.86	30.37	30,37
2	2.58	16.1	46.47
3	1.7	10.63	57.11
4	1.42	8.86	65.97
5	1.07	6.69	72.65

Tabla 4: Peso de las variables en los cinco primeros componentes principales. En negrilla las propiedades con peso significativo en el respectivo componente.

Propiedad	Componente				
	1	2	3	4	5
EA	0.13	<b>0.27</b>	-0.03	0.04	<b>0.16</b>
Da	-0.42	-0.02	0.06	0.12	-0.10
DPMH	-0.26	-0.23	<b>-0.27</b>	-0.11	-0.02
AA	0.34	-0.08	-0.15	-0.03	<b>0.21</b>
Pt	0.42	0.00	-0.06	-0.13	0.07
MO	0.42	0.03	-0.09	<b>0.15</b>	0.04
Al	0.23	<b>-0.46</b>	0.05	<b>0.22</b>	-0.02
SBE	-0.27	<b>0.40</b>	-0.06	-0.05	<b>0.28</b>
P	-0.04	0.07	<b>0.34</b>	<b>0.33</b>	<b>0.25</b>
S	-0.01	<b>-0.40</b>	-0.07	<b>0.14</b>	<b>0.52</b>
ISh	-0.04	0.23	<b>0.39</b>	0.11	<b>0.48</b>
CO <sub>2</sub>	0.32	<b>0.27</b>	<b>0.19</b>	-0.01	-0.04
AE	-0.04	<b>-0.34</b>	<b>0.48</b>	<b>-0.25</b>	0.03
Nf	-0.17	-0.20	-0.14	<b>0.48</b>	<b>0.19</b>
Mgf	0.05	0.00	<b>0.42</b>	<b>0.45</b>	<b>-0.47</b>
Sf	-0.04	-0.20	<b>0.38</b>	<b>-0.50</b>	0.10

EA: Espesor del horizonte A (cm). Da: Densidad aparente ( $\text{Mg}/\text{m}^3$ ). DPMH: Diámetro ponderado medio en húmedo (mm). AA: Agua aprovechable (%). Pt: Porosidad total (%). MO: Contenido de materia orgánica (%). Al: Contenido de aluminio intercambiable ( $\text{cmol } (+) \text{ kg}^{-1}$  de suelo). SBE: Saturación de bases con base en la capacidad de intercambio catiónico efectiva del suelo (%). P y S: Contenidos de fósforo y azufre disponibles, respectivamente ( $\text{mg}/\text{kg}$  de suelo). ISh: Índice de Shanon. CO<sub>2</sub>: Respirometría ( $\text{mg CO}_2 / \text{g suelo seco/día}$ ). AE: Actividad enzimática ( $\text{mg Fluoresceína}/\text{kg suelo}/3\text{h}$ ). Nf, Mgf, Sf: Contenidos foliares de nitrógeno, magnesio y azufre, respectivamente (%).

De los resultados de la Tabla 4, los posibles indicadores de calidad del suelo extraídos por los CP son EA,

DPMH, AA, MO, Al, SBE, P, S, ISh, CO<sub>2</sub>, AE, Nf, Mgf y Sf. En la Tabla 5 se presenta los coeficientes de correlación lineal entre las propiedades extraídas con el ACP, observándose redundancia ( $r>0.7$ ) entre MO y AA y entre Al y SBE, debido a la alta capacidad de retención de agua que tiene la MO y a que el Al se presentó como el catión de intercambiable dominante en los suelos (Jaramillo, 2014). Después de comparar los respectivos coeficientes de correlación totales de las variables redundantes se eliminaron AA y SBE (Tabla 6) y el MDS1 se conformó con los indicadores EA, DPMH, MO, Al, P, S, CO<sub>2</sub>, AE, ISh, Nf, Mgf y Sf, algunos de ellos utilizados como indicadores por Doran & Parkin (1994), Karlen *et al.* (2003), Schoenholtz *et al.* (2000), Andrews *et al.* (2002), Arshad & Martin (2002), Sharma *et al.* (2005), Evanylo & McGuinn (2009), Wienhold (2009) y Alves *et al.* (2013). Los indicadores Al, ISh, Nf, Mgf y Sf no han sido reportados en la literatura revisada.

Tabla 5: Coeficientes de correlación lineal entre propiedades seleccionadas inicialmente para el MDS1. En negrilla coeficientes de correlación entre variables redundantes ( $r>0.7$ ).

Propiedad	EA	DPMH	AA	MO	Al	SBE	P	S	ISh	CO <sub>2</sub>	AE	Nf	Mgf
DPMH	-0.24												
AA	0.09	-0.31											
MO	0.21	-0.46	<b>0.72</b>										
Al	-0.16	-0.10	0.40	0.46									
SBE	0.03	0.15	-0.32	-0.47	<b>-0.86</b>								
P	0.07	-0.10	-0.20	-0.01	-0.05	0.11							
S	-0.12	0.27	0.14	0.00	0.44	-0.25	0.00						
ISh	0.05	-0.26	-0.11	-0.08	-0.18	0.36	0.17	-0.02					
CO <sub>2</sub>	0.38	-0.54	0.43	0.63	0.07	-0.14	0.02	-0.26	0.19				
AE	-0.19	0.05	-0.03	-0.28	-0.28	-0.28	0.09	0.27	0.02	-0.16			
Nf	-0.13	0.24	-0.08	-0.20	0.12	0.09	0.13	0.26	-0.08	-0.44	-0.01		
Mgf	-0.02	-0.20	-0.06	0.13	0.17	-0.20	0.18	-0.12	0.14	0.25	0.17	0.05	
Sf	-0.16	0.06	-0.07	-0.20	0.06	-0.12	0.03	0.04	0.04	-0.06	0.52	-0.08	-0.11

EA: Espesor del horizonte A (cm). DPMH: Diámetro ponderado medio en húmedo (mm). AA: Agua aprovechable (%). MO: Contenido de materia orgánica (%). Al: Contenido de aluminio intercambiable ( $\text{cmol} (+) \text{kg}^{-1}$  de suelo). SBE: Saturación de bases con base en la capacidad de intercambio catiónico efectiva del suelo (%). P y S: Contenidos de fósforo y azufre disponibles, respectivamente ( $\text{mg}/\text{kg}$  de suelo). ISh: Índice de Shanon. CO<sub>2</sub>: Respirometría ( $\text{mg CO}_2/\text{g suelo seco/día}$ ). AE: Actividad enzimática ( $\text{mg Fluoresceína}/\text{kg suelo}/3\text{h}$ ). Nf, Mgf, Sf: Contenidos foliares de nitrógeno, magnesio y azufre, respectivamente (%).

## 4.2. Definición del MDS2 con base en análisis de factores (AF)

Siguiendo la metodología de Qi *et al.* (2009) y Yu-Dong *et al.* (2013) se realizó el AF para seleccionar el MDS2 (Tablas 7 y 8). En este análisis los primeros cinco factores presentaron  $\text{VP}>1$  y un porcentaje de varianza acumulada de 72.26 %. Fueron seleccionados como posibles indicadores Da, AA, Pt, MO, S, AE, Sf, ISh y Mgf.

## DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ

Tabla 6: Suma de coeficientes de correlación de propiedades redundantes para el MDS1.

Propiedad	AA	MO	Al	SBE
AA	-1.00	0.72	0.40	0.32
MO	0.72	1.00	0.46	0.47
Al	0.40	0.46	1.00	0.86
SBE	0.32	0.47	0.86	1.00
$\Sigma$	2.44	2.65	2.72	2.65

AA: Agua aprovechable (%). MO: Contenido de materia orgánica (%). Al: Contenido de aluminio intercambiable ( $\text{cmol} (+) \text{kg}^{-1}$  de suelo). SBE: Saturación de bases a capacidad de intercambio catiónico efectiva (%).

Los resultados de la Tabla 9 muestran redundancia entre MO con Da, AA y Pt y entre Da y Pt debido a la capacidad de almacenar agua y a la alta porosidad que tiene la MO (Jaramillo, 2014). Después de analizar los coeficientes de correlación totales entre estas variables (Tabla 10) se eliminaron MO, AA y Pt, quedando el MDS2 conformado por los siguientes indicadores Da, S, ISh, AE, Mgf y Sf, algunos utilizados en trabajos previos como se indicó en MDS1.

Tabla 7: Factores con valor propio (VP) &gt;1 y varianza explicada por ellos.

Factor	Valor propio	Porcentaje de varianza	Porcentaje de varianza acumulado
1	4.81	30.08	30.08
2	2.59	16.16	46.24
3	1.69	10.57	56.81
4	1.50	8.78	65.58
5	1.07	6.68	72.26

En la Tabla 11 se aprecian los dos MDS establecidos. Es notable la diferencia composicional que se presentó entre los dos grupos, sobre todo en los indicadores físicos y químicos seleccionados en cada uno. El AF fue más eficiente en la reducción de variables, posiblemente porque analiza la varianza común o compartida entre las variables, a diferencia del ACP que considera la varianza total de las propiedades (Hair *et al.*, 2004). La presencia de las propiedades biológicas confirma que el componente biótico del suelo puede tener un efecto importante sobre la calidad de la producción agrícola, como lo sugieren Bastida *et al.* (2008) y Alves *et al.* (2013) al afirmar que la inclusión de los indicadores biológicos que evalúan la actividad y la respiración microbianas en los MDS tiene un efecto relevante para la agricultura y el ambiente. Estos indicadores muestran la capacidad oxidativa de los microorganismos del suelo, la cual es influenciada por la fuente de energía del suelo y el número de individuos en él, y cuyo efecto varía según los factores climáticos, prácticas

Tabla 8: Carga y communalidad de las variables en los cinco primeros factores después de rotación varimax. En negrilla las propiedades con carga en el factor >0.75.

Propiedad	Carga en el factor					Comunalidad
	1	2	3	4	5	
EA	0.31	-0.21	-0.27	0.30	-0.13	0.32
Da	<b>-0.95</b>	0.10	0.01	0.06	0.05	0.91
DPMH	-0.51	0.31	0.02	-0.39	-0.27	0.58
AA	<b>0.79</b>	0.17	-0.04	-0.08	-0.10	0.67
Pt	<b>0.93</b>	-0.11	0.02	-0.10	-0.03	0.89
MO	<b>0.91</b>	0.02	-0.22	-0.02	0.16	0.90
Al	0.50	0.55	0.27	-0.27	0.41	0.86
SBE	-0.53	-0.28	-0.32	0.43	-0.45	0.86
P	-0.07	0.17	0.01	0.60	0.24	0.46
S	0.09	<b>0.81</b>	0.21	0.02	-0.16	0.74
ISh	-0.05	-0.09	0.08	<b>0.79</b>	-0.04	0.64
CO <sub>2</sub>	0.67	-0.45	-0.08	0.28	0.18	0.77
AE	-0.09	0.17	<b>0.84</b>	0.05	0.19	0.77
Nf	-0.33	0.67	-0.25	0.07	0.11	0.64
Mgf	-0.03	-0.09	-0.01	0.17	<b>0.89</b>	0.83
Sf	-0.06	-0.09	<b>0.84</b>	0.03	-0.15	0.74

EA: Espesor del horizonte A (cm). Da: Densidad aparente ( $\text{Mg}/\text{m}^3$ ). DPMH: Diámetro ponderado medio en húmedo (mm). AA: Agua aprovechable (%). Pt: Porosidad total (%). MO: Contenido de materia orgánica (%). Al: Contenido de aluminio intercambiable ( $\text{cmol } (+) \text{ kg}^{-1}$  de suelo). SBE: Saturación de bases con base en la capacidad de intercambio catiónico efectiva del suelo (%). P y S: Contenidos de fósforo y azufre disponibles, respectivamente ( $\text{mg}/\text{kg}$  de suelo). ISh: Índice de Shanon. CO<sub>2</sub>: Respirometría ( $\text{mg CO}_2/\text{g suelo seco/día}$ ). AE: Actividad enzimática ( $\text{mg Fluoresceína}/\text{kg suelo}/3\text{h}$ ). Nf, Mgf, Sf: Contenidos foliares de nitrógeno, magnesio y azufre, respectivamente (%).

de manejo, enmiendas y la contaminación. Además, la diversidad microbial está íntimamente relacionada con la estructura de las comunidades biológicas y su función en la interacción ciclo de nutrientes - relación hídrica - soporte para las plantas es crítica en la calidad del suelo (Andrews *et al.*, 2002).

De los indicadores seleccionados sólo el Al ha sido reportado en la literatura como un factor influyente en la calidad del café en taza; ninguno de los otros indicadores se ha relacionado con dicha calidad de taza (UN & Gobernación de Antioquia, 2015).

## 5. CALIFICACIÓN DE INDICADORES DE LOS CONJUNTOS MÍNIMOS DE DATOS

Después de determinar las propiedades de cada MDS se realizó la calificación de los indicadores seleccionados utilizando una técnica de calificación lineal con criterios de “más es mejor” o “menos es mejor”, teniendo en cuenta si un alto valor es bueno o malo en términos de la función del suelo. Se utilizaron

DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ

Tabla 9: Coeficientes de correlación lineal entre propiedades seleccionadas inicialmente para el MDS2. En negrilla coeficientes de correlación entre variables redundantes ( $r>0.7$ ).

Propiedad	Da	AA	Pt	MO	S	ISh	CO <sub>2</sub>	AE	Nf	Mgf
AA	-0.67									
Pt	<b>-0.99</b>	0.65								
MO	<b>-0.84</b>	<b>0.72</b>	<b>0.83</b>							
S	0.02	0.14	-0.03	0.00						
ISh	0.10	-0.11	-0.13	-0.08	-0.02					
CO <sub>2</sub>	-0.62	0.43	0.58	0.63	-0.26	0.19				
AE	0.09	-0.03	-0.07	-0.28	0.27	0.02	-0.16			
Nf	0.37	-0.08	-0.37	-0.20	0.26	-0.08	-0.44	-0.01		
Mgf	0.05	-0.06	-0.05	0.13	-0.12	0.14	0.25	0.17	0.05	
Sf	0.06	-0.07	-0.05	-0.20	0.04	0.04	-0.06	0.52	-0.08	-0.11

Da: Densidad aparente (Mg/m<sup>3</sup>). AA: Agua aprovechable (%). Pt: Porosidad total (%). MO: Contenido de materia orgánica. S: Contenido de azufre disponible (mg/kg de suelo). ISh: Índice de Shanon. CO<sub>2</sub>: Respirometría (mg CO<sub>2</sub>/g suelo seco/día). AE: Actividad enzimática (mg Fluoresceína/kg suelo/3h). Nf, Mgf, Sf: Contenidos foliares de nitrógeno, magnesio y azufre, respectivamente (%).

Tabla 10: Suma de coeficientes de correlación para análisis de redundancia del MDS2.

Propiedad	Da	AA	Pt	MO
Da	1	0.67	0.99	0.84
AA	0.67	1	0.65	0.72
Pt	0.99	0.65	1	0.83
MO	0.84	0.72	0.83	1
$\Sigma$	<b>3.51</b>	<b>3.04</b>	<b>3.47</b>	<b>3.40</b>

Da: Densidad aparente (Mg/m<sup>3</sup>). AA: Agua aprovechable (%). Pt: Porosidad total (%). MO: Contenido de materia orgánica (%).

como criterios de calificación y análisis los niveles críticos que para la nutrición del café y los contenidos foliares de nutrientes normales en café que propone Sadeghian (2013), así como valores críticos establecidos en la literatura para propiedades del suelo agrícola Jaramillo (2014). La mayoría de valores (más del 80%) estuvieron dentro de los rangos adecuados para la producción de café por lo que los indicadores EA, DPMH, MO, P, S, AE, ISh, CO<sub>2</sub>, Nf, Mgf y Sf se calificaron con el criterio de “más es mejor”, mientras que Da y Al fueron calificados con la opción “menos es mejor”.

## 5.1. Ponderación de indicadores de los conjuntos mínimos de datos

En la Tabla 12 se presentan los ponderadores utilizados en cada MDS determinados como se indicó en la metodología. Nótese que los ponderadores del MDS2 son mayores que en el MDS1 debido a los altos valo-

Tabla 11: Indicadores de calidad en cada conjunto mínimo de datos (MDS)

Indicadores	Conjunto mínimo de datos	
	MDS1	MDS2
Físicos	EA y DPMH	Da
Químicos	MO, Al, P y S	S
Biológicos	CO <sub>2</sub> , AE e ISh	ISh y AE
Foliares	Nf, Mgf y Sf	Mgf y Sf

EA: Espesor del horizonte A (cm). DPMH: Diámetro ponderado medio en húmedo (mm). Da: Densidad aparente ( $\text{Mg}/\text{m}^3$ ). MO: Contenido de materia orgánica. Al: Contenido de aluminio intercambiable ( $\text{cmol}(+)/\text{kg}^{-1}$  de suelo). P y S: Contenidos de fósforo y azufre disponibles, respectivamente ( $\text{mg}/\text{kg}$  de suelo). ISh: Índice de Shanon. CO<sub>2</sub>: Respirometría ( $\text{mg CO}_2/\text{g suelo seco}/\text{día}$ ). AE: Actividad enzimática ( $\text{mg Fluoresceína}/\text{kg suelo}/3\text{h}$ ). Mgf, Nf y Sf: Contenidos foliares de magnesio, nitrógeno, y azufre, respectivamente (%).

Conjuntos mínimos de datos con base en análisis de componentes principales (1) y de factor (2).

res obtenidos para la comunalidad de las variables incluidas en él.

Tabla 12: Ponderadores asignados a los indicadores de calidad del suelo.

Indicador	MDS1	MDS2
EA	0.22	-
DPMH	0.15	-
Da	-	0.91
MO	0.12	-
Al	0.22	-
P	0.15	-
S	0.22	0.74
ISh	0.15	0.64
CO <sub>2</sub>	0.22	0.77
AE	0.22	0.77
Nf	0.12	0.64
Mgf	0.15	0.83
Sf	0.22	0.73

EA: Espesor del horizonte A (cm). DPMH: Diámetro ponderado medio en húmedo (mm). Da: Densidad aparente ( $\text{Mg}/\text{m}^3$ ). MO: Contenido de materia orgánica (%). Al: Contenido de aluminio intercambiable ( $\text{cmol}(+)/\text{kg}^{-1}$  de suelo). P y S: Contenidos de fósforo y azufre disponibles, respectivamente ( $\text{mg}/\text{kg}$  de suelo). ISh: Índice de Shanon. CO<sub>2</sub>: Respirometría ( $\text{mg CO}_2/\text{g suelo seco}/\text{día}$ ). AE: Actividad enzimática ( $\text{mg Fluoresceína}/\text{kg suelo}/3\text{h}$ ). Nf, Mgf y Sf: Contenidos foliares de magnesio, nitrógeno, y azufre, respectivamente (%).

Conjuntos mínimos de datos con base en análisis componentes principales (1) y de factor (2).

## 5.2. Cálculo de los índices de la calidad del suelo (ICS)

Obtenidas Si y Wi de los indicadores en cada MDS, se calculó el respectivo ICS para cada una de las fincas estudiadas utilizando la ecuación 1. A nivel de finca, Urrao presentó los menores índices de calidad: ICS1 (finca El Cadillal, 0.82) e ICS2 (finca El Rosal, 0.84), y los mayores índices se tuvieron en la finca La Carolina (ICS1: 1.32 y ICS2: 4.32) de Ciudad Bolívar. El ICS1 promedio fue de 1.04 y varío entre 0.82 y 1.45, mientras que el ICS2 mostró un promedio de 3.19 y vario entre 2.5 y 4.32. Al analizar los ICS por núcleo, Giraldo presentó el mayor ICS1 promedio (1.11) y el de Ciudad Bolívar el mayor ICS2 (3.49). Los menores índices promedios estuvieron en los núcleos de Urrao (ICS1: 0.97) y La Ceja del Tambo-El Retiro (ICS2: 3.06). Además, el análisis de comparación de medias mostró diferencias significativas en promedios, tanto entre núcleos como entre índices (Tabla 15). El núcleo con las mejores condiciones de calidad del suelo fue Ciudad Bolívar por tener el mejor índice promedio en las 10 fincas estudiadas en él, a diferencia de La Ceja-El Retiro que presentó el índice más bajo. Al comparar los valores de los índices obtenidos es evidente el gran impacto que tuvo la ponderación de los indicadores con la communalidad de ellos en el ICS2 (Qi *et al.*, 2009). Las diferencias entre los ICS fueron significativas estadísticamente al 95 %. En la Tabla 13 se muestra que el ICS2 presentó los mayores valores para todas las fincas lo que indica que el manejo agronómico del cultivo de café debe focalizarse en mejorar las calidad biológica y la nutrición foliar de las plantas para obtener una bebida de café de alta calidad.

En la Tabla 15 se muestra el promedio por núcleo de los dos índices calculados, y sus respectivos coeficientes de variación (CV). El ICS2 presentó los mayores valores promedios en todos los núcleos y la menor variabilidad general. El núcleo de Giraldo presentó el mayor promedio para ICS1 y el núcleo de Ciudad Bolívar mostró el mayor promedio para ICS2. El menor ICS1 promedio estuvo en el núcleo de Urrao (ICS1) y en La Ceja del Tambo-El Retiro, el menor ICS2. Se presentaron diferencias significativas en promedios, tanto entre núcleos como entre índices. Al comparar los valores de los índices obtenidos es evidente el gran impacto que tuvo la ponderación de los indicadores con la communalidad de ellos en el ICS2.

## 5.3. Evaluación de la calidad de la taza de café

A los atributos Ut, TL y Dz todos los catadores le dieron una calificación de 10, y en una de las fincas de Urrao, tres catadores no reportaron calificaciones para los atributos de calidad. En términos generales, se observó una baja variabilidad en los atributos, y distribuciones simétricas en todos, excepto en TT y Sb, aunque ninguno presentó distribución normal. Todos los atributos presentaron calificaciones superiores a 7 en el 75 % de los registros y en el TT el 75 % de las fincas obtuvo puntajes superiores a 81 (Tabla 16).

La Tabla 17 muestra diferencias significativas entre núcleos en casi todos los atributos de la calidad de la taza de café, excepto en FA, posiblemente por diferencias en las variedades cultivadas, los métodos de beneficio y / o factores ambientales como clima (Puerta, 2013; Puerta *et al.*, 2016) y altitud (Buenaventura

Tabla 13: Índices de la calidad del suelo (ICS) calculados con diferentes MDS en las 50 fincas cafeteras evaluadas en el departamento de Antioquia.

Finca	Variedad	ICS1	ICS2
<b>Amalfi</b>			
La Frijolera	Colombia	1.04	3.21
Los Alpes	Colombia	1.1	3.39
La Rosa	Castillo	0.94	2.74
Los Pinos	Castillo	0.92	2.92
Guayacanes	Colombia	0.98	3.28
La Gurría	Castillo	0.93	2.85
Los Planes	Catimor	1.05	3.52
La Bamba	Colombia	0.94	2.86
La Pastorona	Caturra	1.09	3.72
La Brisalda	Colombia	1.06	3.45
<b>Ciudad Bolívar</b>			
La Palomera	Catimor	1.11	3.45
El Porvenir	Colombia	1.10	3.44
La María	Castillo	1.21	3.60
Los Naranjos	Castillo	1.05	3.23
La Carolina	Castillo	1.32	4.32
Santa Ana	Maragogipe	1.01	3.27
Aguas Frías	Castillo	1.14	3.32
Montenegro-Vuelta Bonita	Caturra	0.94	3.00
Aguas Claras	Castillo	1.11	3.86
El Privilegio	Castillo	1.04	3.38

Índices de la calidad del suelo calculados con base en MDS1, MDS2, respectivamente.

& Castaño, 2002; UN & Gobernación de Antioquia, 2015). El núcleo de Giraldo tuvo los mayores promedios en todos los atributos de calidad de la taza, lo que puede estar relacionado directamente con el mayor promedio en altitud observado en él y porque presentó los suelos con mejores condiciones nutricionales para el café (Buenaventura & Castaño, 2002; UN & Gobernación de Antioquia, 2015).

Ciudad Bolívar y Urrao fueron los núcleos con calificaciones más deficientes, siendo el último el que presentó el menor promedio en TT. En Ciudad Bolívar y Urrao se presentó la mayor variabilidad en los atributos evaluados, siendo la subregión del suroeste antioqueño la de mayor variabilidad en la calidad de la taza de café, posiblemente debido a que en ella se presenta también la mayor variabilidad ambiental.

Al realizar la clasificación general de la calidad de la taza (Tabla 1), en el 6% de las fincas la clasificación de la taza correspondió a café de Especialidad, en el 88% a café de calidad Premium, en el 4% a café de Buena Calidad, en otro 4% a café de calidad promedio y fuera de norma en el 2% de las fincas. Las mejores

## DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ

Tabla 14: Continuación. Índices de la calidad del suelo (ICS) calculados con diferentes MDS en las 50 fincas cafeteras evaluadas en el departamento de Antioquia.

Finca	Variedad	ICS3	ICS4
<b>Giraldo</b>			
La Zunga 2	Castillo	1.16	3.02
La Cienaga	Catimor	1.02	3.04
La Zunga	Colombia	1.10	2.87
El Arrayanal	Maragogipe	0.9	2.90
La Modesta	Castillo	1.05	3.03
La Falda del Centro	Castillo	1.05	2.96
Durazno	Caturra	1.15	3.06
Montero	Castillo	1.45	3.99
El Guayabo	Castillo	1.22	3.32
El Chuscal	Caturra	1.02	2.98
<b>La Ceja del Tambo-El Retiro</b>			
La Argentina	Caturra	1.29	3.11
La Naviera	Colombia	0.83	2.77
San José	Colombia	0.99	3.09
El Diamante	Colombia	1.19	3.27
Buenos Aires	Colombia	1.01	3.12
La Mansión	Colombia	1.00	3.13
El Mirador	Castillo	1.03	3.11
El Danubio	Castillo	1.00	3.23
La Marsella	Catimor	0.97	2.89
Mi Cafetal	Castillo	1.04	2.85
<b>Urrao</b>			
El Cadillac	Colombia	0.82	2.50
La Esperanza Gulunga	Caturra	1.05	3.36
El Rosal	Castillo	0.84	2.50
Bellavista	Colombia	1.01	3.60
El Placer	Catimor	1.07	3.37
El Tigre	Castillo	0.85	2.91
La Mata de Guadua	Castillo	1.02	3.44
Las Flores	Castillo	1.07	3.20
La Falda	Caturra	0.96	3.04

Índices de la calidad del suelo calculados con base en MDS1, MDS2, respectivamente.

calificaciones de café de Especialidad se presentaron en las fincas: Montenegro y Vuelta Bonita de Ciudad Bolívar (variedad Caturra), El Arrayanal de Giraldo (variedad Maragogipe) y Bellavista de Urrao (variedad Colombia), mientras que la finca La Falda de Urrao tuvo la calificación más baja.

Tabla 15: Índices de la calidad del suelo promedios en los 5 núcleos cafeteros evaluados en el departamento de Antioquia. Valores con letras diferentes en la misma columna indican diferencia significativa, al 95 %, entre núcleos

Núcleo	ICS1	CV (%)	ICS2	CV (%)
Amalfi	1.00bc	6.99	3.19ab	10.47
Ciudad Bolívar	1.10ab	9.65	3.49a	10.64
Giraldo	1.11a	13.38	3.12b	10.59
La Ceja-El Retiro	1.03abc	12.07	3.06b	5.39
Urrao	0.97c	10.63	3.10b	12.87

Índices de la calidad del suelo calculados con base en MDS1, MDS2, respectivamente.

Tabla 16: Estadísticos básicos de los atributos organolépticos de café de las 50 fincas cafeteras estudiadas en el departamento de Antioquia (n=247).

Variable	Promedio	Mediana	DE	CV (%)	Mínimo	Máximo	Q1	Q3	Sesgo	S-W
TT	82.50	82.5	2.83	3.43	70	91.5	81	84	-4.63	3.14E-07
FA	7.87	8	0.39	4.91	6	9	7.5	8	-1.89	3.48E-13
Sb	7.59	7.5	0.46	6.02	6	9	7.5	7.75	-3.27	0
SbR	7.36	7.5	0.43	5.90	6	9	7	7.5	-0.70	1.55E-15
Az	7.54	7.5	0.42	5.61	6	8.5	7.25	7.75	-1.46	5.51E-11
Cp	7.40	7.25	0.43	5.78	6	8.5	7	7.75	0.12	0
Bn	7.43	7.5	0.39	5.27	6	8.75	7	7.75	0.31	1.33E-15
PC	7.44	7.5	0.46	6.20	6	8.75	7	7.75	-1.80	0

Estadísticos básicos: DE: Desviación Estándar. CV: Coeficiente de variación. Q1: Cuartil inferior. Q3: Cuartil superior. S-W: Valor P de la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk (si S-W>0.05 la distribución es normal).

Atributos organolépticos: TT: Puntaje total de la taza. FA: Fragancia aroma. Sb: Sabor. SbR: Sabor residual. Az: Acidez. Cp: Cuerpo. Bn: Balance. PC: Puntaje catador.

#### 5.4. Evaluación de los índices de calidad del suelo (ICS)

La Tabla 18 muestra una fuerte correlación lineal entre ICS1 e ICS2, hasta el punto de ser redundantes, debido posiblemente a que siete propiedades (S, CO<sub>2</sub>, AE, ISh, Nf, Mgf y Sf) fueron indicadores comunes en los MDS que los definieron. Dado este resultado, cualquiera de los dos índices describe el mismo efecto en la calidad de la taza de café. No se presentaron correlaciones significativas estadísticamente entre los índices de calidad del suelo y la calidad de la taza, probablemente debido a la ausencia de correlación entre casi todos los indicadores de calidad del suelo y las propiedades de calidad de la taza (Tabla 18).

Según la Tabla 19, sólo el ISh tuvo correlación significativa con todas las variables de la calidad de la taza,

DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ

Tabla 17: Análisis de promedios de los atributos organolépticos de café por núcleo. Valores con letras diferentes en la misma fila indican diferencia estadísticamente significativa, al 95 %, entre núcleos.

Núcleo	Amalfi	Ciudad Bolívar		Giraldo		La Ceja del Tambo-El Retiro		Urrao		
		Promedio	CV (%)	Promedio	CV (%)	Promedio	CV (%)	Promedio	CV (%)	
TT	82.23ab	1.55	81.94ab	3.29	83.84a	2.36	82.76ab	1.85	76.75b	4.25
FA	7.82a	2.21	7.78a	5.68	7.96a	3.54	7.96a	1.14	7.37a	2.74
Sb	7.52ab	3.17	7.52ab	5.88	7.81a	3.37	7.60ab	3.20	7.03b	5.34
SbR	7.31ab	2.32	7.24ab	4.88	7.56a	3.76	7.40ab	3.78	6.86b	4.67
Az	7.52ab	3.21	7.49ab	5.17	7.74a	3.21	7.49ab	3.59	7.03b	4.79
Cp	7.34ab	2.53	7.24ab	5.07	7.64a	4.08	7.41ab	3.57	6.89b	5.15
Bn	7.36ab	2.78	7.36ab	5.30	7.63a	3.19	7.44ab	3.09	6.93b	5.46
PC	7.37ab	3.77	7.33ab	6.05	7.68a	3.21	7.49ab	3.56	6.89b	6.05

Análisis de promedios: Comparación de promedios por prueba de t en las propiedades que tuvieron distribución normal o por lo menos simétrica y de medias por rango de Kruskal-Wallis en las demás, según Tabla 17. CV: Coeficiente de variación.

Atributos organolépticos: TT: Total taza. FA: Fragancia aroma. Sb: Sabor. SbR: Sabor residual. Az: Acidez. Cp: Cuerpo. Bn: Balance. PC: Puntaje catador.

Tabla 18: Matriz de coeficientes de correlación lineal de Pearson y no lineal de Spearman entre los índices y las variables respuesta. En negrilla los coeficientes de correlación significativos al 95 %.

	Lineal		No lineal	
	ICS1	ICS2	ICS1	ICS2
ICS2	<b>0.72</b>		<b>0.65</b>	
TT	0.19	0.24	-0.19	-0.20
Bn	0.14	0.20	-0.19	-0.22
PC	0.13	0.18	-0.20	-0.24

ICS, ICS2: Índices de la calidad del suelo calculados con base en MDS1, MDS2, respectivamente.

Índices y variables respuesta: TT: Total taza. Bn: balance. PC: puntaje del catador.

confirmando la importancia de los microorganismos del suelo en la calidad de las cosechas, como lo establecieron Qi *et al.* (2009) y Yu-Dong *et al.* (2013). Aunque se presentaron sólo dos correlaciones significativas entre el Mgf y la calidad de la taza, las correlaciones obtenidas entre Mgf y Sf con dicha calidad parecen indicar que el contenido de estos dos elementos en la hoja pueden llegar a ser unos buenos indicadores de la calidad de la taza que se va a tener.

Tabla 19: Coeficientes de correlación lineal de Pearson entre los atributos de calidad de la taza de café y los indicadores de la calidad del suelo. En negrilla los coeficientes de correlación significativos al 95 %.

Propiedad	TTm	FAm	Sbm	SbRm	Azm	Cpm	Bnm	PCm
EA	-0.18	-0.18	-0.22	-0.21	-0.23	-0.23	-0.22	-0.22
DPMH	0.00	0.04	0.01	0.03	0.01	0.01	-0.02	0.01
Da	0.25	0.23	0.27	0.25	0.25	0.25	0.24	0.26
MO	-0.26	-0.26	-0.26	-0.24	-0.28	-0.26	-0.25	-0.27
Al	-0.15	-0.10	-0.14	-0.13	-0.19	-0.19	-0.19	-0.22
P	0.00	0.04	-0.02	-0.03	-0.04	-0.04	0.00	-0.05
S	-0.01	0.00	0.01	0.00	-0.03	-0.04	-0.06	-0.06
ISh	<b>0.45</b>	<b>0.41</b>	<b>0.46</b>	<b>0.46</b>	<b>0.49</b>	<b>0.44</b>	<b>0.47</b>	<b>0.45</b>
CO <sub>2</sub>	0.14	0.07	0.10	0.09	0.11	0.07	0.09	0.08
AE	-0.14	-0.18	-0.18	-0.15	-0.15	-0.13	-0.12	-0.16
Nf	0.09	0.16	0.09	0.08	0.07	0.03	0.05	0.06
Mgf	0.25	0.23	0.28	0.26	0.27	<b>0.29</b>	0.28	<b>0.31</b>
Sf	0.23	0.26	0.18	0.21	0.21	0.16	0.17	0.16

## 6. CONCLUSIONES

Las variables más persistentes en los cálculos de los índices fueron S, ISh, CO<sub>2</sub>, AE, Nf, Mgf y Sf, comunes en los dos MDS, y las seleccionadas como indicadores de la calidad del suelo que no se han reportado en la literatura fueron ISh, Al, Nf, Mgf y Sf. Los mejores índices de la calidad del suelo (ICS) para la calidad de la taza de café se presentaron en la finca La Carolina (Ciudad Bolívar): ICS1 (1.32) e ICS2 (4.32), y los más bajos estuvieron en Urrao: ICS1 (finca El Cadillal: 0.82) e ICS2 (fincas El Rosal y El Cadillal, 2.50 en ambas).

El ICS1 promedio fue de 1.05, con un coeficiente de variación de 11.7 %, y el ICS2 promedio fue de 3.19, con un coeficiente de variación del 11 %. El mayor valor del ICS2 se debe al uso de la communalidad como factor ponderador de los indicadores, por lo que se recomienda su uso para evaluar los indicadores edáficos y foliares que se relacionan con la calidad de la taza de café. Se presentaron diferencias significativas entre índices y entre núcleos debidas, probablemente, a la variabilidad de las propiedades estudiadas, y a diferencias entre factores ambientales y de manejo del productor en las fincas.

Los resultados hallados sugieren que el segundo índice (ICS2) es el más adecuado para evaluar indicadores edáficos que se relacionan con la calidad de la taza de café, ya que presenta el mayor valor y para calcularlo se requieren menos variables (Tabla 11), lo que lo hace más económico y fácil de determinar. Este resultado indica, además, que el uso de la communalidad como ponderador está asignando a las variables un peso más acorde con su papel en el fenómeno que se estudia al no diluir su varianza en el conjunto de elementos que forman el factor, como sucede en otros métodos que analizan la varianza total aportada por todas las

## Referencias

- Alves De Castro, A.; Gomes De Sousa, D.; Montandon, G.; Bueno Dos Reis. F; Goedert, W. & Carvalho, L. (2013). Interpretation of microbial soil indicators as a function of crop yield and organic carbon. *Soil Science Society of America Journal*, 77(2), 461-472.
- Andrews, S. & Carroll, C. (2001). Designing a soil quality assesment tool for sustainable agroecosystem management. *Ecological Applications*, 11(6), 1573-1585.
- Andrews, S.; Karlen, D. & Cambardella, C. (2004). The soil management assessment framework: a quantitative soil quality evaluation method. *Soil Science Society of America Journal*, 68(6), 1945-1962.
- Andrews, S.; Karlen, D. & Mitchell, J. (2002). A comparison of soil quality indexing methods for vegetable production systems in Nothern California. *Agriculture, Ecosystems and Environment*, 90(1), 25-45.
- Arshad, M. & Martin, S. (2002). Identifying critical limits for soil quality indicators in agro-ecosystems. *Agriculture, Ecosystems and Environment*, 88(2), 153-160.
- Bastida, F.; Zsolnay, A.; Hernández, T. & García, C. (2008). Past, present and future of soil quality indices: a biological perspective. *Geoderma*, 147(3), 159-171.
- Buenaventura, C. & Castaño, J. (2002). Influencia de la altitud en la calidad de la bebida de muestras de café procedente del ecotopo 206B en Colombia. *Cenicafé*, 53(2), 119-131.
- Doran, J. & Parkin, T. (1994). Defining and assessing soil quality. *Soil Science Society of America*, 677(35), 3-21.
- Evanylo, G. & McGuinn, R. (2009). Agricultural management practices and soil quality: measuring, assessing, and comparing laboratory and field test kit indicators of soil quality attributes. College of Agriculture and Life Sciences, Virginia Polytechnic Institute and State University, 11 p.
- Glover, J.; Reganold, J. & Andrews, P. (2000). Systematic method for rating soil quality of conentional, organic, and integrated Apple orchards in Washington State. *Agriculture Ecosystem Environment*, 80(1), 29-45.
- Hair, J.; Anderson, R.; Tatham, R. & Black, W. (2004). *Análisis Multivariante* (5<sup>a</sup> ed.). Madrid: Prentice Hall.
- Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC). (2006). *Métodos analíticos del laboratorio de suelos*. Bogotá: IGAC.

Jaramillo, D. (2014). *El suelo: origen, propiedades, espacialidad* (2<sup>a</sup> ed.). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Karlen, D.; Ditzler, C. & Andrews, S. (2003). Soil quality: why and how?. *Geoderma*, 114(3), 145-156.

Marín, S; Arcila, J., Montoya, E. & Oliveros, C. (2003). Cambios físico y químicos durante la maduración del fruto de café (*Coffea arabica L.* var. Colombia). *Cenicafé*, 54 (3), 208-225.

Norma Técnica Colombiana (NTC 3566). (2011). Café verde. Preparación de muestras para uso en análisis sensorial. Ed. Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación (ICONTEC).

Puerta, G.; González, F.; Correa, A.; Álvarez, I.; Ardila, J.; Girón, O.; Ramírez, C.; Baute, J.; Sánchez, P.; Santamaría, M. & Montoya, F. (2016). Diagnóstico de la calidad del café según altitud, suelos y beneficio en varias regiones de Colombia. *Cenicafé*, 67(2), 15-51.

Puerta, G. (2000), Influencia del proceso de beneficio en la calidad del café. *Cenicafé*, 51(2), 136-150.

Puerta, G. (2013). Manual del cafetero colombiano. Calidad del café. *Cenicafé*, 82-110.

Qi, Y.; Darilek, J.; Huang, B.; Zhao, Y.; Sun, W. & Gu, Z. (2009). Evaluating soil quality indices in an agricultural region of Jiangsu Province, China. *Geoderma*, 149(3), 325-334.

Rezai, S.; Gilkes, R. & Andrews, S. (2004). *A minimum data set for assessing soil quality in rangelands*. 13th International Soil Conservation Organisation Conference, Brisbane.

Sadeghian, S. (2013). Manual del cafetero colombiano. Investigación y tecnología para la sostenibilidad de la caficultura. *Cenicafé*, 85-116.

Sharma, K.; Mandal, U.; Snirvas, K.; Vittal, K.; Mandal, B.; Grace, J. & Ramesh, V. (2005). Long-term soil management effects on crop yields and soil quality in a dryland Alfisol. *Soil Tillage Research*, 83(2), 246-259.

Schoenholtz, S.; Van Miegroet, H. & Burger, J. (2000). A review of chemical and physical properties as indicators of forest soil quality: challenges and opportunities. *Forest Ecology and Management*, 138(1), 335-356.

Soil Science Society of America (SSSA). (1997). Glossary of Soil Science Terms 1996. *Soil Science Society of America*.

Specialty Coffee Association of America (SCAA Protocols). (2014). *Cupping Specialty Coffee*, 23, 1-7.

Universidad Nacional de Colombia. & Gobernación de Antioquia. (2015). Investigación sobre cafés especiales. “Antioquia: origen de cafés especiales”. Informe Final Técnico, 37-47.

DETERMINACIÓN DE DOS ÍNDICES DE LA CALIDAD DEL SUELO EN LA CALIDAD DE LA TAZA DE CAFÉ

Wienhold, J.; Karlen, D.; Andrews, S.; Stott, D. (2009). Protocol for indicator scoring in the soil management assessment framework (SMAF). *Renewable Agriculture and Food Systems*, 24(4), 260-266.

Yu-Dong, C.; Huo-Yan, W.; Jian-Min, Z.; Lu, X.; Bai-Shu, Z.; Yong-Cun, Z. & Xiao-Qin, C. (2013). Minimum data set for assessing soil quality in farmland of Northeast China. *Pedosphere*, 23(5), 564-576.

# COMPARATIVO DE MODELOS DE PRONÓSTICO: CLÁSICOS, BAYESIANOS Y TÉCNICAS DE COMBINACIÓN<sup>a</sup>

## COMPARATIVE OF FORECASTING MODELS: CLASSICAL, BAYESIAN AND COMBINATION TECHNIQUES

MARISOL VALENCIA<sup>b</sup>, VICTOR OSORNO<sup>c</sup>, JUAN CARLOS SALAZAR<sup>d</sup>

Recibido 03-07-2017, aceptado 20-09-2017, versión final 09-10-2017.

Artículo Investigación

**RESUMEN:** En la industria de alimentos, los modelos de inventarios que contemplan una adecuada predicción de la demanda son de gran ayuda para la gestión óptima del abastecimiento, especialmente en los productos perecederos como los lácteos, debido a su corta vida útil y la importancia de su calidad relacionada con la salud. Sin embargo, algunas empresas pequeñas y medianas colombianas no cuentan con tecnología y capacidades para hacer pronósticos de sus productos, lo cual es muy importante para la planeación de producción e inventarios. En este trabajo se propone una comparación de la precisión de pronósticos de modelos estadísticos individuales y combinaciones entre éstos, usando un algoritmo multi-producto para las combinaciones aplicado a un caso de estudio de ventas del sector de lácteos. Se encuentra que un modelo individual de regresión Bayesiana con innovación es muy buena alternativa en el caso estudiado, así como dos de las técnicas de combinación usadas.

**PALABRAS CLAVE:** Estadística y probabilidad; evaluación de modelos y selección; pronósticos; estadística Bayesiana.

**ABSTRACT:** In the food industry, inventory models that provide adequate prediction of demand are useful for optimum supply management, especially in perishable products such as dairy products, because of their short shelf life and the importance of their quality related to health. However, some small and medium Colombian companies do not have the technology and capabilities to do forecasts of their products, which is very important for production and inventory planning. In this paper we propose a comparison of the precision of forecasts of individual statistical models and combinations between them, using a multi-product algorithm for the combinations applied to a case study of sales of the dairy sector. It is found that an individual model of Bayesian regression with innovation is a very good alternative in the case studied, as well as two of the combination techniques used.

**KEYWORDS:** Statistics and Probability; model evaluation and selection; forecasting; Bayesian statistics.

<sup>a</sup>Valencia, M.; Osorno, V. & Salazar, J. (2017). Comparativo de modelos de pronóstico: clásicos, bayesianos y técnicas de combinación. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 124–140. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.66085>

<sup>b</sup>Ingeniera Industrial, Msc en Estadística. Docente Institución Universitaria Tecnológico de Antioquia. mvalencia@unal.edu.co

<sup>c</sup>Ingeniero Administrativo. Joven Investigador Colciencias. vaosornov@unal.edu.co

<sup>d</sup>PhD. en Estadística, Profesor asociado-Escuela de estadística. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. jcsalaza@unal.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Algunas empresas tipo PYME (Pequeñas y Medianas) en Colombia tienen falencias de información y de adecuada planeación que algunas veces generan pérdidas en producto o tiempos (Montoya *et al.*, 2010; Rodríguez, 2003; Sánchez *et al.*, 2007), en especial, en la cadena de alimentos lácteos, donde hay un especial cuidado debido a su corta vida útil y la importancia para la salud humana (Doganis *et al.*, 2006). Un aporte a la mejora de la gestión de información para procesos operativos, que facilitan la programación adecuada de inventarios, es el pronóstico de demanda y un aporte a la precisión de éstos pronósticos es la técnica de combinación de pronósticos, como se ha visto ya en diversas investigaciones (Barrow & Kourentzes, 2016).

En varios trabajos de series de tiempo para demandas que se han estudiado para problemas de inventarios, se presentan comportamientos como estacionalidad y ciclicidad que requieren un buen análisis y técnicas para la adecuada predicción (Simchi-Levi *et al.*, 2008).

En este trabajo se propone una comparación de la precisión de pronósticos de modelos estadísticos individuales y combinaciones entre éstos, usando un algoritmo multi-producto que es aplicado a un caso de estudio de ventas del sector de lácteos. El comparativo parte de estimar algunos modelos estadísticos propuestos individuales a las series de tiempo propuestas, el modelo lineal mixto generalizado clásico y Bayesiano, modelo lineal dinámico Bayesiano, modelo de regresión Bayesiana definido en Valencia (2016), con tres tipos de combinaciones de pronósticos basadas en dichos modelos: la primera, usada en Nowotarski *et al.* (2016), se basa en el RMSE; la segunda, de Bates & Granger (1969), que utiliza el MSE; y la de Hsiao & Wan (2014), basada en vectores propios (EIG1), las dos últimas diseñadas en el paquete GeomComb. Se eligen la mejor al encontrar el menor valor de los criterios RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio) en primer lugar y SMAPE (Media del Error Absoluto Porcentual Simétrico). Para su ejecución se diseña un algoritmo que permita estimar la combinación para múltiples productos de manera simultánea.

Este artículo está organizado así: en la primera sección se presenta una revisión sobre aplicaciones de modelos de pronóstico basados en estadística clásica y Bayesiana, y de métodos de combinación de pronósticos existentes. En la sección de métodos se muestran los que se van a comparar, y en resultados se analizan las series de tiempo para luego aplicar los modelos propuestos, y comparar, mediante los indicadores de error mencionados, los resultados que permitan determinar los modelos con mejor desempeño entre individuales o combinaciones.

## 2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Los datos tomados de forma cronológica suelen presentar unas estructuras correlacionadas y características o patrones visibles y a veces no visibles como: tendencia, estacionalidad, ciclos, y aleatoriedad, las cuales

se pueden presentar de muchas formas (Bowerman *et al.*, 2007; Congdon, 2002).

En la actualidad existen diversas metodologías de pronóstico que abarcan desde los conocimientos empíricos hasta las herramientas investigativas más avanzadas. En una empresa, las conjeturas sobre el futuro con base en cierta información, son más valiosos que las presunciones sin bases (Hanke & Wichern, 2006), por ello en la literatura se encuentran diversas aplicaciones de pronósticos para demanda de productos (Jun-jun & Ting, 2009; Guo *et al.*, 2017; Yelland, 2010).

Pronosticar el comportamiento de la demanda cada vez con más exactitud requiere de modelos estadísticos convenientes que logren captar la aleatoriedad de los datos históricos en el tiempo. Al respecto se han visto revisiones donde mencionan trabajos aplicados con modelos clásicos como el de regresión, ARIMA, SARIMA, suavización exponencial, pero además, otros modelos cuyas estructuras teóricas contemplan teoría Bayesiana, donde se encuentran entre otros regresión Bayesiana, modelo lineal dinámico Bayesiano, modelo de suavización exponencial Bayesiano (Valencia *et al.*, 2015).

### **Combinación de pronósticos**

Tal y como se explica en Chan *et al.* (1999), el concepto de combinación de pronósticos parte del trabajo de Bates y Granger en 1969, quienes parten del análisis de dos pronósticos individuales de series de tiempo y luego demuestran que una adecuada combinación lineal de dos pronósticos puede resultar en un mejor resultado que los generados por medio de dos pronósticos individuales, debido a un error de varianza más pequeño y han motivado que muchos otros investigadores realicen nuevos tipos de combinaciones (Chen, 2011).

La fórmula clásica de dicha combinación (Bates & Granger, 1969) se encuentra programada en una de las funciones del paquete GeomComb (Weiss, 2016), con la ecuación de pesos dada por (1)

$$W_i^{BG} = \frac{\hat{\sigma}^{-2}(i)}{\sum_{j=1}^N \hat{\sigma}^{-2}(j)} \quad (1)$$

Donde se asume que  $\hat{\sigma}^{-2}(i) = \text{MSE}$ .

Además, el pronóstico combinado final  $\hat{f}$  estaría dado por:

$$\hat{f}_t = f_t \times W^{BG}$$

Recientes trabajos sobre combinación de pronósticos muestran resultados exitosos en algunos casos, encontrando que mejora la precisión de los pronósticos (Barrow & Kourentzes, 2016). Guo *et al.* (2017) mencionan que existen dos maneras de realizar pronósticos: una individual y la segunda, combinando los pronósticos de diferentes modelos; citan otras investigaciones donde se usan dichas combinaciones (Hyndman *et al.*, 2011; Miller *et al.*, 2007; Zotteri & Kalchschmidt, 2007); además, conducen una investigación donde en

primer lugar se analizan los factores que inciden en la demanda del producto que analizan. Luego, se usan cinco modelos de pronósticos en una técnica de combinación Bayesiana, llamada de doble nivel, que resulta mejor que los pronósticos individuales en su investigación. Barrow & Kourentzes (2016) mencionan que las técnicas de combinación se han diseñado acorde con diferentes teorías como aquel basado en minimización de la varianza del error (Min & Zellner, 1993), otras basadas en el criterio de regresión por mínimos cuadrados ordinarios (OLS); y otras en teoría de probabilidad Bayesiana (Andersson & Karlsson, 2007; Kociecki *et al.*, 2012).

En Chan *et al.* (1999) se describen algunos métodos para asignar pesos a cada uno de los pronósticos derivados de los modelos utilizados, entre éstos se encuentran: promedio simple (Simple average), un promedio simple lineal de los pronósticos, implicando así iguales pesos (Nowotarski *et al.*, 2016). Los más altos pesos (Highest weighting), que consiste en simplemente elegir el procedimiento de pronóstico individual al que le fue dado el peso más alto en el método de pesos fijos, éste no es una combinación, este método es equivalente a elegir la técnica de pronóstico la cual es la mejor durante los períodos de estimación de pesos.

En este trabajo se programa un algoritmo donde se estima una combinación basada en RMSE calculando los pesos según la ecuación (2). Aquí  $\lambda_i = \text{RMSE}_i$ , con  $i=1, \dots, M$ , donde  $M$  es el total de modelos individuales a considerar (Nowotarski *et al.*, 2016), y  $t$  es el periodo que se pronostica, donde  $t=1, \dots, N-T$ , en este caso,  $t=1, \dots, 14$ .

$$\omega_{i,t} = \frac{\lambda_{it}^{-1}}{\sum_{j=1}^M \lambda_{jt}^{-1}} \quad (2)$$

Gracias a esto, el peso correspondiente a cada pronóstico dependerá individualmente de su desempeño histórico tal que los pronósticos más precisos tienen una mayor proporción en la combinación. Luego de obtenidos los pesos se procede a resolver la siguiente fórmula para la combinación resultante (Nowotarski *et al.*, 2016):  $\hat{Y}_t^c = \sum_{i=1}^M \omega_{i,t} \hat{Y}_{i,t}$ , donde hay  $i=1, 2, \dots, M$  modelos de pronóstico y  $t$  es el periodo que se pronostica.

En el paquete GeomComb (R Core Team, 2014) se encuentra la combinación programada de Bates & Granger (1969), también, la función comb\_EIG1, que calcula los pesos de la combinación de acuerdo al enfoque de vectores propios estándar dado por Hsiao & Wan (2014).

### 3. MÉTODOS

Los datos fueron proporcionados por una empresa de transformación láctea Antioqueña. Estos consisten en tres años de ventas diarias para tres productos distintos, en total son 1096 datos por producto, denominados aquí:  $Y1$ ,  $Y2$  y  $Y3$ .

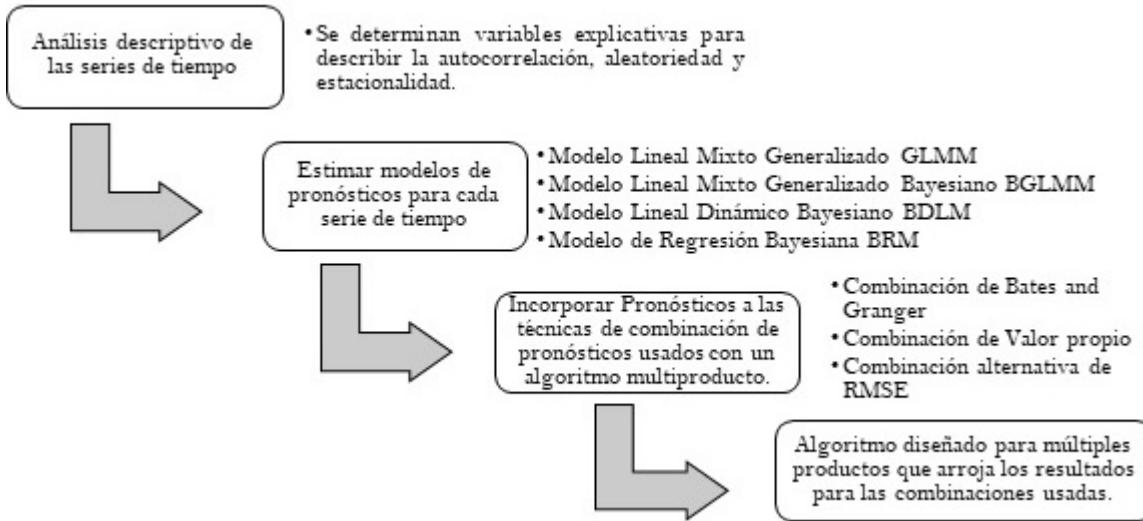


Figura 1: Metodología. Fuente: Elaboración propia.

La figura 1 describe los pasos que fueron seguidos para las estimaciones de los modelos de pronósticos usados en este trabajo, la cual es replicable a otros casos que requieran desarrollar combinaciones de pronósticos de múltiples productos para mejorar la precisión.

Para iniciar el análisis en series temporales, se hace un corte en la serie de datos, de  $N$  valores,  $T$  ( $T < N$ ) serán usados para analizar correlación y análisis descriptivo y para estimar modelos; los  $N-T$  restantes serán usados para validar la estimación y para determinar si el modelo tiene una capacidad de pronóstico adecuada. Los períodos  $N-T$  se asocian con la planeación logística que tenga la empresa, que para este caso, son 14 días.

Se realiza entonces un análisis descriptivo de las series de tiempo con  $T$  valores, de donde salen variables explicativas para el comportamiento de las series. Al encontrar aleatoriedad, estacionalidad, no estacionariedad, se analiza la incorporación de variables explicativas a los modelos como la senoidal, cosenoidal, indicadoras, la tendencia por medio de tiempo, dejando las más significativas en los modelos individuales.

Como medidas para evaluar los distintos modelos que se usarán, se propone el uso del RMSE y del SMAPE (ecuaciones (3) y (4)), éstas, con el fin de determinar la capacidad de ajuste y de pronóstico y posteriormente realizar una comparación más precisa (Muñoz, 2013):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2} \quad (3)$$

Donde  $y_t$  es el valor observado para cada producto en el tiempo  $t$ ,  $\hat{y}_t$  es el valor pronosticado por el modelo respectivo, y  $n$  es el número de datos.

$$SMAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|F_t - A_t|}{((A_t + F_t)/2)} \quad (4)$$

Donde  $A_t$  es el valor real,  $F_t$  es el valor pronosticado y  $n$  es el número de datos.

Los modelos a ser utilizados para la estimación y pronóstico de las series de ventas de productos lácteos son: el modelo lineal mixto generalizado (GLMM), modelo basado en estadística clásica, y los modelos lineal mixto generalizado bayesiano (BGLMM), el modelo lineal dinámico Bayesiano (BDLM) y el modelo de regresión bayesiana (BRM) presentado en Valencia (2016) como representantes de esta rama de la estadística.

Los modelos usados y las técnicas de combinación realizadas con base en el algoritmo diseñado en este trabajo para múltiples productos se describen a continuación.

### **3.1. Modelo lineal mixto generalizado (GLMM)**

El modelo lineal mixto generalizado puede ser utilizado cuando existen unidades con estructuras correlacionadas en el tiempo, pero a su vez, expresan algún grado de relación con otras variables, una parte fija y otra aleatoria. La ecuación (4) representa éste modelo con ambas componentes, para cada unidad o individuo  $i$ -ésimo (Gómez-Restrepo & Cogollo-Flórez, 2012).

$$y_i = x_i\beta + z_i\alpha_i + \varepsilon_i$$

Donde  $y_i$  es el vector de respuestas del  $i$ -ésimo individuo,  $\beta$  es un vector de parámetros  $p \times 1$ , que corresponde a los efectos fijos,  $x_i$  representa la matriz de las covariables relativas al sistema del  $i$ -ésimo individuo,  $\alpha_i$ , representa el efecto del  $i$ -ésimo individuo,  $z_i$  las covariables del efecto aleatorio y  $\varepsilon_i$ , el error intra-individual.

En estos casos, la respuesta  $y_i$  no tiene una naturaleza continua, como en el modelo lineal mixto gaussiano.

Éstos modelos mixtos generalizados se estiman con máxima verosimilitud con la ayuda de funciones del Programa R, como las del paquete lme4 (Bates *et al.*, 2015), donde es posible especificar la distribución de probabilidad de la variable respuesta, por ejemplo, Poisson. Para este tipo de modelos, la variable respuesta tiene una función link acorde con los modelos lineales generalizados, que, para la respuesta que se asume en este trabajo de tipo Poisson, es el “logaritmo natural”, indicando que el “ln(respuesta)” es la nueva variable respuesta a ser estimada y que el ajuste devuelve la transformación realizada.

### **3.2. Modelo lineal mixto generalizado Bayesiano (BGLMM)**

El modelo lineal mixto generalizado Bayesiano (BGLMM) como se explica en McNeil & Wenden (2007), parte del mismo tipo de ecuación que el expresado en (4), pero, como se ha señalado, por las premisas teóricas de la estadística Bayesiana, los parámetros parten de una distribución a priori, y se construye con

ello, una distribución a posteriori de los mismos parámetros y se realiza un muestreo vía Monte Carlo Por Cadenas de Markov (McNeil & Wendum, 2007).

Para la estimación de estos modelos se parte de una distribución a priori para los parámetros fijos del modelo Lineal Mixto Generalizado, otra distribución para la matriz de varianza covarianza del (los) efecto (s) aleatorio (s), y una distribución de probabilidad para los datos. La función *bglmer* del paquete *blme* del software R (Dorie, 2015), realiza esta estimación, basado en la familia Poisson como la distribución de probabilidad para los datos.

Para los parámetros fijos, las distribuciones de probabilidad a priori que se pueden utilizar en dicha función puede ser la Normal, la t, una no informativa, o un valor específico de desviación o de varianza. En el caso de la varianza de los residuales, su matriz de varianza puede tener una distribución a priori Gamma, Gamma Inversa, o no informativa. En este trabajo se prueban diversas combinaciones de distribuciones a priori hasta encontrar las que tienen mejor desempeño, definiendo una Wishart para la matriz de covarianza de los efectos aleatorios y no informativas para los parámetros fijos y varianza de residuales.

### 3.3. Modelo lineal dinámico bayesiano (BDLM)

Estos modelos se basan en la estructura y funcionamiento de los modelos en espacio de estado, usados por varios autores para elaborar pronósticos con base en teoría Bayesiana, cuya estimación se facilita al usar el filtro de Kalman (Petris *et al.*, 2009; Valencia *et al.*, 2015). Dicho filtro es un sistema con base en ecuaciones matemáticas que implementan estimadores con técnicas que ayudan a realizar una corrección del error de predicción en un estimador, en el sentido que busca una minimización de la estimación de la varianza del error bajo ciertas condiciones.

Los modelos de espacio estado generan estimaciones donde efectúan actualizaciones recursivas generadas con el filtro de Kalman, por estas razones, dicho filtro es especialmente aplicable a estimaciones bayesianas (Peña & Guttman, 1988). Precisamente en Valencia *et al.* (2015) se describe el paso a paso de la actualización recursiva que se surte en el filtro de Kalman dentro de un Modelo Lineal Dinámico Bayesiano, donde se actualiza el vector de parámetros, las distribuciones a priori y a posteriori, así como la ecuación de observación, generando un nuevo error y convirtiendo el proceso en un ciclo que se renueva continuamente.

La ecuación general para la estructura del BDLM para series multivariadas se describe mediante las ecuaciones de observación y del sistema (5) y (6), respectivamente.

$$Y_{i,t} = F\theta_t^{(i)} + \mathbf{v}_{i,t} \quad (5)$$

$$\theta_t^{(i)} = G\theta_{t-1}^{(i)} + w_{i,t} \quad (6)$$

Donde:

$$v_{i,t} \sim N(0, V_i), w_{i,t} \sim N(0, W_i)$$

$Y_{i,t}$ : Pronóstico que actualiza la media de la distribución predictiva en cada ciclo del filtro de Kalman.  $\theta_t^{(i)}$ : Vector de parámetros del sistema que también actualiza las distribuciones a priori y a posteriori en cada ciclo.

El modelo estimado sigue una representación estacional de espacio-estado multivariada (Petris, 2010; Petris *et al.*, 2009), expresiones mostradas en (7). En éstas el factor estacional es  $\delta_t^{(i)}$ , para este caso es el día de la semana.

$$\begin{aligned} Y_{i,t} &= \mu_t^{(i)} + \delta_t^{(i)} + v_{i,t} \\ \mu_t^{(i)} &= \mu_{t-1}^{(i)} + \delta_t^{(i)} + w_{i,t} \\ \delta_t^{(i)} &= \delta_{t-1}^{(i)} - \delta_{t-2}^{(i)} - \delta_{t-3}^{(i)} - \delta_{t-4}^{(i)} - \delta_{t-5}^{(i)} - \delta_{t-6}^{(i)} + w_{i,t}^s \end{aligned} \quad (7)$$

Donde:

$$v_{i,t} \sim N(0, V_i), w_{i,t} \sim N(0, W_i), w_{i,t}^s \sim N(0, W_i^s), \text{ son las variables del error.}$$

### 3.4. Modelo de regresión Bayesiana (BRM)

Este modelo es descrito en la tesis de Valencia (2016). Parte de asignar una distribución normal a priori para el vector de parámetros  $\beta$ , y normal para los datos. En dicho trabajo se muestra un proceso de innovación para el vector inicial  $\beta_0$  para cada tiempo  $t$ , pero el parámetro de precisión  $\tau_0 = 1/\sigma$  es fijo. La deducción de la distribución predictiva usada para pronosticar es presentada en dicha tesis, la cual resulta en una T de Student.

La distribución predictiva, luego de hecha la integral del producto entre la posterior y la distribución futura de los datos está dada en la ecuación (8):

$$f(Y_+|y_0, Y) = [((Y_+ - Y_n)' A^{-1} + (Y_+ - Y_n) + 1) A]^{-\frac{T+4}{2}} \quad (8)$$

La cual es una T-student, con media  $Y_n = X_+ \tilde{\beta}$ ,  $v$  grados de libertad, y varianza dada por (9):

$$V = \frac{v}{v-2} \quad A = \frac{v}{v-2} (Y_+ - Y_n)' (Y_+ - Y_n) \quad (9)$$

Para el proceso de combinación de pronósticos se basa en la inclusión de los modelos individuales previamente descritos. Se diseña un algoritmo basado en una técnica de combinación que usa el RMSE; se usan además, las combinaciones dadas por las funciones `comb_BG` y `comb_EIG1` del paquete `GeomComb` (Weiss, 2016). Finalmente se agregan las anteriores programaciones y funciones en un algoritmo que unifica los pronósticos individuales y estima las combinaciones para las múltiples series de tiempo que han sido usadas, posterior a las estimaciones individuales, como se explica a continuación.

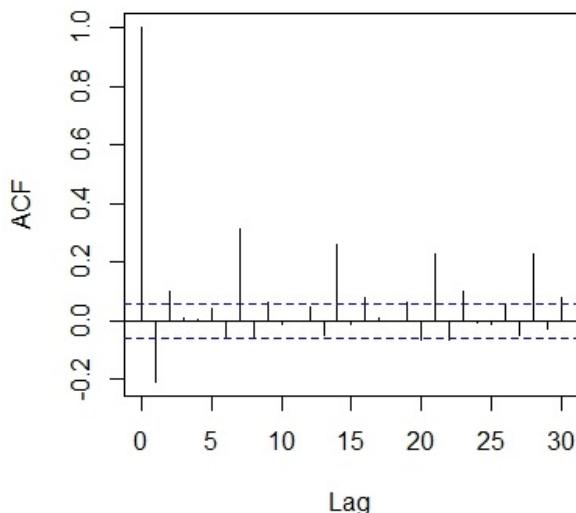
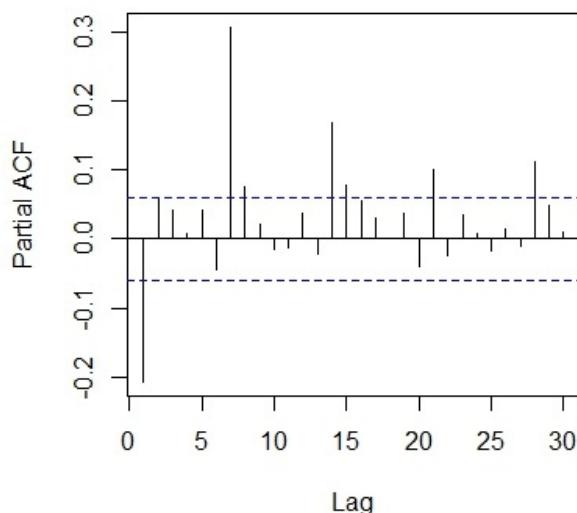
**Función ACF para la serie Y1****Función PACF para la serie Y1**

Figura 2: Funciones de ACF y PACF de la serie Y1. Fuente: Elaboración propia.

### 3.5. Combinación de pronósticos

En la fase de combinaciones se diseñó un algoritmo que puede ser replicado en cualquier otro programa, sacando como resultado las combinaciones para múltiples productos, con los siguientes pasos: 1. Lectura de series de tiempo de las demandas de todos los productos. 2. Lectura de valores ajustados con los modelos individuales. 3. Lectura de valores pronosticados con los modelos individuales. 4. Estimación de valores de RMSE y SMAPE de ajuste y de pronósticos para todos los modelos. 5. Estimación de combinaciones: la primera programada con base en el RMSE, la segunda en Bates & Granger, la tercera en vector propio, las últimas dos bajo funciones programadas en GeomComb de Weiss (2016). 6. Estimación de indicadores RMSE y SMAPE de pronóstico para todas las combinaciones. 7. Resultados de indicadores de todos los modelos y de las combinaciones.

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Del análisis descriptivo se encuentra una autocorrelación en las series de tiempo y estacionalidad de orden 7, lo cual puede apreciarse en la figura 2, dados los valores de autocorrelación por fuera de las bandas en las funciones ACF y PACF.

Para las otras series de tiempo, las figuras son muy similares, indicando un orden estacional 7. Se usan entonces las mismas variables explicativas en las estimaciones de los modelos individuales como se describe en los resultados.

Se estimaron todos los modelos y combinaciones en el siguiente caso de estudio. El objeto de estudio son tres series de tiempos de productos facturados por una empresa del sector lácteo de Colombia, durante un periodo de tres años, empezando desde el 1 de enero de 2010 y finalizando el 31 de diciembre del 2012, para un total de  $N=1096$  observaciones, dejando para evaluar la capacidad de pronóstico 14 observaciones finales de la base (2 semanas calendario) es decir  $m=14$ , dadas las condiciones de planeación logística de la empresa; por tanto el ajuste se hace con  $n=1082$  observaciones. La serie es de frecuencia diaria.

#### **4.1. Modelo lineal mixto generalizado (GLMM)**

El análisis parte de los siguientes datos:

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos.

Variables explicativas: TIEMPO, SENOIDAL, COSENOIDAL, INDICADORAS: DIAjueves, DIALunes, DIAmartes, DIAmiercoles, DIAsabado, DIAviernes.

La estimación del GLMM permite obtener los resultados presentados en la tabla 1.

Tabla 1: Tabla de parámetros estimados para  $m=14$  y  $n=1082$  del modelo GLMM. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor Z	P( $ z $ )
Intercepto	8.5449906	0.3426657	24.9	<2e-16
COSENOIDAL	-0.0442598	0.0006001	-73.8	<2e-16
SENOIDAL	-0.0303668	0.0380426	-0.8	0.425
DIAjueves	0.1614398	0.0007957	202.9	<2e-16
DIALunes	0.1815893	0.0007909	229.6	<2e-16
DIAmartes	0.1375735	0.0008001	171.9	<2e-16
DIAmiércoles	0.0668904	0.0008137	82.2	<2e-16
DIAsábado	0.2969244	0.0007711	385.1	<2e-16
DIAviernes	0.1821512	0.0007908	230.3	<2e-16

Al usar el nivel de significancia alfa de 0.05 para el análisis de este modelo, se aprecia la significancia de la mayoría de las variables, excepto SENOIDAL. En la tabla 2 se aprecian los indicadores SMAPE y RMSE del modelo GLMM.

Tabla 2: Indicadores SMAPE y RMSE para el modelo GLMM, 14 días de pronóstico. Fuente: Elaboración propia.

Modelo	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
GLMM	SMAPE AJUSTE	0.1133046	0.1498572	0.1019512
	RMSE AJUSTE	861.1126	650.3818	2190.745
- 14 DÍAS	SMAPE PRONOSTICO	0.2607798	0.2660003	0.2157739
	RMSE PRONOSTICO	2234.262	1723	4852.498

## 4.2. Modelo lineal mixto generalizado bayesiano (BGLMM)

El análisis parte de los siguientes datos iniciales:

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos, para un total de 3288 datos.

Variables explicativas: TIEMPO, SENOIDAL, COSENOIDAL, INDICADORAS: DIAjueves, DIALunes, DIAMartes, DIAmiercoles, DIAsabado, DIAviernes.

Los resultados del modelo BGLMM son presentados en la tabla 3.

Tabla 3: Tabla de parámetros estimados para m=14 y n=1082 modelo BGLMM. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor Z	P(> z )
Intercepo	8.5593729	0.4160576	20.6	<2e-16
COSENOIDAL	-0.0441165	0.0006001	-73.5	<2e-16
SENOIDAL	-0.0292278	0.0482913	-0.6	0.553
DIAjueves	0.1616877	0.0007957	203.2	<2e-16
DIALunes	0.1818705	0.0007909	230.0	<2e-16
DIAMartes	0.1378317	0.0008002	172.2	<2e-16
DIAmiercoles	0.0671176	0.0008138	82.5	<2e-16
DIAsabado	0.2971862	0.0007711	385.4	<2e-16
DIAviernes	0.1824183	0.0007908	230.7	<2e-16

Al usar el nivel de significancia  $\alpha$  de 0.05 para el análisis de este modelo, se aprecia la significancia de la mayoría de las variables, excepto SENOIDAL.

La tabla 4 resume los indicadores SMAPE y RMSE para este modelo. Se aprecia que los resultados no difieren demasiado con respecto al modelo GLMM previo.

Finalmente, del modelo BGLMM es posible ver que, con base en el indicador SMAPE, tanto en términos de ajuste como en términos de pronóstico y para los tres productos se presentaron mejores resultados para el análisis de 14 días. Situación similar a la que se presenta cuando se analiza con base en el indicador

Tabla 4: Indicadores SMAPE y RMSE para el modelo BGLMM, 14 días. Fuente: Elaboración propia.

Modelo	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
BGLMM	SMAPE AJUSTE	0.1133110	0.1498913	0.1019335
	RMSE AJUSTE	861.1319	650.4701	2190.609
- 14 DÍAS	SMAPE PRONOSTICO	0.2608418	0.2660491	0.2157681
	RMSE PRONOSTICO	2234.355	1723.022	4852.443

de RMSE, puesto que el caso de 14 días genera mejores resultados tanto en términos de ajuste, como en términos de pronóstico.

#### 4.3. Modelo dinámico lineal bayesiano o BDLM

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos, para un total de 3288 datos.

Con este modelo se procedió a su estimación con valores distintos para las matrices de varianzas W2 y V, aplicando un porcentaje de la matriz de varianza original, con el fin de comparar los resultados y determinar si hay algún indicio de cambios en los indicadores SMAPE, tanto de ajuste como de pronóstico.

Las variaciones porcentuales de la matriz de varianza y covarianza fueron: 100 %, 20 %, 10 %, 5 % y 1 %. Para todos los anteriores se procedió a analizar su SMAPE respectivo, valores que se resumen en la tabla 5.

Tabla 5: Indicadores de SMAPE para variaciones de la varianza, productos modelo BDLM, 14 días. Fuente: Elaboración propia.

% Var Modelo BDLM	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
(Var 100 %)	SMAPE Ajuste	<b>0.1360946</b>	0.1825339	0.1186081
	SMAPE Pronóstico	0.2587795	<b>0.2601995</b>	<b>0.2349506</b>
(Var 20 %)	SMAPE Ajuste	0.1365151	<b>0.1822709</b>	0.1183841
	SMAPE Pronóstico	0.2587626	0.2602433	0.2349855
(Var 10 %)	SMAPE Ajuste	0.1366053	0.1830196	0.1182411
	SMAPE Pronóstico	0.2587437	0.2602715	0.2350241
(Var 5 %)	SMAPE Ajuste	0.1365431	0.1839926	<b>0.1182124</b>
	SMAPE Pronóstico	0.2587092	0.2603142	0.2350910
(Var 1 %)	SMAPE Ajuste	<b>0.1370200</b>	0.1880636	0.1194906
	SMAPE Pronóstico	<b>0.2584839</b>	0.2605035	0.2353633

De esta tabla 5 se puede observar que para el producto Y1 su mejor ajuste se realiza con la varianza al 100 % aunque el mejor pronóstico es dado por la varianza al 1 %, no difiere mucho del caso del 100 %. Siendo

en términos generales mejor el ajuste y pronóstico. Para el producto Y2, su mejor ajuste se realiza con la varianza al 20 %, mientras que el mejor pronóstico se realiza con la varianza al 100 %. Para el producto Y3, el mejor ajuste se realiza con la varianza al 5 %, mientras que el mejor pronóstico se realiza con la varianza al 100 %. Dado que hubo pocas variaciones de un porcentaje de la varianza a otro, se decide usar los valores de la varianza al 100 %, para continuar con el comparativo.

#### 4.4. Modelo BRM

Variable respuesta: VENTA.

Cantidad de datos: 1096 datos por producto lácteo, 3 productos, para un total de 3288 datos.

Variables explicativas: Variable indicadora, día de la semana: DIAjueves, DIALunes, DIAMartes, DIAMiercoles, DIAsabado, DIAviernes.

La tabla 6 resume los indicadores RMSE y SMAPE para este modelo, para cada uno de los productos. Para el producto Y1, el mejor resultado fue alcanzado con el percentil 0.01 de la distribución T de Student predictiva; para el producto Y2, el percentil 0.95 al igual que para el producto Y3.

Tabla 6: Indicadores SMAPE y RMSE, modelo BRM, para los productos Y1, Y2 y Y3. Fuente: Elaboración propia.

Modelo	Indicador	Producto Y1	Producto Y2	Producto Y3
BRM - 14 Días	SMAPE AJUSTE	0.114054	0.1450512	0.1062252
	RMSE AJUSTE	856.625221	643.392469	2172.65243
	SMAPE PRONOSTICO	0.2230162	0.2276766	0.2072645
	RMSE PRONOSTICO	2212.77999	1719.06294	4845.11599

#### 4.5. Combinaciones de pronósticos

Para la combinación de pronósticos se realizaron 3 metodologías: la combinación con base en el RMSE; la combinación basada en Bates & Granger en la función comb\_BG del paquete GeomComb; y la combinación basada en vectores propios de la función comb\_EIG1 desarrollada por los autores Hsiao y Wan en 2014. Los resultados de todos los modelos individuales y las combinaciones realizadas, se muestran en la tabla 7, con el fin de realizar el comparativo.

Los resultados de indicadores señalan al modelo BRM como el mejor en casi todos los casos, excepto para el producto Y2, cuyo menor RMSE le corresponde a la combinación BG. Sin embargo, para el producto Y1, la combinación BG y el modelo BDLM también muestran buen desempeño. En general, las combinaciones RMSE y BG tienen resultados cercanos al modelo BRM para Y1 y Y3, lo cual muestra que son alternativas funcionales para elaborar pronósticos, así como el modelo BGLMM para Y3, para este tipo de casos con

Tabla 7: Indicadores RMSE y SMAPE de pronóstico para todos los modelos y combinaciones, m=14. Fuente: Elaboración Propia.

Modelo	Producto Y1		Producto Y2		Producto Y3	
	RMSE	SMAPE	RMSE	SMAPE	RMSE	SMAPE
BDLM	<b>2212.91300</b>	0.25878	1768.00000	0.26020	5035.75800	0.23495
GLMM	2234.26200	0.26078	1723.00000	0.26600	4852.49800	0.21577
BGLMM	2234.35500	0.26084	1723.02200	0.26605	<b>4852.44300</b>	0.21577
BRM	<b>2212.77999</b>	<b>0.22302</b>	1719.06294	<b>0.22768</b>	<b>4845.11599</b>	<b>0.20726</b>
COMB - RMSE	<b>2216.61800</b>	<b>0.25016</b>	<b>1712.69800</b>	0.23331	<b>4874.82200</b>	<b>0.21559</b>
COMB - BG	<b>2217.32200</b>	<b>0.24969</b>	<b>1711.53600</b>	<b>0.23533</b>	<b>4871.66500</b>	<b>0.21521</b>
COMB - EIG1	2216.72700	0.25060	1713.29700	0.23258	4876.26400	0.21581

comportamiento estacional.

## 5. CONCLUSIONES

Se realizó una revisión de diferentes modelos para pronósticos, así como técnicas de combinación que se usan diferentes pronósticos individuales para buscar una mayor precisión. Algunas metodologías se basan en promedio simple, pesos fijos, pesos rotativos, etc., en el inverso del RMSE o IRMSE usado en (Nowotarski *et al.*, 2016), en regresiones. Además, algunas de éstas se encuentran en el paquete de R llamado Geom-Comb.

Se diseñó un algoritmo en R para tres productos que incorpora los pronósticos individuales y genera pronósticos combinados usando tres técnicas, que también puede replicarse en otros casos en los que se requiera comparar resultados. Las 3 metodologías de combinaciones de pronósticos fueron la del RMSE usada en (Nowotarski *et al.*, 2016); la de Bates & Granger (1969) con la función comb\_BG; y la basada en vectores propios con la función comb\_EIG1 desarrollada por los autores Hsiao y Wan en 2014, que no encuentra tan buen desempeño en este caso de estudio. Algunas de las técnicas de combinación usadas, si bien fueron mejores que otros pronósticos individuales, ninguna de éstas logró ser mejor en todos los casos, pero generan resultados que en general pueden clasificarse con un buen desempeño predictivo.

A partir de las comparaciones de los indicadores SMAPE y RMSE, para el caso de estudio, puede afirmarse que el modelo BRM tuvo buenos resultados, pero se logró observar que las combinaciones RMSE y BG tienen resultados cercanos al modelo BRM con buen desempeño, lo cual muestra que son alternativas funcionales para elaborar pronósticos, y por lo tanto, se recomienda su uso cuando se tengan datos similares a los del caso de estudio aquí presentado.

## AGRADECIMIENTOS

A Colciencias, por beca de joven investigador, por medio de la Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

## Referencias

- Andersson, M. & Karlsson, S. (2007). Bayesian forecast combination for VAR models. *Sveriges Riskbank-Working Papers*, 1-17. Disponible en: [http://www.riksbank.se/Upload/Dokument\\_riksbank/Kat\\_publicerat/WorkingPapers/2007/wp216.pdf](http://www.riksbank.se/Upload/Dokument_riksbank/Kat_publicerat/WorkingPapers/2007/wp216.pdf)
- Barrow, D. & Kourentzes, N. (2016). Distributions of forecasting errors of forecast combinations: Implications for inventory management. *International Journal of Production Economics*, 177, 24-33. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.03.017>
- Bates, D.; Maechler, M.; Bolker, B. & Walker, S. (2015). Fitting Linear Mixed-Effects Models Using lme4. *Journal of Statistical Software*, 67(1), 1-48. <https://doi.org/10.18637/jss.v067.i01>
- Bates, J. & Granger, C. (1969). The combination of forecasts. *Operational Research Quarterly*, 20(4), 451-468.
- Bowerman, B.; Koehler, A. & O'Connell, R. (2007). Pronósticos, series de tiempo y regresión: un enfoque aplicado. México, DF: CENCAGE Learning.
- Chan, C.; Kingsman, B. & Wong, H. (1999). The value of combining forecasts in inventory management ± a case study in banking. *European Journal of Operational Research*, 117(2), 199-210.
- Chen, K. (2011). Combining linear and nonlinear model in forecasting tourism demand. *Expert Systems with Applications*, 38(8), 10368-10376. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.02.049>
- Congdon, P. (2002). *Bayesian Statistical Modelling*. (U. of London, Ed.). London, England: Wiley Series in Probability and Statistics.
- Doganis, P.; Alexandridis, A.; Patrinos, P. & Sarimveis, H. (2006). Time series sales forecasting for short shelf-life food products based on artificial neural networks and evolutionary computing. *Journal of Food Engineering*, 75(2), 196-204. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2005.03.056>
- Dorie, V. (2015). Package “blme”. Disponible en: <https://cran.r-project.org/>
- Jun-jun, G. & Ting, K. (2009). A joint decision model of inventory control and promotion optimization based on demand forecasting. *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Automation and Logistics, ICAL 2009*, 201800(August), 119-123. IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICAL.2009.5262965>

Gómez-Restrepo, J. & Cogollo-Flórez, M. (2012). Detection of Fraudulent Transactions Through a Generalized Mixed Linear Models. *Ingeniería y Ciencia*, 8(16), 221-237.

Guo, F.; Diao, J.; Zhao, Q.; Wang, D. & Sun, Q. (2017). A double-level combination approach for demand forecasting of repairable airplane spare parts based on turnover data. *Computers & Industrial Engineering*, 110, 92-108. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.05.002>

Hanke, J., & Wichern, D. (2006). *Pronósticos en los negocios*. Pearson Educación.

Hsiao, C. & Wan, S. (2014). Is there an optimal forecast combination? *Journal of Econometrics*, 178, 294-309. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2013.11.003>

Hyndman, R.; Ahmed, R.; Athanasopoulos, G. & Shang, H. (2011). Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(9), 2579-2589. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2011.03.006>

Kociecki, A., Kolasa, M., & Rubaszek, M. (2012). A Bayesian method of combining judgmental and model-based density forecasts. *Economic Modelling*, 29(4), 1349-1355. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2012.03.004>

McNeil, A. & Wenden, J. (2007). Bayesian inference for generalized linear mixed models of portfolio credit risk. *Journal of Empirical Finance*, 14(2), 131-149. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2006.05.002>

Miller, J.; Berry, C. & Lai, C. (2007). A comparison of alternative forecasting strategies for multistage production-inventory systems. *Decision Sciences*, 7(4), 714-724.

Min, C. & Zellner, A. (1993). Bayesian and non-Bayesian methods for combining models and forecasts with applications to forecasting international growth rates. *Journal of Econometrics*, 56(1-2), 89-118. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4076\(93\)90102-B](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4076(93)90102-B)

Montoya, A.; Montoya, I. & Castellanos, O. (2010). Situación de la competitividad de las Pyme en Colombia: elementos actuales y retos. *Agronomía Colombiana*, 28(1), 107-117.

Muñoz, L. (2013). Cálculo del RMSE vertical del Modelo de Elevación de Superficie NEXTMap® World 30 DSM vs. la Red Geodésica de Primer Orden de Costa Rica.

Nowotarski, J.; Liu, B.; Weron, R. & Hong, T. (2016). Improving short term load forecast accuracy via combining sister forecasts. *Energy*, 98, 40-49. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2015.12.142>

Peña, D. & Guttman, I. (1988). Bayesian approach to robustifying the Kalman filter. *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Linear Models*, 227-254.

Petris, G. (2010). An R Package for Dynamic Linear Models. *Journal of Statistical Software*, 36(12), 1-16. Retrieved from <http://www.jstatsoft.org/>

- Petris, G.; Petrone, S. & Campagnoli, P. (2009). Dynamic Linear Models with R. Disponible en: <http://www.springer.com/statistics/statistical+theory+and+methods/book/978-0-387-77237-0>
- R Core Team. (2014). A Language and Environment for Statistical Computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Disponible en: <http://www.r-project.org/>
- Rodríguez, A. (2003). La realidad de la Pyme colombiana: desafío para el desarrollo (pp. 1-20). Programa Mejoramiento de las Condiciones de Entorno Empresarial, FUNDES Colombia.
- Sánchez, J.; Osorio, J. & Baena, E. (2007). Algunas aproximaciones al problema de financiamiento de las Pymes en Colombia. *Scientia et Technica*, 13(34).
- Simchi-Levi, D.; Kaminski, P. & Simchi-Levi, E. (2008). *Designing and Managing the Supply Chain: concepts, strategies, and cases*. New York: McGraw-Hill.
- Valencia, M. (2016). *Dynamic Model for the Multiproduct Inventory Optimization with Multivariate Demand*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. Disponible en: <http://www.bdigital.unal.edu.co/51516/1/43616826.2015.pdf>
- Valencia, M.; Correa, J.; & Díaz, F. (2015). Métodos Estadísticos Clásicos y Bayesianos para el pronóstico de demanda. Un análisis comparativo. *Revista Facultad de Ciencias*, 4(1), 52-67. <https://doi.org/https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v4n1.49775>
- Valencia, M.; Díaz, F. J. & Correa, J. C. (2015). Planeación de inventarios con demanda dinámica. Una revisión del estado del arte. *Dyna*, 82(190), 182-191. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.15446/dyna.v82n190.42828>
- Weiss, M. (2016). Package “GeomComb”.
- Yelland, P. (2010). Bayesian forecasting of parts demand. *International Journal of Forecasting*, 26(2), 374-396. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2009.11.001>
- Zotteri, G. & Kalchschmidt, M. (2007). A model for selecting the appropriate level of aggregation in forecasting processes. *International Journal of Production Economics*, 108(1), 74-83. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2006.12.030>

# SOBRE EL CONTROL EN SISTEMAS DINÁMICOS DE DIMENSIÓN INFINITA EN ESPACIOS DE HILBERT Y DE FRECHÉT<sup>a</sup>

## ON THE CONTROL OF INFINITE DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS ON HILBERT AND FRECHÉT SPACES

NANCY LÓPEZ REYES<sup>b</sup>

Recibido 30-04-2017, aceptado 16-10-2017, versión final 19-10-2017.

Artículo Revisión

**RESUMEN:** Se revisa el Control sobre sistemas dinámicos lineales de dimensión infinita que evolucionan en espacios con propiedades geométrico-algebraicas diferentes. En un caso, sobre espacios de Hilbert, los cuales poseen una rica estructura geométrico-algebraica, muy útil para el tratamiento del control, desde el punto de vista del enfoque dominio-frecuencia y del enfoque espacio-estado. En el otro caso, sobre espacios de Frechét, en particular sobre  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ , cuyas propiedades geométricas implican un tratamiento diferente del Control. Ambos casos se ilustran con sendos ejemplos de aplicaciones interesantes, uno relacionado con Sistemas Integrables y el otro con la conocida Ecuación de Loewner.

**PALABRAS CLAVE:** Teoría de sistemas; sistemas de control; jerarquía KP discreta; ecuación de Loewner.

**ABSTRACT:** The Control theory of infinite-dimensional lineal systems on spaces with quite different algebro-geometric properties is reviewed. Firstly, is revised the case where the systems evolve on Hilbert spaces which, as it known, have a rich algebro-geometric structure, very useful to study of both, frequency-domain and state-space approaches. In the another case, the systems evolve on Frechét spaces, in particular on the  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ , that requires a qualitative different treatment of control. Both cases are illustrated with two examples, which are applications related with the integrable systems and the Loewner equation.

**KEYWORDS:** System theory; control systems; discrete KP hierarchy; Loewner equation.

## 1. INTRODUCCIÓN

El control de los sistemas de dimensión infinita es una conocida área de investigación y aplicación en el desarrollo de nuevas tecnologías, a la que se le han dedicado innumerables libros y artículos, por ejemplo, Bensoussan et al. (1993), Jurdjevi (1997), Jacob & Zwart (2002), Brockett & Faybusovich (1991). Algunos de ellos, como Curtain & Zwart (1995), han abordado el estudio de estos sistemas con un enfoque bastante

<sup>a</sup>López, N. (2017). Sobre el control en sistemas dinámicos de dimensión infinita en espacios de Hilbert y de Frechét. *Rev. Fac. Cienc.*, 6(2), 141–162. DOI: <https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64535>

<sup>b</sup>PhD en Matemáticas. Profesora Titular. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Antioquia. nancy.lopez@udea.edu.co

integrador, tratando tanto los métodos relacionados con los aspectos del enfoque espacio-estado, así como los relacionados con el enfoque dominio-frecuencia. En ambos enfoques, los espacios sobre los que se definen los sistemas de control son espacios de Hilbert de dimensión infinita (Akhiezer & Glasman, 1993), los cuales poseen una estructura geométrico-algebraica que brinda muchas posibilidades.

Por otro lado, también se han abordado, con cierto interés, en el estudio de problemas extremales, sistemas sobre  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ , espacio de funciones analíticas del disco unitario  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^n$  en  $\mathbb{C}$  Duren (1983), Pomemrenke (1975), Shoikhet (2001). En este caso, las propiedades geométrico-algebraica de este tipo de espacio llevan a un tratamiento diferente del control (Roth, 1998).

Este trabajo es una revisión de algunos aspectos del control de sistemas de dimensión infinita, en los casos antes mencionados. Se exponen así, algunos elementos fundamentales de los sistemas de control en espacios de Hilbert (Bensoussan et al., 1993) y en el espacio de Frechét  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  (Goodman, 1968).

En los sistemas lineales de dimensión infinita, el control se realiza sobre espacios de dimensión infinita, es decir, el conjunto alcanzable, que es el conjunto de elementos que definen la trayectoria del sistema, es de dimensión infinita. Abordamos este tema en dos partes fundamentales: en la primera, los conjuntos alcanzables son espacios de Hilbert (muchos resultados se pueden considerar también sobre espacios de Banach), y en la segunda, los conjuntos alcanzables son familias de funciones analíticas de una variable compleja.

En la primera parte se ven aspectos cualitativos del control como las propiedades duales de controlabilidad y la observabilidad, a la luz del enfoque espacio-estado. Además, se trata la teoría de realización, a la luz del enfoque dominio-frecuencia. Esta parte incluye también, el problema de Cauchy y el problema con fronteras. En la segunda parte se ven los sistemas de control en  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ , considerándose el problema de valor inicial y su solución, a partir de familias de evolución definidas en ciertas clases de funciones analíticas.

De forma sumarizada, a manera de ilustración, los problemas que se abordan en ambas partes son:

	<i>teoría de control en <math>Z</math></i>	<i>teoría de control en <math>\mathcal{H}(\mathbb{D})</math></i>
<i>sistema de control</i>	$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t) = f(z(t), u(t))$	$\frac{d}{dt}w(z, t) = h(z, w(z, t), t)$
<i>conjunto de entradas</i>	$U \subseteq Z$	$\Omega \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{D})$
<i>función de control</i>	$u \in L^1(I; U)$	$h \in L^1(I; \Omega)$
<i>soluciones del sistema</i>	$t \rightarrow z(t) \in Z$	$t \rightarrow w(\cdot, t) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$

$Z$ : espacio de Hilbert,  $I \subseteq \mathbb{R}^+$ .

El contenido del trabajo es el siguiente: en la sección 2 se exponen, de manera general, algunos aspectos de la teoría de sistemas en dimensión finita (Curtain & Pritchard, 1977), en la sección 3 se tratan los aspectos relacionados con el control en espacios de Hilbert (Bensoussan et al., 1993; Curtain & Zwart, 1995), en

la sección 4, los relacionados con el control en  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  (Goodman, 1968; Roth, 1998), y finalmente, en la sección 5 se dan dos ejemplos de aplicaciones.

## 2. SISTEMAS DE DIMENSIÓN FINITA

A continuación se exponen, de manera general y resumida, algunos aspectos esenciales de la teoría de sistemas de dimensión finita, para dar una idea de los aspectos conceptuales que se presentan al pasar del caso finito al infinito.

Se entiende por un sistema lineal de dimensión finita  $\Sigma(A, B, C, D)$  en el espacio de estado  $Z$  al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), & t \geq 0, & z(0) = z_0 \\ y(t) &= Cz(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $z_0$  es una condición inicial arbitraria y  $A, B, C$  son aplicaciones lineales acotadas tales que  $A \in \mathcal{L}(Z)$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ ,  $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$ ,  $D \in \mathcal{L}(U, Y)$ ,  $Z, U, Y$  son espacios vectoriales lineales de dimensión finita, conocidos como espacio de estado, espacio de entrada y espacio de salida, respectivamente ( $Z = \mathbb{C}^n, U = \mathbb{C}^m, Y = \mathbb{C}^k$ ). Estos espacios vectoriales son casos particulares de  $\mathcal{L}(\Omega, \Gamma)$ , espacio de aplicaciones lineales acotadas de  $\Omega$  en  $\Gamma$ . El estado  $z(t) \in Z$ , la entrada  $u(t) \in U$  y la salida  $y(t) \in Y$  están relacionados por las ecuaciones (1).

Si  $u \in L_2([0, \tau]; U)$  entonces  $z \in C([0, \tau]; Z)$  y  $y \in L_2([0, \tau]; Y)$  están dados por

$$z(t) = e^{At}z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds\tag{2}$$

y

$$y(t) = Ce^{At}z_0 + \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t),\tag{3}$$

donde  $L_p(\Omega; \Gamma)$  es el conjunto de aplicaciones de  $L_p(\Omega)$  en  $\Gamma$ , siendo  $L_p(\Omega)$  el conjunto de funciones medibles Lebesgue sobre  $\Omega$  y  $C(\Omega; \Gamma)$  es el conjunto de funciones continuas de  $\Omega$  en  $\Gamma$ .

Haciendo  $z_0 = 0$  en (3) y tomando la transformada de Laplace de  $y(t)$  obtenemos la representación dominio-frecuencia del sistema  $\Sigma(A, B, C, D)$

$$\tilde{y}(s) = D\tilde{u}(s) + C(sI - A)^{-1}B\tilde{u}(s), \quad s \in \mathbb{C}_\omega^+ = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \omega\}$$

y así la función de transferencia del sistema queda dada por

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B\tag{4}$$

en este caso (4) es una función racional propia con coeficientes complejos. Las propiedades algebraicas de esta clase de funciones han sido muy explotadas en el control de los sistemas de dimensión finita, dando lugar a resultados muy útiles de la teoría de realización de sistemas dinámicos.

Diferentes conceptos, asociados a los aspectos cualitativos del control, como la controlabilidad, la observabilidad y la estabilidad, han sido caracterizados de diversas maneras. Revisaremos algunas de ellas.

El sistema  $\Sigma(A, B, -)$  es **controlable** si para algún  $0 < \tau < \infty$ , la **aplicación de controlabilidad**  $\mathcal{B}^\tau : L_2([0, \tau]; U) \rightarrow Z$  y definida como

$$\mathcal{B}^\tau u := \int_0^\tau e^{A(\tau-s)} Bu(s) ds \quad (5)$$

tiene a  $Z$  como la clausura de su rango, es decir  $\overline{\text{ran}(\mathcal{B}^\tau)} = Z$ .

El sistema  $\Sigma(A, -, C)$  es **observable** si para algún  $0 < \tau < \infty$ , la **aplicación de observabilidad**  $\mathcal{C}^\tau : Z \rightarrow L_2([0, \tau]; Y)$ , definida como

$$(\mathcal{C}^\tau z_0)(t) := Ce^{At} z_0 \quad (6)$$

es tal que  $\ker(\mathcal{C}^\tau) = \{0\}$ .

Se tiene fácilmente que  $\Sigma(A, B, C)$  es controlable, si y sólo si,

$$\text{ran}(BAB \dots A^{n-1}B) = \dim(Z) = n$$

y análogamente observable, si y sólo si,

$$\text{ran}(C^*A^*C^* \dots (A^{n-1})^*C^*) = \dim(Z) = n$$

donde  $A^*$  es el adjunto de  $A$ .

Otro criterio para el estudio de la controlabilidad y la observabilidad es mediante el gramiano.

El sistema  $\Sigma(A, B, C)$  es controlable si su gramiano de controlabilidad en  $[0, \tau]$  para  $0 < \tau < \infty$ , definido como

$$L_B^\tau := \mathcal{B}^\tau (\mathcal{B}^\tau)^* = \int_0^\tau e^{As} BB^* e^{A^*s} ds, \quad (7)$$

satisface que  $L_B^\tau > 0$ , y observable si su gramiano de observabilidad en  $[0, \tau]$  para  $0 < \tau < \infty$ , definido como

$$L_C^\tau = (\mathcal{C}^\tau)^* \mathcal{C}^\tau = \int_0^\tau e^{A^*s} C^* C e^{As} ds \quad (8)$$

satisface que  $L_C^\tau > 0$ .

Se dice que A es **exponencialmente estable** si

$$\exists M > 0, \omega > 0 : \|e^{At}z_0\| \leq Me^{-\omega t}\|z_0\|, t > 0 \quad (9)$$

En los sistemas exponencialmente estables, (7) y (8) alcanzan, respectivamente, las condiciones de controlabilidad y obsevabilidad para  $\tau = \infty$ . Así los gramianos de controlabilidad y obsevabilidad  $L_B = L_B^\infty$  y  $L_C = L_C^\infty$  satisfacen las ecuaciones de Lyapunov:

$$\begin{aligned} AL_B + L_B A^* &= -BB^* \\ A^*L_C + L_C A &= -C^*C \end{aligned} \quad (10)$$

De hecho,  $L_B$  y  $L_C$  son las soluciones únicas de (10).

A continuación, veremos cómo algunos de los aspectos antes mencionados, se generalizan al caso de dimensión infinita. Esto ha permitido el desarrollo de una teoría útil para el diseño del control de un conjunto significativo de problemas.

### 3. SISTEMAS DE DIMENSIÓN INFINITA. EL CONTROL EN ESPACIOS DE HILBERT

En esta sección se presentan los sistemas lineales de estado (sistemas espacio-estado, sistema entrada-salida), que sirven para modelar problemas de ecuaciones diferenciales como sistemas de control en un espacio abstracto, y estudiar sus propiedades.

#### 3.1. Nociones preliminares (Chicone & Latushkin, 1999; Hille & Phillips, 1948; Pazy, 1992)

**Definición 3.1.** Una función operador-evaluada  $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(Z)$  es un **semigrupo** sobre un espacio de Hilbert Z, si satisface

$$T(0) = I \quad (11)$$

$$\forall t, s \geq 0, \quad T(t+s) = T(t)T(s). \quad (12)$$

**Definición 3.2.** Un semigrupo  $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(Z)$  es **fueramente continuo** sobre un espacio de Hilbert Z, si satisface:

$$\forall z \in Z, \quad \|T(t)z - z\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow 0^+. \quad (13)$$

Usaremos la notación usual  **$c_0$ -semigrupo** para referirnos a un semigrupo fueramente continuo.

**Definición 3.3.** El **generador infinitesimal**  $A$  del semigrupo  $T(t)$  se define como

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t) - I)z \quad (14)$$

siempre que el límite exista. El dominio de  $A$ ,  $D(A)$ , es definido como el conjunto de elementos en  $Z$  para los cuales el límite existe.

**Definición 3.4.** Sea el conjunto  $\Delta(\tau) = \{(s, t) : 0 \leq s \leq t\}$ .

$U(t, s) : \Delta(\tau) \rightarrow \mathcal{L}(Z)$  es un **operador de evolución débil** si satisface

a-  $U(s, s) = I$ .

b-  $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$  para todo  $0 \leq s \leq r \leq t < \tau$ .

c-  $U(\cdot, s)$  es fuertemente continuo en  $[s, \tau]$  y  $U(t, \cdot)$  es fuertemente continuo en  $[0, t]$ , o sea,  $U(t, s)$  es un  $c_0$ -semigrupo en  $t$  sobre  $[s, \tau]$  para cada  $s$  fijo, y un  $c_0$ -semigrupo en  $s$  sobre  $[0, t]$  para cada  $t$  fijo.

### 3.1.1. El problema de Cauchy

Sea  $A$  el generador infinitesimal de un  $c_0$ -semigrupo  $T(t)$  en un espacio de Hilbert  $Z$ ,  $f \in C^1([0, \tau]; Z)$  y  $z_0 \in D(A)$ . La solución del **problema de Cauchy abstracto homogéneo**

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0 \in D(A) \quad (15)$$

es

$$z(t) = T(t)z_0.$$

Para el **problema de Cauchy abstracto no homogéneo**

$$\dot{z}(t) = Az(t) + f(t) \quad t \geq 0, \quad z(0) = z_0. \quad (16)$$

la función  $z(t)$  es una **solución clásica** en  $[0, \tau]$  si  $z \in C^1([0, \tau]; Z)$ ,  $z(t) \in D(A)$  para todo  $t \geq [0, \tau]$  y  $z(t)$  satisface (16) para todo  $t \in [0, \tau]$ , donde  $C^n(\Omega; \Gamma)$  es el conjunto de funciones de  $\Omega$  en  $\Gamma$  con derivada  $n$ -ésima continua. La función  $z(t)$  es una solución clásica en  $[0, \infty)$  si  $z(t)$  es una solución clásica en  $[0, \tau]$  para todo  $\tau \geq 0$ . Si  $f \in C([0, \tau]; Z)$  y  $z$  es una solución clásica de (16) en  $[0, \tau]$ , entonces  $Az(\cdot)$  es un elemento de  $C([0, \tau]; Z)$  y

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (17)$$

es continuamente diferenciable en  $[0, \tau]$  y es la única solución clásica de (16).

### 3.1.2. El problema de control con frontera

Problemas de este tipo son frecuentes en diferentes aplicaciones. La formulación que trataremos a continuación nos permite modelar una gran variedad de estos problemas. Sea el sistema abstracto:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \mathfrak{U}z(t), & z(0) &= z_0, \\ \mathfrak{B}z(t) &= u(t)\end{aligned}\tag{18}$$

donde el operador  $\mathfrak{U} : D(\mathfrak{U}) \subset Z \rightarrow Z$ ,  $u(t) \in U$ , siendo  $U$  un espacio de Hilbert separable y el operador de frontera  $\mathfrak{B} : D(\mathfrak{B}) \subset Z \rightarrow U$  satisface que  $D(\mathfrak{U}) \subset D(\mathfrak{B})$ .

**Definición 3.5.** *El sistema de control definido en (18) se denomina **sistema de control con frontera** si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *El operador  $A : D(A) \rightarrow Z$ , con  $D(A) = D(\mathfrak{U}) \cap \ker(\mathfrak{B})$  y*

$$Az = \mathfrak{U}z \quad \text{para } z \in D(A)\tag{19}$$

*es el generador infinitesimal de un  $c_0$ -semigrupo en  $Z$ .*

2. *Existe un operador  $B \in \mathcal{L}(U, Z)$  tal que para todo  $u \in U$ ,  $Bu \in D(\mathfrak{U})$ , el operador  $\mathfrak{U}B$  es un elemento de  $\mathcal{L}(U, Z)$  y*

$$\mathfrak{B}Bu = u, \quad u \in U\tag{20}$$

Si suponemos que (18) es un sistema de control con frontera, con  $u \in C^2([0, \tau]; U)$ , entonces la siguiente ecuación diferencial abstracta para  $v \in Z$  está bien planteada

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= Av(t) - B\dot{u}(t) + \mathfrak{U}Bu(t) \\ v(0) &= v_0\end{aligned}\tag{21}$$

Esto se debe, a que bajo la suposición de que  $A$  es el generador infinitesimal de un  $c_0$ -semigrupo y los operadores  $B, \mathfrak{U}B$  son lineales acotados, la función  $f(t) = -B\dot{u}(t) + \mathfrak{U}Bu(t)$  es un elemento de  $C^1([0, \tau]; Z)$ .

Podemos reformular (18) como una ecuación de evolución abstracta (21). En esta ecuación aparece la derivada del término de control, lo que es no deseable. Este hecho puede resolverse reformulando (21) en un nuevo espacio de estado  $Z^e = U \oplus Z$ , definido como la suma directa de los espacios  $U$  y  $Z$ ; obteniéndose así, la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\dot{z}^e(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{U}B & A \end{pmatrix} z^e(t) + \begin{pmatrix} I \\ -B \end{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ z^e(0) &= \begin{pmatrix} (z_0^e)_1 \\ (z_0^e)_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{22}$$

Si  $v_0 \in D(A)$  y  $u \in C^2([0, \tau]; U)$ , entonces (22) con  $(z_0^e)_1 = u(0)$ ,  $(z_0^e)_2 = v_0$  y  $\tilde{u} = \dot{u}$ , tiene solución clásica única

$$z^e(t) = \begin{pmatrix} (z^e(t))_1 \\ (z^e(t))_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

donde  $v(t)$  es la solución clásica única de (21). Más aún, si  $z_0 = v_0 + Bu(0)$  entonces la solución clásica de (18) está dada por

$$z(t) = \begin{pmatrix} B & I \end{pmatrix} z^e(t) \quad (23)$$

$$= Bu(t) - T(t)Bu(0) + T(t)z_0 - \int_0^t T(t-s)B\dot{u}(s)ds + \int_0^t T(t-s)\mathfrak{U}Bu(s)ds \quad (24)$$

### 3.2. Sistema lineal de estado. Teoría espacio-estado

**Definición 3.6.** *El sistema infinito-dimensional con entrada  $u$  y salida  $y$ :*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), & t \geq 0, & z(0) = z_0 \\ y(t) &= Cz(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (25)$$

es un sistema lineal de estado, denotado por  $\Sigma(A, B, C, D)$ , donde  $A$  es el generador infinitesimal de un  $c_0$ -semigrupo  $T(t)$  en un espacio de Hilbert  $Z$ ,  $B$  es un operador lineal acotado de un espacio de Hilbert  $U$  en  $Z$ ,  $C$  es un operador lineal acotado de  $Z$  en un espacio de Hilbert  $Y$  y  $D$  es un operador acotado de  $U$  en  $Y$ .

La solución de (25) es dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (26)$$

Si  $u \in C([0, \tau]; Z)$ ,  $z(t)$  será una solución clásica de (25). Si  $u \in L_p([0, \tau]; Z)$ ,  $z(t)$  será una solución débil de (25).

### 3.3. Controlabilidad y observabilidad

La controlabilidad es la propiedad que nos permite controlar lo que sucede entre dos puntos arbitrarios del espacio de estado (dos estados arbitrarios). En particular, se dice que  $z$  es **controlable** hasta  $\hat{z}$ , si existe un tiempo  $\alpha$  y un control  $u$  tal que  $\hat{z} = z(\alpha)$ . Hay varias caracterizaciones del concepto de controlabilidad, las cuales coinciden si el espacio de estado es de dimensión finita. En dimensión infinita la situación es más compleja.

**Definición 3.7.** *Sea el sistema lineal de estado  $\Sigma(A, B, \_)$ .*

- (i) *La aplicación controlabilidad de  $\Sigma(A, B, \_)$  en  $[0, \tau]$ , para algún  $0 < \tau < \infty$ , es el operador lineal y acotado  $\mathcal{B}^\tau : L_2([0, \tau]; U) \rightarrow Z$  definido como*

$$\mathcal{B}^\tau u := \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds \quad (27)$$

(ii) **El gramiano de controlabilidad** de  $\Sigma(A, B, -)$  en  $[0, \tau]$  se define como el operador

$$L_B^\tau := \mathcal{B}^\tau (\mathcal{B}^\tau)^* \quad (28)$$

(iii) **El sistema**  $\Sigma(A, B, -)$  **es aproximadamente controlable** en  $[0, \tau]$ , para algún  $0 < \tau < \infty$ , si dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario, todos los puntos de  $Z$  pueden ser alcanzados, en un tiempo  $\tau$ , desde el origen hasta una distancia  $\varepsilon$  de ellos, es decir

$$\overline{\text{ran}(\mathcal{B}^\tau)} = Z$$

(iv) **El sistema**  $\Sigma(A, B, -)$  **es exactamente controlable** en  $[0, \tau]$ , para algún  $0 < \tau < \infty$ , si todos los puntos de  $Z$  pueden ser alcanzados desde el origen en un tiempo  $\tau$ , es decir

$$\text{ran}(\mathcal{B}^\tau) = Z$$

Notemos que en la definición anterior  $C$  y  $D$  no intervienen.

Las aplicaciones controlabilidad y el gramiano de controlabilidad satisfacen las siguientes propiedades:

a-  $\mathcal{B}^\tau \in \mathcal{L}(L_2([0, \tau]; U), Z)$ ,  $\mathcal{B}^t \in \mathcal{L}(L_2([0, \tau]; U), L_2([0, \tau], Z))$ ,  $0 \leq t \leq \tau$

b-  $(\mathcal{B}^{\tau*}x)(s) = B^* T^*(t-s)z$

c-  $L_B^\tau \in \mathcal{L}(Z)$ ,  $L_B^\tau z = \int_0^\tau T(s)BB^*T^*(s)zds$ ,  $z \in Z$

El sistema  $\Sigma(A, B, -)$  tiene, en cierto sentido, una propiedad de invarianza bajo la traslación y el escalamiento del generador infinitesimal, esto significa que  $\Sigma(A, B, -)$  es exactamente (aproximadamente) controlable si y sólo si, el sistema  $\Sigma(\mu I + A, B, -)$  es exactamente (aproximadamente) controlable para todo  $\mu \in \mathbb{C}$ .

La observabilidad es un concepto dual al de controlabilidad, según el cual el conocimiento de los datos de salida (entrada) del sistema están determinados únicamente por el estado inicial.

**Definición 3.8.** Sea el sistema lineal de estado  $\Sigma(A, -, C)$ .

(i) **La aplicación observabilidad** en  $[0, \tau]$ , para algún  $0 < \tau < \infty$ , es el operador lineal acotado  $\mathcal{C}^\tau : Z \rightarrow L_2([0, \tau]; Y)$  definido como

$$\mathcal{C}^\tau z := CT(\cdot)z \quad (29)$$

(ii) **El gramiano de observabilidad** del sistema  $\Sigma(A, -, C)$  en  $[0, \tau]$  se define como el operador

$$L_C^\tau = (\mathcal{C}^\tau)^* \mathcal{C}^\tau \quad (30)$$

(iii) El sistema  $\Sigma(A, -, C)$  es **aproximadamente observable** en  $[0, \tau]$ , para algún  $0 < \tau < \infty$ , si el conocimiento de la salida en  $L_2([0, \tau]; Y)$  determina el estado inicial de forma única, es decir

$$\ker(C^\tau) = \{0\}$$

(iv) El sistema  $\Sigma(A, -, C)$  es **exactamente observable** en  $[0, \tau]$ , para algún  $0 < \tau < \infty$ , si el conocimiento de la salida en  $L_2([0, \tau]; Y)$  determina el estado inicial de forma única y continua, es decir  $C^\tau$  es inyectiva y su inversa es acotada en el  $\text{ran}(C^\tau)$ .

El sistema  $\Sigma(A, -, C)$

- a- es aproximadamente observable en  $[0, \tau]$  si y sólo si, el sistema  $\Sigma(A^*, C^*, -)$ , que denominaremos su dual, es aproximadamente controlable en  $[0, \tau]$ .
- b- es exactamente observable en  $[0, \tau]$  si y sólo si, el sistema dual  $\Sigma(A^*, C^*, -)$  es exactamente controlable en  $[0, \tau]$ .

### 3.3.1. Pruebas de controlabilidad y de observabilidad

**Teorema 3.1.** (*Curtain & Zwart (1995)*) El sistema  $\Sigma(A, B, -)$

- a- es exactamente controlable en  $[0, \tau]$ , si y sólo si, una de las siguientes condiciones es válida para algún  $\gamma > 0$  y todo  $z \in Z$

- (i)  $\langle L_B^\tau z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2$
- (ii)  $\|\mathcal{B}^{\tau*} z\|^2 := \int_0^\tau \|(\mathcal{B}^{\tau*} z)(s)\|^2 ds \geq \gamma \|z\|^2$
- (iii)  $\int_0^\tau \|B^* T^*(s)\|^2 ds \geq \gamma \|z\|^2$
- (iv)  $\ker(\mathcal{B}^{\tau*}) = 0$  y  $\text{ran}(\mathcal{B}^{\tau*})$  es cerrado

- b- es aproximadamente controlable en  $[0, \tau]$ , si sólo si, una de las condiciones es válida

- (i)  $L_B^\tau > 0$
- (ii)  $\ker \mathcal{B}^{\tau*} = 0$
- (iii)  $B^* T^*(s)z = 0$  en  $[0, \tau]$  implica que  $z = 0$ .

**Corolario 3.1.** (*Curtain & Zwart (1995)*) Para el sistema de estado lineal  $\Sigma(A, -, C)$  se tienen las siguientes condiciones necesarias y suficientes para la observabilidad exacta y observabilidad aproximada:

- a-  $\Sigma(A, -, C)$  es exactamente observable en  $[0, \tau]$ , si y sólo si, una de las siguientes condiciones es válida, para algún  $\gamma > 0$  y todo  $z \in Z$ .

- (i)  $\langle L_C^\tau z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2$

$$(ii) \|C^\tau z\|^2 = \int_0^\tau \|(C^\tau z)(s)\|^2 ds \geq \gamma \|z\|^2$$

$$(iii) \int_0^\tau \|CT(s)z\|^2 ds \geq \gamma \|z\|^2$$

(iv)  $\ker(C^\tau) = \{0\}$  y  $C^\tau$  tiene rango cerrado.

b-  $\Sigma(A, -, C)$  es aproximadamente observable en  $[0, \tau]$ , si y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones.

$$(i) L_{C^\tau} > 0$$

$$(ii) \ker(C^\tau) = \{0\}$$

$$(iii) CT(s)z = 0 \text{ en } [0, \tau] \Rightarrow x = 0$$

### 3.4. Alcanzabilidad

**Definición 3.9.** El subespacio de alcanzabilidad del sistema  $\Sigma(A, B, -)$  es el subespacio de todos los estados que pueden ser alcanzados desde el origen:

$$\mathcal{R} := \left\{ z \in Z : \exists \tau > 0, u \in \mathcal{L}([0, \tau]; U), z = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds \right\} = \bigcup_{\tau > 0} \text{ran}(\mathcal{B}^\tau)$$

Por tanto, diremos que el sistema  $\Sigma(A, B, -)$  es aproximadamente controlable, si dado un elemento arbitrario  $z_1 \in Z$  y  $\epsilon > 0$ , es posible dirigirlo desde el origen hasta una distancia no mayor de  $\epsilon$  del elemento  $z_1$ , es decir,  $\mathcal{R}$  es denso en  $Z$ .

El subespacio no observable de  $\Sigma(A, -, C)$  es el subespacio de todos los estados iniciales que producen salida cero para todo  $t \geq 0$ :

$$\mathcal{N} := \{z \in Z : CT(t)z = 0 \text{ para todo } t \geq 0\} = \bigcap_{\tau > 0} \ker(C^\tau)$$

El sistema  $\Sigma(A, -, C)$  es aproximadamente observable si el único estado inicial que produce salida cero en  $[0, \infty)$  es el estado cero, es decir, si  $\mathcal{N} = \{0\}$ .

### 3.5. Relación entrada-salida. Aplicación entrada-salida. Función de transferencia

En el sistema  $\Sigma(A, B, C, D)$  se determinan relaciones particulares entre la entrada, el estado y la salida (Fuhrmann, 1973; Jacob & Zwart, 2002; Zwart, 2004). El semigrupo asociado al sistema especifica la relación entre los estados, mientras que la aplicación controlabilidad (27) especifica la relación entre las entradas y los estados, y la aplicación observabilidad (29) especifica la relación entre el estado inicial y la salida.

**Definición 3.10.** Sea el sistema lineal de estado  $\Sigma(A, B, \_)$  con estado inicial  $z_0 = 0$ .

La aplicación **entrada-salida** de  $\Sigma(A, B, \_)$  en  $[0, \tau]$  es la aplicación lineal y acotada

$$\mathcal{F}^\tau : L_2([0, \tau]; U) \rightarrow L_2([0, \tau]; Y)$$

definida como

$$\mathcal{F}^\tau u := Du(t) \int_0^t CT(t-s)Bu(s)ds, \quad t \in [0, \tau] \quad (31)$$

Las relaciones que expresan  $T(t)$ ,  $\mathcal{B}^\tau$ ,  $\mathcal{C}^\tau$ ,  $\mathcal{F}^\tau$  muestran las características intrínsecas del sistema de control, estos operadores son relevantes para el análisis y la síntesis del sistema en el enfoque espacio-estado (entrada-salida).

La función de transferencia es una relación entre la transformada de Laplace de las entradas al sistema y la transformada de Laplace de las salidas del sistema. Esta función constituye, lo que se denomina, la Realización del sistema, debido a que en cierto modo es una descripción del mismo, a partir del enfoque entrada-salida.

**Definición 3.11.** Sea el sistema lineal  $\Sigma(A, B, C, D)$  con estado inicial cero. Si existe un número real  $\alpha$  tal que  $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$  para  $\text{Re}(s) > \alpha$ , donde  $\hat{u}(s)$ ,  $\hat{y}(s)$  son las transformadas de Laplace de  $u$  y  $y$  respectivamente,  $G(s)$  es una función  $\mathcal{L}(U, Y)$  – evaluada de una variable compleja, entonces  $G(s)$  es la **función de transferencia** de  $\Sigma(A, B, C, D)$ . La transformada de Laplace inversa de  $G(s)$ , es la **función impulso**  $h(t)$ . Se tiene que

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B, \quad s \in \mathbb{C}_\omega^+,$$

$$h(t) = \begin{cases} D\delta(t) + CT(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Las funciones de una variable compleja, a veces pueden ser extendidas a regiones más grandes, por ello, la función  $G(s)$  podría ser extendida a una región mayor que  $\text{Re}(s) > \alpha$ . Sin embargo, en general no se requiere que  $G(s)$  esté definida sobre todo el plano complejo, muchas veces es suficiente solamente sobre algún semiplano abierto (Markushevich, 2005).

## 4. EL CONTROL EN EL ESPACIO DE FRECHÉT $\mathcal{H}(\mathbb{D})$

### 4.1. Nociones preliminares (Caratheodory, 1932)

**Definición 4.1.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y sea  $D \subset \mathbb{C}$  un dominio.

Una función  $h : \mathbb{D} \times D \times I \rightarrow \mathbb{C}$  es una **función de Carathéodory** si las siguientes condiciones se cumplen:

- (i) La aplicación  $(z, w) \rightarrow h(z, w, t)$  es analítica en  $\mathbb{D} \times D$  para casi todo  $t \in I$ .
- (ii) La aplicación  $t \rightarrow h(z, w, t)$  es medible en  $I$  para cada  $(z, w) \in \mathbb{D} \times D$  fijo.

- (iii) Para cada conjunto compacto  $K \subset \mathbb{D} \times D$  y todo subintervalo compacto  $J \subset I$  existe una función  $m = m_{K,h} \in L^1(J; \mathbb{R})$  tal que para casi todo  $t \in J$

$$|h(z, w, t)| \leq m(t) \quad \forall (z, w) \in K$$

El conjunto formado por todas las funciones de Carathéodory  $h : \mathbb{D} \times D \times I \rightarrow \mathbb{C}$  forma un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial bajo la suma y el producto usual por escalares, lo denotaremos por  $L^1(I; \mathcal{H}(\mathbb{D} \times D))$ .

Las funciones de Carathéodory  $h \in L^1(I; \mathcal{H}(\mathbb{D} \times D))$  tienen las siguientes propiedades. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $D \subset \mathbb{C}$  un dominio.

- (i) La aplicación

$$(z, w) \rightarrow \int_J v(s) h(z, w, s) ds \tag{32}$$

es analítica en  $\mathbb{D} \times D$  para cada subintervalo compacto  $J \subset I$  y cada  $v \in L^\infty(J; \mathbb{C})$ .

- (ii) La función

$$t \rightarrow \max_{(z, w) \in K} |h(z, w, t)| \tag{33}$$

es un elemento de  $L^1(J; \mathbb{R})$  para cada subintervalo compacto  $J \subset I$  y para cada subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{D} \times D$ .

- (iii) Si el disco  $B(w_0, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r\}$ , con  $r > 0$ , está contenido en  $\mathbb{D}$ , y si

$$h(z, w, t) = \sum_{k, l=0}^{\infty} c_{k,l}(t) z^k (w - w_0)^l \quad z \in \mathbb{D}, w \in K(w_0, r)$$

entonces los  $c_{k,l} \in L^1(J; \mathbb{C})$  para todo  $k, l \geq 0$  y para cada subintervalo compacto  $J \subset I$ .

## 4.2. El problema de Cauchy

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(z, t) &= h(z, w(z, t), t), & t \geq t_0 \\ w(z, t_0) &= f_0(z) \end{aligned} \tag{34}$$

donde  $h \in L^1(I; \mathcal{H}(\mathbb{D} \times D))$  y  $f_0$  es una función analítica.

Una solución de la ecuación (34) es una función  $w : \mathbb{D}_r \times J \rightarrow D$  definida para algún  $r \in [0, 1]$  y algún intervalo  $J \subseteq I$  que contiene a  $t_0$ , y que cumple las siguientes condiciones:

- (i) La aplicación  $z \rightarrow w(z, t)$  es analítica en  $\mathbb{D}_r$ , para cada  $t \in J$  fijo.

- (ii) La aplicación  $t \rightarrow w(z, t)$  es (localmente) absolutamente continua en  $J$  para cada  $z \in \mathbb{D}_r$  fijo, y se tiene que para todo  $t \in J - E$ ,  $\frac{d}{dt}w(z, t) = h(z, w(z, t), t)$ , donde  $E = E(z)$  es un conjunto de Lebesgue de medida 0.
- (iii)  $w(z, t_0) = f_0(z)$  para todo  $z \in \mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r, r \in (0, 1]\}$ .

El problema (34) tiene solución única y absolutamente continua en cada subintervalo compacto de  $J$ . Denotaremos por  $w(z, t; t_0, f_0, h)$  a la solución del sistema (34), para enfatizar la dependencia de los parámetros iniciales  $t_0, f_0$  y de la función de Carathéodory  $h$  que determinan el sistema (34).

**Definición 4.2.** *Un sistema de control en  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  es una familia  $\mathbb{F} \subset L^1(I; \mathcal{H}(\mathbb{D} \times D))$  de funciones de Carathéodory.*

Consideraremos el caso en que

$$\mathbb{F} = L^1(I; \Omega) = \{h \in L^1(I; \mathcal{H}(\mathbb{D} \times D)) : (z, w) \rightarrow h(z, w, t) \in \Omega \text{ para casi todo } t \in I\}$$

donde  $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D} \times D)$ . El conjunto  $L^1(I; \Omega)$  es el conjunto de  $L^1$ -funciones  $\Omega$ -evaluadas en el intervalo  $I$ . El conjunto  $\Omega$  se denomina *entrada o familia de entrada*.

**Definición 4.3.** *Sea  $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . El conjunto de puntos extremos de  $\Omega$  se define como*

$$\text{extr}(\Omega) = \{f \in \Omega : f = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \text{ para algún } f_1, f_2 \in \Omega, \lambda \in (0, 1) \Rightarrow f_1 = f_2\}.$$

Se pueden relacionar los problemas de Cauchy (16) y (34), si se consideran sistemas de control de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t), u(t)), & t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{35}$$

donde, por ejemplo  $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función suave,  $U \subset \mathbb{R}^n$  es llamado el conjunto entrada. La función de control  $u$  es un elemento de  $L^1(I; \mathbb{R}^n)$  que toma valores en  $U$  excepto en un conjunto de medida nula. En ese sentido, podemos ver que los sistemas de control sobre espacios de Hilbert pueden ser interpretados como un sistemas de ecuaciones diferenciales en los cuales las funciones control aparecen como parámetros.

### 4.3. Semigrupo de funciones analíticas y familias de evolución (Berkson & Porta, 1978; Chicone & Latushkin, 1999; Shoikhet, 2001; Goluzin, 1969)

#### 4.3.1. Semigrupo de funciones analíticas

Se enuncian algunos resultados relacionados con semigrupos de funciones analíticas, y con la caracterización de sus generadores infinitesimales.

**Definición 4.4.** Un semigrupo  $T$  en la familia de funciones  $\mathcal{F} := \{\phi : U \rightarrow U\}$ , cerrada bajo la composición, es un homeomorfismo de un monoide aditivo  $A$  (un semigrupo con unidad) a la familia  $\mathcal{F}$ . Es decir,  $T$  es una aplicación

$$\begin{aligned} T : (A, +) &\rightarrow (\mathbb{F}, \circ) \\ t &\rightarrow T(t) = \phi_t \end{aligned}$$

que cumple

- 1-  $\phi_0$  es la función identidad en  $\mathbb{F}$ ,
- 2-  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ , si  $s, t \in A$ .

Si además se tiene que para cada  $x_0 \in U$ , la función  $t \rightarrow \phi_t(x_0)$  es continua en  $A$ , diremos que  $T = \{\phi_t\}_{t \in A}$  es un **semigrupo continuo** en  $\mathcal{F}$ .

El siguiente teorema asegura la existencia del generador infinitesimal de un semigrupo uni-paramétrico de funciones analíticas, y lo caracteriza cuando  $U$  es el disco unidad  $\mathbb{D}$ .

**Teorema 4.1. (Berkson & Porta, 1978)** Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un abierto,  $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$  un semigrupo uni-paramétrico de funciones analíticas de  $U$  en  $U$ . Entonces existe una función analítica  $G : U \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = G(\phi(z, t))$$

para  $t \in A, z \in U$ .

**Definición 4.5.** A la función  $G$  asociada al semigrupo, se le denomina el **generador infinitesimal** del semigrupo.

Note que  $G(z) = \frac{\partial \phi_t(z)}{\partial t} |_{t=0}$ .

### 4.3.2. Familias de evolución

La noción de familias de evolución está relacionada con la de operador de evolución débil y la de semigrupo uniparamétrico continuo.

**Definición 4.6.** Una familia  $\{\varphi_{s,t}\}_{0 \leq s \leq t < +\infty}$  de funciones holomorfas de  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es una **familia de evolución de orden  $d$**  con  $d \in [0, +\infty]$  (o una  $L^d$ -familia de evolución) si:

- (i)  $\varphi_{s,s} = id_{\mathbb{D}}$ .
- (ii)  $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$  para todo  $0 \leq s \leq u \leq t < +\infty$ .
- (iii) Para todo  $z \in \mathbb{D}$  y todo  $T > 0$  existe una función no negativa  $k_{z,T} \in L^d([0, T]; \mathbb{R})$  tal que para todo  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ ,

$$|\varphi_{s,u}(z) - \varphi_{s,t}(z)| \leq \int_u^t k_{z,T}(\xi) d\xi$$

Dado que si  $d' > d$  entonces  $L^{d'}([0, T]; \mathbb{R}) \subset L^d([0, T]; \mathbb{R})$ , vemos que toda familia de evolución de orden  $d$  es también una familia de evolución de orden  $d'$ .

Como mencionamos, las familias de evolución están relacionadas con los semigrupos continuos, ya que, si  $T(t)$  es un semigrupo, entonces para  $s < t$  el operador  $\varphi_{s,t} = T(t-s)$  es una familia de evolución. La cuestión es que no para toda familia de evolución existe un semigrupo continuo de traslación.

Algunas propiedades de las familias de evolución en  $\mathbb{D}$ . Sea  $(\varphi_{s,t})$  una familia de evolución de orden  $d \geq 1$  en  $\mathbb{D}$ .

- 1- Para cada  $0 < T < +\infty, 0 < r < 1$  existe  $R = R(r, T)$  tal que para todo  $s, t$   $0 \leq s \leq t \leq T$  se tiene que  $|\varphi_{s,t}(z)| \leq R$  para  $|z| \leq r$ .
- 2- Para todo  $z \in \mathbb{D}$  y todo  $s \geq 0$ , la aplicación  $t \rightarrow \varphi_{s,t}(z) \in \mathbb{C}$ , con  $t \in [s, \infty)$ , es localmente absolutamente continua, es decir, para todo  $T > s$  la aplicación  $t \rightarrow \varphi_{s,t}(z) \in \mathbb{C}$ , con  $t \in [s, T]$ , es absolutamente continua.
- 3- Para todo  $z \in \mathbb{D}$  y todo  $T > 0$ , la aplicación  $s \rightarrow \varphi_{s,T}(z) \in \mathbb{C}$ , con  $s \in [s, T]$ , es absolutamente continua.

#### 4.4. Espacio alcanzable

Tratemos el concepto de alcanzabilidad y controlabilidad a partir de este enfoque cualitativo.

**Definición 4.7.** Para  $t \geq 0$ , un sistema de control  $\mathbb{F} \subset L^1([0, t]; \mathcal{H}(\mathbb{D} \times G))$  y una función analítica  $f_0 : \mathbb{D} \rightarrow G$ , definimos el **conjunto alcanzable** de  $\mathbb{F}$  en un tiempo  $t$  desde  $f_0$ , como

$$\mathcal{R}_t(f_0, \mathbb{F}) := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \exists h \in \mathbb{F} \text{ tal que } f(z) \equiv w(z, t; 0; f_0; h)\} \quad (36)$$

y el **conjunto controlable** de  $\mathbb{F}$  en un tiempo  $t$ , como

$$C_t(f, \mathbb{F}) := \{f_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \exists h \in \mathbb{F} \text{ tal que } f(z) \equiv w(z, t; 0, f_0; h)\} \quad (37)$$

Hay cierta dualidad entre la noción de conjunto alcanzable y la de conjunto controlable. Básicamente los conjuntos controlables son los conjuntos alcanzables del sistema de control  $\widetilde{\mathbb{F}}$  cuyas trayectorias son las de  $\mathbb{F}$  pero recorridas en dirección opuesta. El conjunto alcanzable hasta un tiempo  $T > 0$  se define como

$$\mathcal{R}_{\leq T}(f_0, \mathbb{F}) := \bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{R}_t(f_0, \mathbb{F}_t) \quad (38)$$

Es importante resaltar la relación intrínseca que existe entre la definiciones 4.7 y 3.9. Notemos que en ambas, la idea es considerar los elementos del espacio que pueden ser alcanzados desde el origen, es decir, desde  $f_0$  o desde  $z = 0$  en un determinado tiempo. Como vemos, en la definición 3.9, la clausura de  $\mathcal{R}$  determina si hay controlabilidad aproximada; así, en virtud de la analogía, entre ambas definiciones, podemos decir que si

$\mathcal{R}_t(f_0, \text{extr}(\Omega))$  es denso en  $\mathcal{R}_t(f_0, \Omega)$  para algún  $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ , entonces el sistema (34) es aproximadamente controlable. En Roth (1998) se demuestra que si  $\Omega \subset \mathcal{H}(\mathbb{D} \times G)$  es una familia compacta y convexa, entonces los conjuntos alcanzables  $\mathcal{R}_T(f_0, \Omega)$  y  $\mathcal{R}_{\leq T}(f_0, \Omega)$  son compactos para cada  $T > 0$ , de donde se tiene como consecuencia que, en ese caso,  $\mathcal{R}_T(f_0, \Omega) = \overline{\mathcal{R}_T(f_0, \text{extr}(\Omega))}$  para cada  $T > 0$ .

## 5. EJEMPLOS. APLICACIONES

### 5.1. El control en espacios de Hilbert. La jerarquía *KP*-discreta

En este ejemplo se conectan los sistemas integrables con la teoría de control de sistemas lineales de dimensión infinita, (López-Reyes et al., 2013). Este tipo de trabajo tiene antecedentes en Brockett & Faybusovich (1991), Nakamura (1991), Felipe & López-Reyes (2008), entre otros. El ejemplo muestra cómo se establece una relación entre las soluciones de la jerarquía *KP*-discreta y una familia parametrizada de sistemas lineales aproximadamente controlables y aproximadamente observables. También demuestra que la correspondiente familia de funciones de transferencia puede ser expresada como una familia de funciones de variable compleja, que se representan como series de Laurent de potencias negativas.

La jerarquía *KP*-discreta es un sistema integrable, cuya ecuación es

$$\frac{\partial L(\mathbf{t})}{\partial t_k} = [L_{\geq}^k(\mathbf{t}), L(\mathbf{t})], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

Sus soluciones son matrices de dimensión infinita, de la forma

$$L(\mathbf{t}) = \Lambda + \sum_{k \geq 0} A_k(\mathbf{t})(\Lambda^T)^k = S(\mathbf{t})\Lambda S^{-1}(\mathbf{t}) \quad (40)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz infinita que tiene unos en la primera diagonal por encima de la diagonal principal y ceros en el resto de las entradas.  $\Lambda^T$  indica su transpuesta.

La familia (41) de sistemas  $\Sigma(\widehat{L}(\mathbf{t}), B(\mathbf{t}), C(\mathbf{t}))$  lineales parametrizados, con parámetro  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ , es definida como

$$\dot{x}(\tau) = \widehat{L}(\mathbf{t})x(\tau) + B(\mathbf{t})v(\tau), \quad y(\tau) = C(\mathbf{t})x(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (41)$$

tal que, para cada valor de  $\mathbf{t}$ , el generador infinitesimal  $\widehat{L}(\mathbf{t})$  del sistema está relacionado con una solución  $L(\mathbf{t})$  de la jerarquía. Esta relación se establece a partir de dos elementos:

(i) Una versión en  $l^2(-\infty, +\infty; \mathbb{C})$  de la matriz (40), donde  $l^2(-\infty, +\infty; \mathbb{C})$  denota el espacio de Hilbert de sucesiones doblemente infinitas  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  con  $a_n \in \mathbb{C}$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . De manera similar, consideramos  $l^2(0, +\infty; \mathbb{C})$  como el espacio de sucesiones infinitas  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  para las cuales  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . Usaremos la notación común  $l^2(\mathbb{C})$  para ambos casos:  $l^2(-\infty, +\infty; \mathbb{C})$  y  $l^2(0, +\infty; \mathbb{C})$ .

(ii) Una factorización (Felipe & Ongay (2001)) de la solución  $L(\mathbf{t}) = S(\mathbf{t})\Lambda S^{-1}(\mathbf{t})$ , en virtud de la cual se definen los operadores de control y observación  $B(\mathbf{t}) = \widehat{Y}(\mathbf{t})B$  y  $C(\mathbf{t}) = C\widehat{S}^{-1}(\mathbf{t})$ , respectivamente, donde

$B(\mathbf{0}) = B$  y  $C(\mathbf{0}) = C$ , siendo  $B$  y  $C$  los operadores de control y observación del sistema  $\Sigma(\widehat{\Lambda}, B, C,)$  aproximadamente controlable y aproximadamente observable, (López-Reyes et al., 2013), definido como:

$$\dot{x}(\tau) = \widehat{\Lambda}x(\tau) + Bv(\tau), \quad y(\tau) = Cx(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad (42)$$

donde  $\widehat{\Lambda}$  es el generador infinitesimal del  $c_0$ -semigrupo  $T(\tau) = e^{\tau\widehat{\Lambda}}$ ,  $Cx = \langle c, x \rangle$  y  $B$  es el operador diagonal autoadjunto

$$Bv = \sum_{n \geq 0} b_n \langle v, e_n \rangle e_n, \quad b_n \in l^2(\mathbb{R}).$$

donde  $\{e_n\}$  es la base canónica de  $l^2(\mathbb{R})$

**Teorema 5.1.** (López-Reyes et al., 2013) (41) es una familia de sistemas aproximadamente controlables y aproximadamente observables en  $[0, \beta]$  para todo  $\beta > 0$ .

La familia de funciones de transferencia parametrizadas de (41) está dada por las series de potencias negativas en  $z$ ,

$$f(z, \mathbf{t}) = C(\mathbf{t})(\bar{z}I - \widehat{L}(\mathbf{t}))^{-1}B(\mathbf{t})v = \sum_{n \geq 0} \frac{\widehat{U}_n(\mathbf{t})b_nv_n}{z^{n+1}},$$

donde

$$z \in \mathbb{C}, \quad |z| > \|\widehat{L}(\mathbf{t})\| = 1$$

Cuando  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$  entonces  $\widehat{U}(\mathbf{0})$  es un operador constante, por lo cual  $f(z, \mathbf{0}) = f(z)$ , que es precisamente la función de transferencia de (42):

$$f(z) = C(\bar{z}I - \Lambda)^{-1}Bv = \sum_{n \geq 0} \frac{b_nv_n}{z^{n+1}}$$

## 5.2. El control en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ . La ecuación de Loewner

En este ejemplo, una clase de funciones analíticas define el conjunto alcanzable de un sistema de control. Se revisa la controlabilidad aproximada de la ecuación de Loewner (Abate et al., 2010), mostrando que el conjunto  $\mathbb{S}^M$  de funciones univalentes acotadas (Duren, 1983; Pomemrenke, 1975), es un conjunto alcanzable de este sistema.

Sea la ecuación de Loewner

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(z, t) &= v(z, t) - v(z, t)p(e^{-t}v(z, t), t), & t \geq 0 \\ v(z, 0) &= z \end{aligned} \quad (43)$$

y su versión, la denominada ecuación diferencial radial de Loewner

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(z, t) &= -f(z, t) \frac{\lambda(t) + f(z, t)}{\lambda(t) - f(z, t)}, \\ f(z, 0) &= z \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \partial\mathbb{D}$  definida como  $\lambda(t) = g^{-1}(\psi(t), t)$  es una función continua que satisface que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z)$ ,  $|z| < 1$ , considerando convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{D}$ .

Es conocido que Loewner estudió un subconjunto denso de  $\mathbb{S} \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ , como el conjunto alcanzable del sistema de control (44), considerando para cada función  $f \in \mathbb{S}$  una función  $f(z, t)$  solución de la ecuación (44) (Goodman, 1968).

La ecuación (44) puede reescribirse en términos de la función inversa de  $f(z, t)$ ,  $g(z, t)$ , como

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt}(z, t) &= z \frac{\partial g}{\partial z}(z, t) \frac{\lambda(t) + z}{\lambda(t) - z}, \\ g(z, 0) &= z\end{aligned}\tag{45}$$

Intuitivamente, el significado de la expresión  $e^t f(z, t)$  puede interpretarse como el *movimiento continuo* a través del tiempo, desde el punto  $z$  hasta  $f(z)$ , cuya dinámica está regida por la ecuación (44).

Sea la familia de funciones univalentes acotadas

$$\mathbb{S}^M := \{f \in \mathbb{S} : |f(z)| < M \text{ para cada } z \in \mathbb{D}\}, \quad M \in [1, +\infty), \quad \mathbb{S}^\infty := \mathbb{S}$$

Como conjunto entrada consideraremos a  $\Omega = P$ , donde  $P$  es el conjunto de todas las funciones analíticas  $\phi$  en el disco unitario, tales que  $\operatorname{Re}(\phi) > 0$  y  $\phi(0) = 1$ .  $P$  es un conjunto compacto y convexo de  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  y su conjunto de puntos extremos es

$$\operatorname{extr}(P) = \left\{ \frac{\lambda + z}{\lambda - z} : \lambda \in \partial\mathbb{D} \right\}$$

Seleccionando  $p \in L^1([0, \infty); P)$  y haciendo  $v(z, t) := e^t w(z, t)$ , se tiene que el sistema (43) generaliza el sistema de control (44) en  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ .

Considerando las funciones  $p \in L^1([0, \infty); P)$  como las funciones control y denotando la solución del sistema (43) por  $v(z, t; 0, Id, p)$  y los conjuntos alcanzables en un tiempo  $t$  y hasta un tiempo  $t$  por  $\mathcal{R}_t(Id, P)$ ,  $\mathcal{R}_{\leq t}(Id, P)$ , respectivamente. El resultado probado por Loewner queda reformulado como sigue:

**Teorema 5.2. (Roth, 1998)** *Sea  $M \in [1, \infty]$ , entonces el conjunto alcanzable en un tiempo  $\log M$  y el conjunto alcanzable hasta un tiempo  $\log M$  de la ecuación radial de Loewner (44) es denso en  $\mathbb{S}^M$ , es decir,*

$$\overline{\mathcal{R}_{\log M}(Id, \operatorname{extr}(P))} = \overline{\mathcal{R}_{\leq \log M}(Id, \operatorname{extr}(P))} = \mathbb{S}^M$$

Este teorema nos permite concluir que la ecuación diferencial de Loewner es aproximadamente controlable y que como los conjuntos  $\mathcal{R}_{\log M}(Id, P)$  y  $\mathcal{R}_{\leq \log M}(Id, P)$  son compactos, entonces

$$\mathcal{R}_{\log M}(Id, P) = \mathcal{R}_{\leq \log M}(Id, P) = \mathbb{S}^M \quad \square$$

## 6. CONCLUSIONES

Se revisaron algunos aspectos cualitativos del control en sistemas dinámicos en espacios con deseables propiedades geométrico-algebraicas, como los espacios de Hilbert y en el espacio de Frechét  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ , cuya estructura topológica es diferente, en este caso, por ejemplo, una métrica no necesariamente proviene de una norma.

En el estudio de la controlabilidad en el caso de espacios de Hilbert, se relacionó el enfoque espacio-estado y el enfoque dominio-frecuencia con la teoría de realización, para el problema de Cauchy, que describe el sistema, y su solución. En el caso del espacio de Frechét,  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ , en el estudio del control, se abordó el problema de Cauchy y su solución, definido sobre familias de evolución, definidas en ciertas clases de funciones analíticas.

De esta manera, se ilustra la dependencia del estudio del Control (de la naturaleza del problema matemático a abordar), de los conjuntos donde se define la trayectoria del sistema dinámico.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto del Sistema Universitario de Investigaciones de la Universidad de Antioquia, denominado *Dos problemas relacionados con el Control en espacios de Hilbert y en el espacio Np(D)* (Acta No.701). La autora agradece a los revisores por su contribución al mejoramiento del artículo.

## Referencias

- Abate, M.; Bracci, F.; Contreras, M. & Díaz-Madrigal, S. (2010). The evolution of Loewner's differential equation. *Eur. Math. Soc. Newslett.* 78(31-38).
- Akhiezer, N. & Glasman, I. (1998). *Theory of linear operators in Hilbert spaces*. New York: Dover Publications, Inc.
- Bensoussan, A.; Da Prato, G.; Delfour, M. & Mitter, S. (2007). *Representation and control of infinite dimensional Systems*. Boston: Birkhauser.
- Berkson, E. & Porta H. (1978). Semigroups of analytic functions and composition operators. *The Michigan Mathematical Journal*, 25(1), 101-115.
- Brockett, R. & Faybusovich, L. (1991). Toda flows, inverse spectral transform and realization theory. *System and Control Letters*, 16(2), 79-88.
- Caratheodory, C. (1932). *Conformal representation*. Cambridge University Press.

Chicone, C. & Latushkin, Y. (1999). *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*. American Mathematical Soc.

Curtain, R.F. & Pritchard, A. (1977). *Functional analysis in modern applied mathematics*. London-New York: Academic Press.

Curtain R. & Zwart H. (1995). *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Texts in Applied Mathematics 21, New York: Springer-Verlag. Springer-Verlag. (MR1351248) [978-1-4612-8702-5]

Duren, P. (1983). *Univalent functions*. New York: Springer-Verlag.

Felipe, R. & López-Reyes, N. (2008). The finite discrete KP hierarchy and the rational functions. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. Article ID 792632, doi:10.1155/2008/792632.

Felipe, R. & Ongay, F. (2001). Algebraic aspects of the discrete KP hierarchy. *Linear Algebra and Its Applications*, 338(1-3), 1-17. (MR1701286) [10.1016/S0024-3797(99)00025-1]

Fuhrmann, P. (1973). On obsevability and stability in infinite-dimensional linear systems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 12(2), 173-181.

Fuhrmann, P. (1973). Realization theory in Hilbert spaces for a class of transfer function. *Journal of Functional Analysis*, 18(4) 338-349.

Goluzin, G. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable*. Providence: American Mathematical Soc.

Goodman, G. (1968). *Univalent functions and Optimal Control*. Tesis Doctoral, Stanford University.

Hille, E. & Phillips, R. (1948). *Functional analysis and semigroups*. New York:American Mathematical Soc.

Jacob, B. & Zwart, H. (2002). An review on realization theory for infinite-dimensional systems. Disponible en: <http://www.math.utwente.nl/twhans>.

Jurdjević, V. (1997). *Geometric Control Theory*. Cambridge: University Press.

Markushevich, A. (2005). *Theory of functions of a complex variable*. Rhode Island: AMS Chelsea Pub.

López-Reyes, N.; Felipe, R. & Castro, T. (2013). The discrete KP hierarchy and the negative power series on the complex plane. *Computational and Applied Math*, 32(3), 483-493. (MR3120135) [10.1007/s40314-013-0031-9]

Nakamura, Y. (1991). Geometry of rational functions and nonlinear integrable systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22(6), 1744-1754. (MR1129408) [10.1137/0522108]

- Pazy, A. (1992). *Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations*. New York: Springer-Verlag.
- Pomemrenke, C. (1975). *Univalent Functions*. Gottingen: Vanderhoeck and Ruprecht.
- Roth, O. (1998). *Control theory in H(D)*. Tesis Doctoral. Der Bayerischen Julius-Maximilians-Universitat Wurzburg.
- Shoikhet, D. (2001). *Semigroups in Geometrical Function Theory*. Kluwer Academic Publishers.
- Zwart, H. (2004). Transfer functions for infinite-dimentional systems. *Systems and Control Letters*, 52(3), 247-255. (MR2062597) [10.1016/j.sysconle.2004.02.002]