# LA REVOLUCIÓN FREGEANA EN LÓGICA[1]

Donald Gillies
University College London - Inglaterra
donald.gillies@ucl.ac.uk
Traducción de Marcela del Pilar Gómez y Angel Rivera Novoa
Universidad Nacional de Colombia

## 1. Introducción

En este artículo, argumento que los trabajos de Frege en lógica iniciaron una revolución en esta materia. Ciertamente, la frase "la revolución fregeana en lógica" puede ser entendida en el mismo sentido que "la revolución copernicana en astronomía", en tanto que Copérnico empezó la revolución pero no la completó. La revolución copernicana comenzó con la publicación de *De revolutionibus* de Copérnico en 1543. Esta obra inició una serie de cambios fundamentales en astronomía, aunque el periodo revolucionario no culminó sino hasta la publicación de los *Principia* en 1687 y el establecimiento de la síntesis newtoniana. Análogamente, la revolución de Frege comenzó con la publicación, en 1879, del *Begriffsschrift*[2]. Las opiniones acerca de cuándo terminó el periodo revolucionario en lógica difieren; sin embargo, veo la publicación de los teoremas de incompletitud de Gödel en 1931 como su forma de culminación natural. Jean van Heijenoort, en la edición de su famosa colección *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic* (1879-1931), reconoce este periodo como uno natural en la historia de la lógica. Pero no lo describe como una revolución, sino como "una gran época en la historia de la lógica" (Heijenoort 1967 vi).

Existen interesantes paralelos entre las revoluciones de Copérnico y de Frege. Por ejemplo, *De revolutionibus* de Copérnico fue un libro altamente técnico leído por unos pocos expertos, lo que no le resta de ninguna manera su enorme influencia indirecta en el desarrollo posterior de la astronomía. Lo mismo podría decirse del *Begriffsschrift* de Frege. En ambas revoluciones, ideas filosóficas han influenciado fuertemente desarrollos técnicos. Podemos mencionar el pitagorismo para Copérnico y el logicismo para Frege. Así pues, en ambos casos, los avances teóricos han suministrado aplicaciones prácticas importantes; la nueva astronomía formó la base de una mejorada navegación, mientras la nueva lógica es todavía usada para importantes avances en ciencias de la computación.

En 1957, Kuhn publicó un estudio histórico de la revolución copernicana y posteriormente, en *La estructura de las revoluciones científicas* (1962), realizó un análisis general de las revoluciones en ciencia. Para Kuhn, en ese momento, una revolución científica consistía en un cambio de paradigma. Así, antes de la revolución copernicana, la cosmología fue dominada por un paradigma que no reunía consistentemente la física aristotélica y la astronomía ptolemaica. Después de la revolución, la cosmología pasó a ser dominada por un paradigma que reunía la mecánica newtoniana y la

[1] Gillies, D. "The Fregean Revolution in Logic", en *Revolutions in Mathematics* [en adelante *RM*], ed. Gillies, D. Oxford: Oxford University Press, 1995. Traducción realizada y publicada con permiso expreso del autor y de la editorial. Agradecemos a la profesora Clara Helena Sánchez su valiosa colaboración durante el desarrollo de esta traducción. A menos que se indique lo contrario, todas las citas son traducciones nuestras.

[2] *Begriffsschrift* quiere decir literalmente "escritura conceptual". A lo largo de este artículo utilizo la traducción de T. W. Bynum de 1972. Bynum tradujo *Begriffsschrift* como "notación conceptual" [*conceptual notation*]; no obstante, utilizaré constantemente el título original en alemán.

astronomía copernicana en una síntesis consistente desarrollada por Kepler. Podemos analizar la revolución fregeana de la misma manera: antes de la revolución, en la lógica imperaba el paradigma aristotélico, cuyo centro era la teoría del silogismo; luego de la revolución, la lógica pasó a ser dominada por el paradigma fregeano cuyo centro fue el cálculo proposicional y el cálculo de predicados de primer orden.

En la segunda sección de este artículo, discutiré ampliamente el concepto kuhniano de paradigma y además argumentaré detalladamente que dicho concepto es apropiado para analizar la revolución de Frege en lógica.[3] Por el momento, sin embargo, quisiera señalar que, aun aceptando en términos generales el análisis de las revoluciones de Kuhn, hay dos rasgos de su noción de paradigma que quisiera modificar.[4]

El primero de estos rasgos es el controversial concepto de *inconmensurabilidad*, el cual fue introducido por Kuhn y Feyerabend, y luego desarrollado fuertemente y con gran entusiasmo por este último. De acuerdo con mi diccionario, inconmensurabilidad significa "incapacidad de ser juzgado, medido, o considerado comparativamente". Ahora bien, me parece que los paradigmas pueden ser considerados y juzgados comparativamente y ciertamente esto sucede todo el tiempo. En una revolución científica, el antiguo paradigma es comparado con el nuevo y juzgado dentro del campo de lo perfectamente racional como inferior.

Pero mientras 'inconmensurabilidad' me parece un término bastante fuerte, es verdad que tanto el viejo paradigma como el nuevo son formulados en lenguajes diferentes, por lo cual es necesario llevar a cabo una traducción del uno al otro. En esta traducción saldrán a la luz varias ambigüedades y dificultades, pero considero que eso no es ningún problema que haga de la comparación algo imposible. Aunque un mismo término aparezca en ambos paradigmas, seguramente tendrá significados diferentes en sus respectivos contextos. Para dar un simple ejemplo, 'planeta' en el paradigma copernicano tiene un significado diferente al que posee en el paradigma ptolemaico. En este último, el Sol es un planeta y la Tierra no lo es; a su vez, en el paradigma copernicano, es la Tierra la que es considerada como un planeta mientras el Sol no. Tales cambios de significado (y, por supuesto, pueden darse algunos ejemplos más sutiles y complicados) ciertamente causan confusión y falta de comunicación entre los expositores de los distintos paradigmas. No obstante, estas dificultades se pueden superar y una comparación de los méritos de los diferentes paradigmas en el mismo campo es perfectamente plausible. Así, es posible, y realmente sencillo, comparar la lógica aristotélica con la fregeana y pocos negarán el gran poder y superioridad general de la lógica de Frege.

El segundo rasgo de la noción de Kuhn que necesita precisarse es su pretensión de que un nuevo paradigma surge en un "chispazo de intuición". Así es como Kuhn mismo pone su visión de la génesis

3 De manera más general, encuentro las ideas de Kuhn muy útiles para el entendimiento del desarrollo de la lógica y las matemáticas tal como ocurre en la ciencia. He tenido esta influencia al adoptar este punto de vista por parte de Mehrtens (*RM* cap. 2) y Kitcher (1983) aunque el uso que hago de los conceptos de Kuhn difiere del de ellos.

4 La siguiente discusión acerca de la inconmensurabilidad, el cambio *Gestalt* y demás, debe un agradecimiento a las conversaciones con Colin Howson y Arthur Miller. El ejemplo de la mecánica cuántica es tomado de Miller, aunque debe decirse que éste no gusta del uso de la estructura kuhniana, ni siquiera en una forma modificada, para su análisis de la ciencia. Su propia visión acerca de estas cuestiones se encuentra en "Redefining Visualizability", capítulo 4 de *Image in Scientific Thought* (1984) y en "Have Inconmensurability and Causal Theory of Reference Anything to Do with Actual Science? Inconmensurability, No; Causal Theory, Yes" (1991).

de los paradigmas en “Las revoluciones como cambios del concepto de mundo”, capítulo 10 de *La estructura de las revoluciones científicas:*

> [L]a ciencia normal conduce sólo, en último análisis, al reconocimiento de anomalías y a [las] crisis. Y éstas se terminan, no mediante deliberación o interpretación, sino por un suceso relativamente repentino y no estructurado, como el cambio de forma (*Gestalt*). Entonces, los científicos hablan con frecuencia de las “vendas que se les caen de los ojos” o de la “iluminación repentina” que “inunda” un enigma previamente oscuro, permitiendo que sus componentes se vean de una manera nueva que permite por primera vez su resolución. En otras ocasiones, la iluminación pertinente se presenta durante el sueño. Ningún sentido ordinario del término ‘interpretación’ se ajusta a esos chispazos de la intuición por medio de los que nace un nuevo paradigma. (Kuhn 1962 192-193)

Ahora bien, es cierto que en algunos casos los paradigmas surgen de esta manera. El ejemplo más convincente que conozco es uno que me sugirió Arthur Miller. Si consideramos el modelo atómico de Bohr como un paradigma, y la mecánica cuántica como el nuevo paradigma que lo reemplazó, entonces realmente parece que las ideas básicas de la nueva mecánica cuántica llegaron a Heisenberg, si no en una iluminación repentina, al menos en unos pocos meses de inspiración febril. En general, sin embargo, un nuevo paradigma es producido en un largo periodo de tiempo y su proceso puede contener chispazos de inspiración, pero al mismo tiempo envolver largos periodos de investigación sistemática y esmerada. Por lo tanto, sugiero reemplazar la teoría demasiado romántica de Kuhn sobre el nacimiento de los paradigmas, por una visión más prosaica. Ésta se construirá usando el concepto de *programa de investigación* desarrollado en la escuela popperiana. Los conceptos de ‘paradigma’ y de ‘programa de investigación’ son tomados a veces como más o menos equivalentes. Mi objetivo es mostrar que si bien esto no es exacto, los dos conceptos, fuertemente distintos, se conectan de formas importantes. En particular, mi tesis será que el trabajo en un programa de investigación llevado a cabo por un pequeño grupo, o en últimas por un sólo individuo, dará como resultado un nuevo paradigma. Este asunto es considerado en detalle en la sección 4, donde muestro que fue en la obra de Frege, dentro de su programa de investigación logicista en los fundamentos de la matemática, donde se originó la nueva lógica. De manera interesante, Peano condujo parte del camino de la nueva lógica trabajando en un programa de investigación diferente, pero al mismo tiempo similar. Boole, por otra parte, trabajó en un programa de investigación que no condujo —y tal vez no podía hacerlo— a la nueva lógica. Los programas de investigación de Frege y de Peano tuvieron consecuencias revolucionarias, mientras que el de Boole llevó a importantes, pero no revolucionarios, avances.

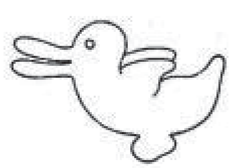


Fig. 1

Habiendo criticado estos dos rasgos de la noción kuhniana de paradigma (inconmensurabilidad y nacimiento de los paradigmas en un “chispazo de intuición”), me permito ahora sopesar otros elementos considerados característicos de la noción de Kuhn que defiendo, tal vez de manera más fuerte que Kuhn mismo. Éste compara el cambio de un paradigma a otro con un cambio de forma *Gestalt*. Considerando, por ejemplo, el famoso pato-conejo (fig. 1), éste puede ser visto bien sea como un pato mirando a la izquierda, o como un conejo mirando hacia arriba.

Un cambio *Gestalt* ocurre cuando uno deja de ver el dibujo en un sentido y empieza a verlo en otro. La sugerencia de Kuhn es que esto es análogo al cambio ocurrido de la consideración de un fenómeno en términos de un paradigma a la consideración del mismo en términos de otro paradigma. Esta analogía me parece afortunada; sin embargo, Kuhn expresa una duda acerca de su precisión en el siguiente pasaje del capítulo 8 de su libro *La respuesta a la crisis*:

> [E]l científico no preserva la libertad del sujeto para pasar repetidas veces de uno a otro modo de ver las cosas. Sin embargo, el cambio de forma, sobre todo debido a que es muy familiar en la actualidad, es un prototipo elemental para lo que tiene lugar en un cambio de paradigma a escala total. (Kuhn 1998 140)

Sin embargo, es un hecho que el científico preserva la libertad de cambiar su posición, hacia atrás o hacia delante, entre paradigmas. Nada es más común que considerar un problema particular primero en términos de la mecánica newtoniana y luego en términos de la mecánica relativista. O de nuevo, conferencistas en la historia de la ciencia (como el presente autor) a veces consideran un fenómeno particular (retrocesos, dicen) primero en términos de la astronomía ptolemaica y después en términos de la astronomía copernicana. Tal consideración del mismo fenómeno, dentro de dos paradigmas diferentes, es a menudo útil y esclarecedora.

Es hora de considerar la objeción realizada por Crowe en su artículo "Ten 'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics" de 1975 (*RM* 15-20) acerca de la posibilidad de las revoluciones en matemáticas. Su punto es que "[...] una característica necesaria de una revolución es que algunas entidades previamente existentes (bien sea el rey, constitución o teoría) deben ser revocadas e irremediablemente desechadas" (*RM* 19).

Discutí esta dificultad en la introducción del mencionado libro e intenté responderla a lo largo de las líneas sugeridas por Dauben en "Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge" (*RM* 49-71). La idea fue distinguir dos tipos de revolución, llamadas, usando analogías históricas, revoluciones *rusas* y revoluciones *franco-británicas*. Las primeras satisfacen la condición de Crowe de que algo es "revocado e irremediablemente desechado". En la Revolución Rusa ese "algo" fue el zar. Por otra parte, en las revoluciones franco-británicas ese "algo" no es "revocado ni irremediablemente desechado", sino que simplemente pierde su antigua importancia. Las revoluciones tanto en Francia como en Gran Bretaña fueron contra la monarquía, pero el monarca fue, después de algunos años, restaurado (aunque con poderes significativamente disminuidos). Con respecto a la ciencia, la revolución copernicana fue una revolución rusa, pues la física aristotélica y la astronomía ptolemaica fueron efectivamente "revocadas e irremediablemente desechadas". La revolución einsteiniana, sin embargo, fue una revolución franco-británica, ya que la mecánica newtoniana ha sido conservada como una aproximación ampliamente aplicable (aunque ha perdido algo de su antigua importancia). Mi visión general es que hay revoluciones en matemáticas, pero son más de tipo franco-británico que ruso.

Aplicando ahora este razonamiento a la revolución fregeana en lógica, mostraré que esta revolución tiene muchos puntos en común con la revolución einsteiniana, pero en algunos otros está más cerca de la revolución rusa que la einsteiniana. Como veremos, la validez de algunos de los silogismos que eran tradicionalmente aceptados se derrumbó únicamente con el advenimiento del desarrollo de la nueva lógica. Fue Peano, más que Frege, quien hizo este descubrimiento. Esto es análogo con el descubrimiento de que la mecánica newtoniana se derrumba cuando las velocidades se acercan a la velocidad de la luz y en campos gravitacionales muy fuertes. De todas formas, con algunas restricciones adicionales, la lógica aristotélica —como la mecánica newtoniana— continúa siendo válida. Sin embargo, la mecánica newtoniana es rutinariamente enseñada y continúa siendo ampliamente utilizada. La lógica aristotélica, por otra parte, es con frecuencia omitida completamente en los textos modernos de lógica, mientras poca gente se molesta en examinar un argumento en forma silogística. Así pues, la lógica aristotélica ha sido mucho más descartada que la mecánica newtoniana. La cuestión del viejo paradigma de la lógica aristotélica en relación con el nuevo paradigma de la lógica de Frege es considerada con más detalle en la sección 3.

En los primeros capítulos del libro *Revolutions in Mathematics*, algunas otras características importantes de las revoluciones en matemáticas son exploradas. Dunmore en "Meta-Level Revolutions in Mathematics" (*RM* 209-225) considera el tema de los cambios de meta-nivel, mientras que Dauben, en "Ten 'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics" (*RM* 15-20), y Giorello, en "The 'Fine Structure' of Mathematical Revolutions: Metaphysics, Legitimacy and Rigour. The Case of the Calculus from Newton to Berkeley and MacLaurin" (*RM* 134-168), señalan la importancia de la resistencia a las innovaciones; esto puede, en algunos casos, ser aplicado en la descripción de contra-revoluciones. En la sección 5 de este artículo, examinaré estas características con respecto a la presunta revolución fregeana. De ese examen resulta que se presentan ambas características —cambios de meta-nivel y algunas llamativas resistencias a las innovaciones de Frege— lo cual constituye más evidencia para la argumentación de que realmente hubo una revolución fregeana en lógica.

## 2. Frege y el nuevo paradigma en lógica

'Paradigma' fue un nuevo término introducido por Kuhn en la filosofía de la ciencia, pero muchos autores lo han criticado por ser vago y ambiguo. Shapere, por ejemplo, en su reseña de *La estructura de las revoluciones científicas*, va tan lejos como para afirmar que el relativismo de Kuhn es "un amasijo lógico de confusiones conceptuales [...] debido, primeramente, al uso de un término comodín [paradigma]" (1964 393). En su artículo de 1970 "The Nature of a Paradigm", Masterman es bastante comprensiva con Kuhn, aun cuando dice: "según mis cuentas, él usa 'paradigma' en no menos de veintiún sentidos distintos [en Kuhn 1962], tal vez más, no menos" (1970 61). Ella entonces procede a enumerar los ventiún sentidos. Kuhn ha tomado muy en serio estas críticas y en su artículo "Segundos pensamientos sobre paradigmas" (1974), sugiere reemplazar 'paradigma' por dos nuevos conceptos llamados 'matriz disciplinar' y 'ejemplar'.

A pesar de las dudas posteriores de Kuhn, el término 'paradigma' se ha tornado extremadamente popular entre los pensadores de la filosofía de la ciencia y, según creo, justamente por una observación de Aristóteles en un famoso pasaje:

> Nuestra exposición será suficientemente satisfactoria si es presentada tan claramente como lo permite la materia; porque no se ha de buscar el mismo rigor en todos lo razonamientos [...] porque es propio del hombre instruido buscar la exactitud en cada materia en la medida en que la admite la naturaleza del asunto. (*Ética Nicomáquea* I iii 1094b)

Aunque la noción de paradigma no es realmente muy precisa, bajo mi criterio, tiene justo el grado perfecto de precisión que requiere la materia, esto es, el análisis de las revoluciones en ciencia y matemáticas.

En *La estructura de las revoluciones científicas*, Kuhn introduce la noción de paradigma de la siguiente manera:

> [E]sas realizaciones que alguna comunidad científica particular reconoce, durante cierto tiempo como fundamento para su práctica posterior [...] son relatadas, aunque raramente en su forma original, por los libros de texto científicos, tanto elementales como avanzados. Esos libros de texto exponen el cuerpo de la teoría aceptada, ilustran muchas o todas sus aplicaciones apropiadas y las comparan con experimentos y observaciones de condición ejemplar. Antes de que esos libros se popularizaran, a comienzos del siglo XIX (e incluso en tiempos más recientes, en las ciencias que han madurado últimamente), muchos de los libros clásicos famosos de ciencia desempeñan una función similar. La *Física* de Aristóteles, el *Almagesto* de Ptolomeo, los *Principia* y la *Óptica* de Newton, la *Electricidad* de Franklin, la *Química* de Lavoisier y la *Geología* de Lyell —éstas y muchas otras obras sirvieron implícitamente durante cierto tiempo para definir los problemas y métodos legítimos de un campo de la investigación para generaciones sucesivas de científicos—. Estaban en condiciones de hacerlo así debido a que compartían dos características esenciales. Su logro carecía suficientemente de precedentes como para haber podido atraer a un grupo duradero de partidarios, alejándolos de los aspectos de competencia de la actividad científica. Simultáneamente eran lo suficientemente incompletas como para dejar muchos problemas para ser resueltos por el redelimitado grupo de científicos. Voy a llamar, de ahora en adelante, a las realizaciones que comparten esas dos características, 'paradigmas'. (Kuhn 1962 33-34)

Deseo particularmente llamar la atención sobre la conexión que Kuhn realiza en este pasaje entre paradigmas y libros de texto. Desde principios del siglo XIX, los paradigmas han sido, según Kuhn, generalmente enseñados por medio de los libros de texto. También afirma que antes del siglo XIX muchos de los famosos clásicos de la ciencia cumplían una función similar, pero me parece que tal vez Kuhn exagera la diferencia entre libros de texto y clásicos de la ciencia y, correspondientemente, la diferencia entre lo que pasa hoy y lo que sucedía antes del siglo XIX. De los clásicos que menciona, algunos no fueron de hecho usados para enseñar a los estudiantes un paradigma, mientras que otros fueron usados y podían ser reconocidos en todo intento y propósito como libros de texto. Así, los *Principia* de Newton no fueron el texto canónico de la mecánica newtoniana para la corriente principal de los matemáticos del siglo XVIII, ya que dichos matemáticos preferían una aproximación más analítica y menos geométrica que la newtoniana. El *Almagesto* de Ptolomeo fue realmente un clásico de la ciencia, pero también fue un libro de texto que expone los frutos de los trabajos tempranos, aunque sin duda con muchas adiciones interesantes de Ptolomeo mismo. La *Física* de Aristóteles fue en realidad usada como un libro de texto en las universidades medievales.

Propongo, por lo tanto, que abandonemos la diferencia entre clásicos de la ciencia y libros de texto e introduzcamos lo que podríamos llamar el *criterio para paradigmas de los libros de texto*. La sugerencia es que, si un historiador desea identificar el paradigma de un grupo de científicos en un tiempo y lugar determinados, debe examinar los libros de texto que usan para enseñar a los novicios el conocimiento que necesitan para ser reconocidos completamente como miembros del grupo. Los contenidos de estos libros de texto definirán (más o menos) el paradigma aceptado por el grupo.[5] Este criterio de los libros de texto constituye, en mi opinión,

[5] Elliott Mendelson me señaló el hecho de que en los libros de texto se deben incluir los manuales de laboratorio (donde sea apropiado). Además, hay muchas cosas que pueden ser sólo aprendidas por instrucción informal, tanto en el laboratorio como en los problemas de una clase de matemáticas. Así, el criterio de los libros de texto es sólo aproximado.

una respuesta suficiente para aquellos que se quejan de la vaguedad de la noción de paradigma. El criterio de hecho permite a un historiador de la ciencia o de las matemáticas usar el término 'paradigma' de una forma bastante concreta y definida. Permítanme ahora ver cómo el criterio de los libros de texto se aplica a la revolución de Frege en lógica.

Ya antes había analizado cómo la revolución de Frege en lógica constituye un cambio del paradigma aristotélico, cuyo núcleo era la teoría del silogismo, al paradigma fregeano, cuyo centro son el cálculo de proposiciones y el cálculo de predicados de primer orden. Aplicando el criterio de los libros de texto, podemos encontrar que los libros del periodo prerrevolucionario exponen la lógica aristotélica enfatizando particularmente en la teoría del silogismo, mientras estos temas tendieron a desaparecer en los libros del periodo posrevolucionario, siendo remplazados por la descripción de los cálculos de proposiciones y de predicados de primer orden. Una revisión de los libros de lógica confirma esto.

Para un ejemplo de un libro de texto del periodo prerrevolucionario, no podemos hacer nada mejor que considerar *Studies and Exercises in Formal Logic* de John Neville Keynes (el padre del economista John Maynard Keynes), cuyas cuatro ediciones datan de 1884, 1887, 1894 y 1906. Así que estamos frente al que fue evidentemente un libro de lógica exitoso ente 1884 y 1906. ¿Pero realmente fue éste un periodo prerrevolucionario? ¿Acaso la revolución no inició con la publicación del *Begriffsschrift* en 1879? La respuesta es que la revolución efectivamente comenzó en 1879, pero muchos años pasaron antes de que el nuevo paradigma fuera formado propiamente, y muchos más aún antes de que sucediera al derrocado viejo paradigma. Realmente, si examinamos el libro de lógica de Keynes, encontramos que sus contenidos son completamente tradicionales y aristotélicos. En la segunda parte, capítulo 2, realiza el tradicional análisis sujeto/predicado de proposiciones, el capítulo 3 trata del cuadrado de los opuestos y en el capítulo 4 se ocupa de la teoría de las inferencias inmediatas. La parte tres es dedicada enteramente a los silogismos y constituye un 29% del total del libro. El libro no hace mención ni del cálculo de proposiciones, ni del cálculo de predicados de primer orden.

Incluso concediendo que un nuevo paradigma toma algún tiempo en establecerse, es sorprendente que un libro aparentemente tan anticuado tuviese una nueva edición en 1906. No obstante, en ese momento las cosas empezaban a cambiar; un indicador de esto es una reseña del libro de P. Coffey *The Science of Logic*, escrita por Wittgenstein (1912). El libro de Coffey es una exposición de la lógica tradicional en la misma línea que la de J. N. Keynes. El joven Wittgenstein, que en aquel momento era un alumno de Bertrand Russell en Cambridge, vitupera a Coffey en términos muy precisos:

> En ninguna rama del conocimiento puede un autor desconocer los resultados de una investigación honesta con tanta impunidad como puede hacerse en filosofía y lógica. A esta circunstancia debemos la publicación de un libro como *The Science of Logic* del Sr. Coffey; y únicamente como un típico ejemplo del trabajo de muchos lógicos hasta hoy este libro merece ser considerado. La lógica del autor es la de los filósofos escolásticos, y comete todos sus errores —por supuesto, con las usuales referencias a Aristóteles—. (Aristóteles, cuyo nombre suele ser tomado en vano por nuestros lógicos, se revolcaría en su tumba si se enterase de que los lógicos no saben más acerca de la lógica hoy que lo que él conocía hace 2000 años). El autor no ha tenido la menor noticia del gran trabajo de los lógico-matemáticos modernos —trabajo que ha traído un avance en lógica comparable únicamente con el hecho por la astronomía respecto de la astrología y el de la química respecto de la alquimia—. (1912-13 169)

Me parece injusto comparar la lógica aristotélica, cualesquiera sean sus limitaciones, con pseudociencias como la astrología o la alquimia. Sin embargo, es destacable cómo Wittgenstein se acerca a la concepción de una revolución en lógica análoga a la revolución copernicana en astronomía.

Pasemos ahora de los libros de texto prerrevolucionarios de Keynes y Coffey a algunos libros de lógica posrevolucionarios. Dos sobresalientes libros de las últimas décadas son *Introduction to Mathematical Logic* (1964) de E. Mendelson y *A Course in Mathematical Logic* (1977) de J. L. Bell y M. Machover. Ambos textos exponen el cálculo de proposiciones y el cálculo de predicados de primer orden en los primeros capítulos y ninguno de ellos expone, o siquiera menciona, la lógica aristotélica o la teoría del silogismo. De hecho, las palabras 'Aristóteles' y 'silogismo' no aparecen en estos libros. Una comparación de, por decir algo, Mendelson con la cuarta edición de Keynes dejan una vívida y bastante concreta impresión de la diferencia entre los distintos paradigmas en lógica. Difícilmente hay un tema, fórmula, o discusión en común entre los dos libros.

Así, la consideración de los libros de texto sustenta la tesis de que hubo una revolución en lógica. ¿Pero estamos en lo correcto al describirla como una revolución fregeana en lógica y decir que empezó con el *Begriffsschrift* en 1879? Para justificar esto, debemos mostrar los componentes importantes del nuevo paradigma en lógica introducidos por Frege. De nuevo, el método de examinar los libros de texto sobresalientes es aquí muy útil, tomando otra vez los ejemplos de Mendelson (1964) y Bell-Machover (1977), cuya cercanía al *Begriffsschrift*, en cuanto al tratamiento de los cálculos de proposiciones y de predicados de primer orden como sistemas axiomático-deductivos, es destacable.[6] Para demostrar esto, debemos primero examinar algunos de los contenidos del *Begriffsschrift*.

Esta obra contiene una presentación axiomático-deductiva del cálculo proposicional y del cálculo de predicados. Frege llama al conjunto de las leyes que potencialmente implican todas las demás "núcleo" de su sistema y lo describe como sigue:

> Nueve proposiciones forman el "núcleo" en la siguiente presentación. Tres de éstas —fórmulas 1, 2 y 8— requieren para su expresión (excepto por las letras) sólo del símbolo de la condicional. Tres —fórmulas 28, 31 y 41— contienen además el símbolo de la negación. Dos —fórmulas 52 y 54— contienen el símbolo de la identidad de contenido; y en una —fórmula 58— la concavidad entre dos trazos. (Frege 1972a 136)

La "concavidad contenida entre dos trazos" es el cuantificador universal, el cual es el primero que Frege introduce.

El "núcleo" de Frege está constituido por los axiomas de su lógica. Pasaré ahora a escribirlo, cambiando la simbología de Frege por los conectivos, cuantificadores e identidad de la notación moderna. Mantendré sin embargo las letras usadas por Frege, excepto que, por claridad de presentación, donde él usa letras germanas usaré letras en negrilla. Estos cambios serán también hechos en las citas del *Begriffsschrift* en esta sección. Debo ser enfático en que esta modernización de la notación de Frege no es un asunto trivial. Frege usó una notación bidimensional que definitivamente no hace parte del paradigma

[6] Ambos libros, sin embargo, difieren de Frege en otros aspectos importantes. Algunas de estas diferencias son mencionadas luego en esta sección.

moderno en lógica, y que puede ser útil para reconocer la contribución de Frege. Retornaré a esta cuestión en la sección 5.

*Axiomas que contienen sólo* $\rightarrow$

$a\rightarrow(b\rightarrow a)$, (1)

$(c\rightarrow(b\rightarrow a))\rightarrow((c\rightarrow b)\rightarrow(c\rightarrow a))$, (2)

$(d\rightarrow(b\rightarrow a))\rightarrow(b\rightarrow(d\rightarrow a))$. (8)

*Axiomas que contienen tanto* $\rightarrow$ *como* $\neg$

$(b\rightarrow a)\rightarrow(\neg a\rightarrow\neg b)$, (28)

$\neg\neg a\rightarrow a$, (31)

$a\rightarrow\neg\neg a$. (41)

*Axiomas de identidad*

$(c=d)\rightarrow(f(c)\rightarrow f(d))$, (52)

$c=c$ (54)

*Axiomas del cuantificador universal*

$(\forall \mathbf{a})f(\mathbf{a})\rightarrow f(c)$. (58)

Frege (1972a 111) establece que las letras deben ser consideradas como variables. Ahora bien, en algunas presentaciones modernas, el axioma del cuantificador universal es expresado como:

$(\forall x)f(x)\rightarrow f(y)$,

donde esto tiene que ser apoyado especificando que las ocurrencias ligadas de $x$ en $f(x)$ caen bajo los límites del alcance de un cuantificador $(\forall y)$ o $(\exists y)$. Este requisito es añadido para evitar dificultades como las que siguen: dejando que $f(x)$ sea $(\exists y)(y\neq x)$ entonces $(\forall x)f(x)$ se convierte en $(\forall x)(\exists y)(y\neq x)$ y esto es verdad en algunos dominios teniendo dos o más miembros, considerando $f(y)$ éste pasa a ser $(\exists y)(y\neq y)$, lo cual es siempre falso. Frege evita la necesidad de tal requisito, introduciendo un nuevo tipo de variables para cuantificadores, usando letras germanas más que letras itálicas (recordemos que hemos sustituido letras germanas por negrillas).

Frege algunas veces defiende el uso de una sola regla de inferencia, *modus ponens*: de B y B$\rightarrow$A, se sigue A (*cf.* Frege 1972a Prefacio y 107, 117, 120). Sin embargo, él usa otras tres: sustitución, generalización y confinamiento [*confinement*]. Constantemente Frege realiza sustituciones en sus pruebas, pero nunca formula reglas precisas que rijan la sustitución. La regla de generalización la establece como sigue: "X($a$) puede pasar a ser $(\forall \mathbf{a})$X($\mathbf{a}$) si $a$ sólo aparece en el lugar del argumento de X($a$)" (Frege 1972a II 132).

La regla de confinamiento es dada como sigue: "[*t*]*ambién es obvio que de* $A\rightarrow \Phi(a)$ *podemos derivar* $A\rightarrow (\forall \mathbf{a})\, \Phi(\mathbf{a})$, *si A es una expresión en donde a no ocurre y a solamente aparece en el lugar del* *argumento de* Φ(*a*)" (Frege 1972a 132 itálicas de Frege). Mientras Frege parece ignorar el uso de reglas de inferencia distintas a *modus ponens*, en otra parte es más cuidadoso. Así, escribe: "[e]n lógica la gente enumera, siguiendo a Aristóteles, todos sus modos de inferencia. Yo sólo uso uno [*i. e. modus ponens*] *—al menos en todos los casos donde un nuevo juicio es derivado de más de un sólo juicio—*" (Frege 1972a 119, itálicas mías).

La condición en itálicas hace correcto lo que aquí dice Frege —aunque no aclare totalmente el asunto—.

De los primeros seis axiomas de Frege, junto con las reglas de *modus ponens* y sustitución, resulta un sistema completo de cálculo proposicional. Sin embargo, los axiomas no son independientes, ya que el tercer axioma puede deducirse de los primeros dos, tal como lo mostró Lukasiewicz (*cf.* 1967 86-87). Frege proyectó su sistema como una lógica de orden superior, esto es, permitió la cuantificación sobre predicados y, de hecho, cuantifica sobre predicados en varias fórmulas del *Begriffsschrift* (e. g. fórmula (76)). Sin embargo, un fragmento apropiado de su sistema puede ser interpretado como un sistema de cálculo de predicados de primer orden con identidad, y de esta forma resulta completo.

Esto concluye mi examen de algunos contenidos del *Begriffsschrift*. Retornaremos ahora a la cuestión de comparar el sistema original de Frege con los que se encuentran en Mendelson (1964) y Bell y Machover (1977). En la realización de esta comparación dejaré a un lado lo concerniente a las reglas de sustitución, ya que esto es algo que Frege no trata explícitamente, pero que por supuesto es recogido por Mendelson y por Bell y Machover. También traduciré las notaciones de Frege, Mendelson y Bell y Machover a nuestra notación ya indicada.

Empezaremos entonces con el cálculo de proposiciones. Los dos primeros axiomas de Frege, Mendelson y Bell y Machover son los mismos, y los tres libros usan la misma regla de inferencia, llamada *modus ponens*. Mendelson y Bell y Machover, sin embargo, comprimen los siguientes cuatro axiomas de Frege en uno solo, que en Mendelson es

$(\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow ((\neg b \rightarrow a) \rightarrow b)$,

y para Bell y Machover

$(\neg a \rightarrow b) \rightarrow ((\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow a)$.

Vemos entonces que los nuevos tratamientos, mientras siguen a Frege muy de cerca, introducen una clara reducción en el número de axiomas. El tratamiento es particularmente satisfactorio en tanto que el nuevo axioma (esencialmente el mismo en ambos casos) puede ser considerado como la expresión de una forma de *reductio ad absurdum*. Toscamente hablando, asumiendo que si de la negación de una proposición *p*, se sigue una contradicción, entonces *p* se mantiene.

Examinando ahora el cálculo de predicados de primer orden, Mendelson añade, a los axiomas y reglas de inferencia del cálculo proposicional, dos axiomas y una regla de inferencia. El primero de estos nuevos axiomas es esencialmente otra formulación del axioma del cuantificador universal de Frege. El segundo es la regla de confinamiento, que en su sistema es un axioma. La nueva regla de inferencia es la regla de generalización (universal) de Frege. De esta forma, el sistema de cálculo de predicados de primer orden de Mendelson es el mismo de Frege, excepto en que una de las reglas de inferencia de Frege se convierte en un axioma.

Bell y Machover llevan este proceso de convertir las reglas de inferencia de Frege en axiomas más amplios. Ellos añaden al cálculo proposicional cuatro nuevos axiomas, pero no añaden reglas de inferencia. De estos cuatro axiomas, uno es una formulación diferente del axioma de Frege del cuantificador universal; dos sirven para introducir la generalización axiomáticamente, en vez de introducirla como una regla de inferencia; mientras el cuarto,

$$(\forall x)(f(x)\rightarrow g(x))\rightarrow((\forall x)f(x)\rightarrow(\forall x)g(x)),$$

está estrechamente relacionado con la regla de confinamiento.

Finalmente, los axiomas de identidad usados por Mendelson y por Bell y Machover no difieren esencialmente de los usados por Frege. De esta manera, si dejamos a un lado la cuestión de la notación, se debería decir que los mejores tratamientos axiomático-deductivos modernos del cálculo de proposiciones y del cálculo de predicados de primer orden son notablemente cercanos al tratamiento original de Frege en el *Begriffsschrift*.

Aún así, queda un importante aspecto en el que estos tratamientos modernos de la lógica difieren significativamente del de Frege. Tanto Mendelson como Bell y Machover no sólo presentan una aproximación a la sintaxis axiomático-deductiva, sino también a la semántica. Introducen tablas de verdad para el cálculo de proposiciones y una semántica tarskiana para el cálculo de predicados de primer orden, prosiguiendo a probar teoremas de completitud. No hay indicios de que algo por este estilo se encuentre en el *Begriffsschrift*. La aproximación semántica, ya sugerida en Bolzano, fue desarrollada por un grupo de pensadores posteriores a Frege en el cual se incluyen Löwenheim, Skolem, Tarski y Gödel.[7]

Mi conclusión general es ésta: el *Begriffsschrift* indudablemente contribuyó con un número de concepciones centrales al nuevo paradigma en lógica, pero no se convirtió en el texto canónico de la nueva lógica. La parte semántica de la nueva lógica fue desarrollada independientemente de Frege, mientras las ideas propias del *Begriffsschrift* fueron tomadas y desarrolladas por lógicos tales como Peano, Russell, Hilbert, Carnap y Church. En este proceso el sistema original de Frege fue modificado en varios aspectos. Su notación bidimensional fue abandonada a favor de la notación lineal, el problema de las reglas de sustitución fue solucionado y la lógica de predicados de primer orden fue separada de las lógicas de orden superior, entre otras modificaciones. Este característico proceso de transformación da cuenta de un notable fenómeno en la historia de la ciencia, a saber, que los trabajos de encuentro de caminos pueden ejercer una enorme influencia aun cuando sean leídos

[7] Este punto me surgió en una carta de Elliot Mendelson, quien también sugirió que Skolem parece haber sido el primer lógico en pensar acerca de la lógica en la forma ahora acostumbrada, aunque Bernays pudo haber llegado a las mismas ideas de manera independiente. La importancia de Skolem en esta conexión es también resaltada por Moore (1988) en su "The Emergence of First-Order Logic". Moshé Machover me resumió en una conversación una posición más radical en la cual la aproximación semántica debería ser considerada, no como parte de una sola revolución en lógica, sino como una segunda revolución distinta de la revolución fregeana. Esta segunda revolución remplazó el paradigma sintáctico axiomático-deductivo de Frege por un paradigma en el cual las consideraciones semánticas predominaron. Además, el tipo de sistema formal de Frege es ahora considerado simplemente como uno entre muchas otras clases, incluyendo el sistema de tipo Gentzen y deducción natural.

por muy pocas personas. Koestler llamó la atención sobre esto en conexión con *De revolutionibus* de Copérnico, al cual se refiere como "el libro que nadie lee" (Koestler 1959 194). Obviamente si literalmente *nadie* hubiese leído el libro de Copérnico, éste no hubiese sido influyente. El punto es que únicamente pocas personas lo leen con cuidado, pero fueron suficientes para transmitir sus ideas a la gran comunidad de astrónomos. Exactamente lo mismo ocurre con el *Begriffsschrift* de Frege.

### 3. La lógica aristotélica pierde su antigua importancia

En las secciones anteriores, examinamos el nuevo paradigma que surgió de la revolución de Frege en la lógica. Ahora vamos a considerar el viejo paradigma. Siguiendo con el orden de nuestras ideas generales acerca de las revoluciones en ciencia y matemáticas, tenemos que mostrar que este viejo paradigma —la lógica aristotélica— perdió su antigua importancia. Empezaré por resaltar que, si nosotros traducimos la formulación de la lógica aristotélica —de la forma más natural y simple— a la lógica fregeana, entonces un cierto número de silogismos y otras reglas de la lógica tradicional no son ahora universalmente válidos, aunque existen algunas excepciones. Este interesante hecho no fue descubierto por Frege, sino por Peano. De hecho, como ya mostraremos, Frege no comprendió que, en algunos casos, su lógica era opuesta a la tradicional. La perspicacia de Peano en este punto probablemente surgió de una diferencia entre su acercamiento a la lógica y el acercamiento de Frege. Dado que dicha diferencia es también importante para algunos puntos, mostraré la diferencia en la siguiente sección. La describiré aquí sólo brevemente.

Peano consideró 'clase' (o 'conjunto') como una noción lógica primitiva. Frege, por otra parte, permite la aparición en su lógica de clases o conjuntos únicamente como "extensión de conceptos". Discutiendo las relaciones entre la notación conceptual de Peano y la suya (*Begriffsschrift*), Frege dice al respecto:

> En principio parece como si en su visión [la de Peano] (como en la de Boole) una clase es algo primitivo y no reducible. Pero en la *Introducción* §17, encuentro una designación '$\overline{x\varepsilon p_x}$' de una clase de objetos que satisfacen una cierta condición específica o tienen ciertas propiedades específicas. Contrariamente a un concepto, una clase aquí aparece como algunas veces derivada: aparece como la extensión de un concepto. Y con esto puedo declararme totalmente de acuerdo —si bien la notación '$\overline{x\varepsilon p_x}$' no me atrae—. (Frege 1984 204)

La primera impresión de Frege me parece a mí la correcta, pues parece que Peano estaba de acuerdo con Boole en tomar 'clase' como una noción lógica primitiva. En cualquier caso, en sus "Studies in Mathematical Logic" (1889), en la parte que trata de notaciones de la lógicas, Peano introduce primero las clases, en la sección IV (107-8), y sólo entonces introduce la extensión de conceptos como un caso especial de clases (en la sección V). Mucho de lo que Frege y Peano dicen sobre las extensiones de conceptos estaría viciado por el descubrimiento de la paradoja de Russell, que expondré en la próxima sección.

Por el momento, retornemos a la discusión de Peano sobre la lógica aristotélica que ocurre en su primer artículo sobre lógica, escrito en 1888. De acuerdo con su visión de 'clase' como una noción primitiva en lógica, Peano incluyó en sus 'operaciones de lógica deductiva' alguna teoría de conjuntos elemental. Él escribe la intersección de dos conjuntos ($A$ y $B$) como $AB$ o como $A \cap B$, y su unión como $A \cup B$. El complemento de un conjunto $A$ es simbolizado como $\bar{A}$, y el conjunto vacío como ○. La negación de $A{=}B$ se escribe – ($A{=}B$). Él deriva entonces varias identidades que involucran conjuntos; por ejemplo:[8]

[9] (A∪B=○) = (A=○)∩(B=○). (*cf.* Peano 1973 84)

Peano (*íd.* 86) procede entonces a traducir la lógica tradicional a su teoría de conjuntos:

Las cuatro proposiciones

(I) todo *A* es *B*,

(II) ningún *A* es *B*,

(III) algún *A* es *B*,

(IV) algún *A* no es *B*,

pueden ser expresadas, como hemos visto, de la siguiente manera:

(I) $A\overline{B} = \circ$ ,

(II) $AB = \circ$,

(III) $-(A\overline{B} = \circ)$,

(IV) $-(AB = \circ)$.

Las cuatro proposiciones consideradas son los cuatro tipos básicos que aparecen en la teoría tradicional del silogismo. *A* es conocido como el *sujeto* y *B* como el *predicado*. La traducción en teoría de conjuntos es en realidad muy simple. Así, dando un ejemplo particular de (II), "ningún cuervo es blanco" es traducido como "la intersección del conjunto de los cuervos y el conjunto de las cosas blancas es vacía (o igual al conjunto vacío)".

Pero ahora Peano hace su notable descubrimiento. Si hacemos la traducción obvia de la lógica aristotélica a la teoría de conjuntos dada, y luego realizamos unas pocas manipulaciones corrientes en la teoría de conjuntos, ocurre que algunos de los resultados aceptados en la lógica tradicional no son todos verdaderos. El primer caso excepcional de este tipo considerado por Peano es una regla referente a los contrarios que hace parte de la doctrina tradicional del cuadrado de los opuestos, el cual, como veremos en un momento, es mencionado por Frege en el *Begriffsschrift*. La regla es la que dice que "todo *A* es *B*" y "ningún *A* es *B*" son contrarios —es decir, no pueden ser ambos verdaderos, aunque pueden ser ambos falsos—. Peano dice al respecto lo siguiente:

> Las proposiciones (I) y (II) son llamadas *contrarias*; está establecido en los libros de lógica que dos proposiciones contrarias no pueden coexistir. Pero hemos llegado a un resultado diferente. De hecho, tenemos por la fórmula [9]
>
> $(AB = O) \cap (A\overline{B} = O) = (AB \cup \overline{AB} = O)$, ó
>
> $(AB = O) \cap (A\overline{B} = O) = (A = O)$,

[8] Cabe resaltar que Peano usa "=" y "∩" no sólo entre conjuntos sino también entre proposiciones: "=" entre proposiciones quiere decir "es equivalente a", mientras "∩" entre proposiciones significa "y".

> esto es, la coexistencia de las proposiciones (I) y (II) es equivalente a $A=\mathrm{O}$ [...]. Ciertamente, cuando los lógicos afirman que dos proposiciones contrarias no pueden coexistir, entienden que la clase $A$ es no vacía: pero aunque todas las reglas dadas por las fórmulas precedentes son verdaderas, no importa qué tipo de clases sean [...] éste es el primer caso en el que es necesario suponer que una de las clases consideradas no es vacía. (Peano 1973 87)

Aquí Peano realmente dio en el blanco. Todos los casos excepcionales en los cuales las reglas de la lógica aristotélica fallan incluyen una o más clases vacías.

Veamos ahora cómo aparecen los resultados de Peano si usamos la lógica moderna estándar en lugar de su cálculo de clases. De hecho hay simples y naturales traducciones de los cuatro tipos básicos de proposiciones tradicionales en el lenguaje de la lógica moderna:

(I) "Todo $A$ es $B$" como "$(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$".

(II) "Ningún $A$ es $B$" como "$\neg(\exists x)(A(x)\wedge(B(x))$" o equivalentemente "$(\forall x)(A(x)\rightarrow\neg B(x))$".

(III) "Algún $A$ es $B$" como "$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$" o equivalentemente "$\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow\neg B(x))$".

(IV) "Algún $A$ no es $B$" como "$(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$" o equivalentemente "$\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$".

Vale la pena mencionar que existe un gran número de caminos distintos de traducción de la lógica aristotélica a la lógica moderna. No consideraré estas alternativas en lo que sigue, puesto que me parecen forzadas y antinaturales comparadas con la ya dada. Sin embargo, el lector interesado en estas otras traducciones puede encontrar detalles al respecto en Strawson (*cf.* 1952 152-194), donde se encuentran visiones diferentes de la cuestión.

Hemos tocado un rasgo general de los paradigmas. Considerando dos paradigmas $P_1$ y $P_2$, estos casi siempre se expresarán en diferentes lenguajes, y así surge un problema en la traducción de enunciados de $P_1$ a $P_2$. Puede haber ambigüedades y diferentes traducciones posibles. Esta situación es a veces usada como un argumento para sostener que paradigmas diferentes son inconmensurables, pero este argumento me parece débil. Decir que la traducción es difícil no quiere decir que sea imposible. Incluso, si varias traducciones diferentes son posibles (como en el presente caso), entonces una comparación de los paradigmas puede ser hecha con cada una de las traducciones. Esto puede hacer tedioso el trabajo de comparación de paradigmas, pero ciertamente no imposible. Tampoco esta diversidad de traducciones afecta la superioridad de los juicios sobre los méritos de los dos paradigmas. Así, aunque la lógica aristotélica es traducida a la lógica moderna, la superioridad de la segunda no es puesta en duda.

Consideremos ahora la proposición "todos los unicornios son sabios". De acuerdo con nuestra traducción estándar, ésta se expresa así en lógica fregeana:

$(\forall x)(\text{unicornio}(x)\rightarrow\text{sabio}(x))$.

Ahora, como sabemos, no existen los unicornios —la clase de los unicornios es vacía—. Así, para un $a$ dado, el enunciado "$a$ es un unicornio" o "unicornio($a$)" es falso. Luego, por la usual definición de la tabla de verdad de $\rightarrow$, $\text{unicornio}(a)\rightarrow\text{sabio}(a)$ es verdadero. Pero como esto vale para un $a$ arbitrario, se sigue que $(\forall x)(\text{unicornio}(x)\rightarrow\text{prudente}(x))$ es verdadero. Por el mismo argumento podemos concluir que "todos los unicornios son estúpidos", "todos los unicornios son rojos", "todos los unicornios son verdes", y todos los enunciados del mismo tipo son verdaderos. Tales generalizaciones se dice que son *verdaderas vacíamente*. Son generalizaciones verdaderas vacíamente las que producen contraejemplos a algunas leyes de la lógica tradicional.

Trataré el caso que Peano consideró primero y lo reexaminaré con la lógica fregeana. La regla de la lógica tradicional dice que "todo $A$ es $B$" y "ningún $A$ es $B$" son contrarios, que no pueden ser ambos verdaderos. La traducción corriente de esta regla en la lógica fregeana es:

$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$,

$(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$.

Pero si $A$ no tiene elementos, entonces ambos enunciados son verdaderos vacíamente, y así tenemos un caso en el que los contrarios son ambos verdaderos.

Peano continúa resaltando que la misma línea del argumento produce contra-ejemplos de algunos de los silogismos tradicionalmente aceptados como válidos. De hecho, dice: "[...] si, pues, no podemos obtener la forma 'todo $B$ es $C$, y todo $B$ es $A$; por lo tanto algún $A$ es $C$' [...] en esta nueva forma es necesario suponer que la clase $B$ no es vacía" (Peano 1973 80). En efecto, "todos los unicornios son perros" y "todos los unicornios son gatos" son ambas verdaderas vacíamente, pero es sin embargo falso que "algún gato es perro".

Este punto puede ser objetado, pues aunque esta lista de ejemplos es válida, ellos son insignificantes ya que nadie quiere razonar acerca de si los unicornios son sabios u otras cuestiones similarmente frívolas. El ejemplo de los unicornios es de alguna forma frívolo, pero los casos de predicados cuyas extensiones pueden ser vacías ocurren en ciencias exactas y matemáticas. Consideremos, por ejemplo, a Adams y Le Verrier intentando explicar las perturbaciones en la órbita de Urano. Supongamos que formulando su teoría introducen un predicado "PBU($x$)" asumiendo "$x$ es un planeta más allá de Urano". Ahora bien, dado que Neptuno fue descubierto, resulta que la clase de los $x$ tales que PBU($x$) es no vacía; pero cuando Adams y Le Verrier adelantaron su teoría, no sabían si la extensión de PBU($x$) era vacía o no. Así, para poder obtener consecuencias lógicas de su teoría, necesitaban una lógica capaz de cubrir ambos casos.

Exactamente la misma situación se presenta en matemáticas. Supongamos un matemático que trata de probar la conjetura de Goldbach: todo número par mayor que 2 es la suma de dos primos. Él o ella podrían introducir un predicado "ENSP($x$)" donde "$x$ es un número par mayor que 2 que no es la suma de dos primos". Este predicado puede ser usado en la búsqueda de una prueba de la conjetura de Goldbach. No obstante, aún no sabemos si la conjetura de Goldbach es verdadera o falsa —no sabemos si la extensión de ENSP($x$) es vacía o no vacía—. Por lo tanto, para razonar con un predicado como ENSP($x$) necesitamos una lógica que cubra ambos casos: el vacío y el no vacío. Así, este es un defecto genuino de la lógica tradicional que deja de aplicarse en algunos casos donde los predicados tienen extensiones vacías.

Consideraremos ahora lo que Frege dijo en el *Begriffsschrift* acerca de la lógica tradicional. En realidad, sólo menciona la lógica aristotélica superficialmente en pocos lugares. Señala (en un pasaje ya citado): "[e]n lógica la gente enumera, siguiendo a Aristóteles, todos sus modos de inferencia. Yo sólo uso uno [...]" (Frege 1972a 119); y añade en la página siguiente: "[a]lgunos de los juicios que remplazan los modos de inferencia aristotélicos serán presentados en §22 (fórmulas 59, 62, 65)" (*íd.* 120). Estas tres fórmulas son relacionadas por Frege con los silogismos Felapton, Fesapo y Barbara. Finalmente Frege muestra el cuadrado de oposición lógica (*cf. íd.*135). En la traducción Bynum que estoy citando, el *Begriffsschrift* tiene una extensión de 101 páginas. Todas las anotaciones sobre la lógica aristotélica puestas juntas no pasan de una página y media, es decir, menos del 1.5% del total. Esta estadística da una buena impresión del carácter revolucionario del *Begriffsschrift*, aunque cabe recordar que la mayoría de los libros contemporáneos [del *Begriffsschrift*] sobre lógica tratan casi exclusivamente acerca de lógica tradicional. Sin embargo, es notable que Frege efectivamente concede demasiado a la lógica aristotélica: de las siete reglas de la lógica tradicional que cita, no menos de cinco dejan de ser universalmente válidas desde el nuevo punto de vista. Aún así, Frege no se da cuenta de ello.

Empecemos con el cuadrado de oposición lógica, que puede ser escrito como en la figura 2. Frege (1972a 135) muestra el cuadrado de esta forma, excepto que representa los tradicionales "todo S es P", "ningún S es P" y los demás tipos, en su propia notación lógica, la traducción de la que ya hemos hecho mención. Frege no notó que, con esta traducción, tres de las cuatro reglas en el cuadrado de oposición tienen excepciones. Vimos ya que es posible encontrar contrarios que son ambos verdaderos. La regla de los subalternos dice que si el primero es verdadero también lo es el segundo. Pero supongamos que S no tiene elementos, entonces la primera proposición de cada subalterna resulta verdadera vacíamente, mientras la segunda proposición es falsa en cada caso.

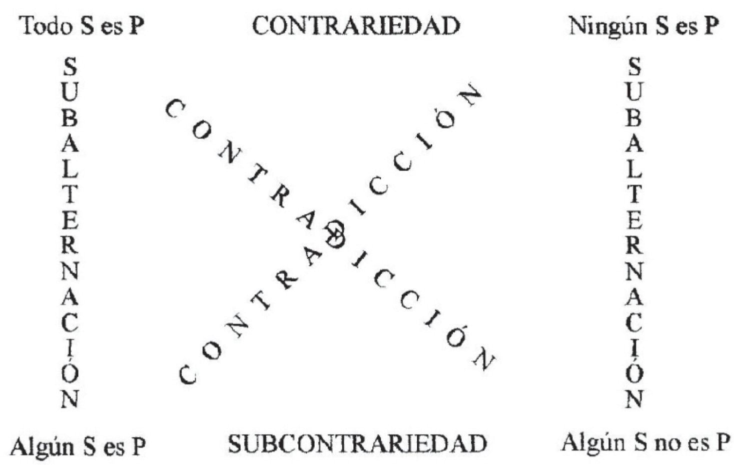



Fig. 2

Según la lógica tradicional, las subcontrarias pueden ser ambas verdaderas, pero no pueden ser ambas falsas. Sin embargo, si no hay elementos en S entonces ambas subcontrarias son falsas. La regla de las contradictorias establece que las contradictorias no pueden ser ambas verdaderas, ni tampoco falsas simultáneamente. Ésta es la única ley del cuadrado de los opuestos que continúa sin excepciones en el sistema de Frege.

Frege menciona los silogismos Felapton y Fesapo. Como yo descubrí en el libro de J. N. Keynes (!), estos pueden ser expresados como sigue:

*Felapton*

Ningún M es P,

Todo M es S,

∴ Algún S no es P.

*Fesapo*

Ningún P es M,

Todo M es S,

∴ Algún S no es P.

Tanto Felapton como Fesapo pueden ser mostrados como no universalmente válidos, considerando casos en los que no hay elementos de M.

La proposición (59) de Frege resulta, con nuestras alteraciones usuales a su notación, así:

$$g(b)\rightarrow(\neg f(b)\rightarrow\neg(\forall a)(g(a)\rightarrow f(a)) \qquad (59)$$

Frege hace el siguiente comentario a esta fórmula: "Vemos cómo este juicio remplaza uno de los modos de inferencia, a saber, Felapton o Fesapo, que no son diferenciados aquí puesto que no hay una materia específica [por la naturaleza de nuestra 'notación conceptual']" (Frege 1972a 163). Fijando $g$=S, $f$=P, y $b$=M, vemos que la proposición (59) de Frege en realidad corresponde únicamente a un caso especial de Felapton y Fesapo en el cual "Ningún M es P" y "Ningún P es M" son ambas identificadas con $\neg f(b)$, y "Todo M es S" es identificado con $g(b)$.

La única que permanece de las leyes de la lógica aristotélica consideradas por Frege en el *Begriffsschrift* es el famoso primer silogismo: Barbara. Este silogismo se mantiene universalmente válido al traducirlo a la lógica fregeana y Frege suministra razonables contrapartes de dos casos del silogismo en sus proposiciones (62) y (65).

Deseo concluir esta sección recalcando una vez más la analogía entre las revoluciones de Frege y de Einstein. Durante la revolución einsteiniana se descubrió que la mecánica newtoniana, de la cual se pensaba que valía en todos los casos, deja de aplicarse en velocidades cercanas a la de la luz o en campos gravitacionales fuertes. Similarmente, durante la revolución fregeana se descubrió que las leyes de la lógica aristotélica dejan de aplicarse en casos especiales en los cuales las extensiones de algunos de los predicados involucrados son vacías. Así, en ambas revoluciones se mostró que la sabiduría previamente aceptada tenía importantes limitaciones, y podía ser aceptada sólo con ciertos requisitos significativos. Sin embargo, en la revolución fregeana el viejo paradigma fue de hecho abandonado de forma más radical que en la einsteiniana. Después de todo, la mecánica newtoniana es todavía enseñada en los libros de texto usuales y aplicada en varios —realmente muchos— casos. La lógica aristotélica es totalmente excluida de los libros de texto y, rara vez, por no decir nunca, alguien considera formular un argumento lógico en forma silogística. Mientras la mecánica newtoniana es todavía enseñada y usada, la lógica aristotélica no es, por lo general, enseñada ni usada.[9] Resumiendo, la revolución de Frege está más cerca que la de Einstein de ser una revolución Rusa; y puede ser difícil mantener que hubo una revolución einsteiniana en física, pero no una revolución fregeana en lógica.

## 4. Los programas de investigación de Boole, Frege y Peano

Volvamos ahora a una noción que fue usada particularmente por la escuela popperiana para analizar el desarrollo de la ciencia. Ésta es el concepto de programa de investigación. En *El realismo y el objetivo de la ciencia*, Popper introduce la idea de "programas metafísicos de investigación" (*cf.* Pooper 1983 Parte I cap. 2 sección 23). Aunque no fue publicado antes de 1983, fue escrito hacia 1956, e indudablemente influenció a Lakatos en el desarrollo de su metodología de programas de investigación científica (*cf.* Lakatos 1978). Creo que una forma modificada de la noción de Lakatos de programas de investigación es útil para analizar el desarrollo de las matemáticas tanto como el de la ciencia.

Un punto muy discutido es cómo la noción de Lakatos de programa de investigación se relaciona con la noción kuhniana de paradigma y si las dos nociones son realmente diferentes. Las observaciones sobre paradigmas dadas en la sección 2 me parece que muestran que de hecho las dos nociones son distintas y explican en qué difieren. Un paradigma consiste en los supuestos compartidos por todos los que trabajan en una determinada rama de la ciencia en un momento particular. Un historiador puede reconstruir el paradigma de un grupo específico en un momento particular estudiando los libros de texto usados para instruir a los que desean ser expertos en el campo en cuestión. Así pues, un paradigma es aquello que es común al total de una comunidad de expertos en un campo y tiempo particulares. En contraste, sólo unos pocos de estos expertos (o, en el límite, sólo uno) pueden estar trabajando en un programa de investigación específico. Propiamente, sólo un puñado de investigadores vanguardistas estarán trabajando en un programa de investigación específico en un tiempo particular. Un historiador que quiera reconstruir un programa de investigación mirará, no los libros de texto de amplia circulación, sino los escritos de unas pocas figuras claves. Él o ella examinarán los cuadernos de notas, la correspondencia y las investigaciones publicadas de las figuras importantes, e irá reconstruyendo el programa en el cual estuvieron trabajando. En general, entonces, podemos decir que los programas de investigación difieren de los paradigmas. En seguida examinaremos algunas de las ideas específicas de Lakatos acerca de los programas de investigación.[10]

[9] Me fue dicho, tanto por Elliot Mendelson como por Arthur Miller (independientemente), que esta comparación entre la mecánica newtoniana y la lógica aristotélica es un tanto inexacta dado que la mecánica newtoniana fue usada antes de Einstein, y aún es usada, mientras que la lógica aristotélica fue siempre inservible —¡excepto por los textos de lógica!—. Hay alguna verdad en esto, aunque puede ser dicho, por otra parte, que en la Edad Media fue una práctica común intentar argumentar en forma silogística.

[10] Algunas de las siguientes reflexiones sobre Lakatos fueron presentadas en forma temprana en mi contribución, titulada "Critiques et développements de la philosophie d'Imre Lakatos", en una mesa redonda sobre "Imre Lakatos dans le contexte du debat philosophique du xxème siècle" llevado a cabo en el Collège International de Philosophie, en París, en Marzo de 1987. En esa ocasión recibí útiles comentarios de mis compañeros portavoces (Luce Girad y Guilio Giorello), del presidente (Marco Panza) y de numerosos miembros de la audiencia —particularmente de Luciano Boi y de Jean Petitot—.

Lakatos caracteriza sus programas de investigación científica usando dos conceptos: la heurística positiva del programa, y su núcleo fuerte [hard core]. Prefiero el uso del primero de estos conceptos. Un científico necesita algo que guíe su investigación —en efecto, una heurística positiva—. Prefiero, de cualquier modo, no usar el concepto de núcleo fuerte.

Para Lakatos, el núcleo fuerte de un programa está conformado por un conjunto de supuestos que aquellos que trabajan en el programa propuesto sostienen aún contra la evidencia que parece contradecirlos. La dogmática decisión de nunca abandonar un conjunto particular de supuestos me parece contradecir la mentalidad abierta requerida para hacer una buena investigación. Por lo tanto, no pienso que los mejores investigadores tengan núcleos fuertes en sus programas; y aun si algunos investigadores tienen núcleos fuertes, sería mejor que no los tuvieran.

Habiendo abandonado el concepto de núcleo fuerte, quisiera introducir otro concepto que, junto con el de heurística positiva, puede ser tomado como característico de un programa de investigación científico o matemático. Éste es el concepto de propósito o meta del programa de investigación. La importancia de este concepto es, creo, bastante obvia: después de todo, una investigación científica o matemática es una actividad humana consciente y por lo tanto tiene una meta.

Un buen ejemplo de programa de investigación matemática es el programa de Hilbert, cuyo propósito era encontrar una prueba finita de consistencia para la aritmética y realmente para toda la matemática clásica. La heurística positiva estaba compuesta de los métodos metamatemáticos desarrollados por Hilbert y su escuela. El resultado del programa fue mostrar (segundo teorema de incompletitud de Gödel) que su meta no podía ser alcanzada.[11] De hecho este resultado no es raro: progresos significativos ocurren muy frecuentemente en matemáticas mostrando que el propósito de un programa de investigación particular no puede ser realizado.

En una revolución en matemáticas hay siempre un cambio de un viejo programa de investigación (digamos $R_1$) a uno nuevo (digamos $R_2$). Podemos ilustrar esto con el ejemplo del descubrimiento de las geometrías no euclidianas, analizado en más detalle por Zheng en "Non-Euclidean Geometry and Revolutions in Mathematics" (*RM* 169-182). El propósito del viejo programa $R_1$ era probar el quinto postulado de Euclides usando los otros postulados y tal vez también algunos supuestos adicionales más obvios que el quinto postulado. $R_1$ era un programa tradicional. Comenzado por los griegos, fue continuado por los árabes y por los matemáticos europeos de los siglos XVII y XVIII. El propósito de $R_2$ era desarrollar una geometría diferente de la euclidiana, pero igualmente consistente. El aparato conceptual de los programas de investigación muestra ciertos aspectos de la historia. Por ejemplo, Saccheri, mientras trataba de probar el quinto postulado por el método de *reductio ad absurdum*, encontró ciertos teoremas de geometría no euclidiana, los cuales fueron posteriormente publicados por Bolyai y Lobachevsky. Pero Saccheri no descubrió la geometría no euclidiana porque aún estaba trabajando en el viejo programa $R_1$. El descubrimiento de la geometría no euclidiana fue, en efecto, la introducción de un nuevo programa de investigación.

El cambio de un viejo programa de investigación $R_1$ a uno nuevo $R_2$ es una condición necesaria para una revolución en matemáticas; pero no es una condición suficiente, porque tal cambio de programa puede generar progresos matemáticos, pero quedarse corto para ser una revolución.

[11] Esto es, pienso, el punto de vista estándar, pero, como Charles Chihara y Moshé Machover me señalaron, no todos están de acuerdo con esta posición. Para ver una visión alterna, ver Detlefsen (1986).

Aquí, sin embargo, podemos establecer una conexión entre los conceptos de programa de investigación y paradigma, pues un cambio de programa marca el inicio de una revolución si el programa conduce al desarrollo de un nuevo paradigma. Los programas de investigación que generan nuevos paradigmas pueden ser llamados programas revolucionarios de investigación.

Hasta ahora hemos discutido el programa de investigación en términos generales, pero ahora veremos cómo aplicarlo a la revolución fregeana en lógica. Aquí será útil considerar los programas de investigación de Boole, Frege y Peano. Argumentaré que el programa de investigación de Boole, aunque condujo a progresos en lógica, no tuvo un carácter revolucionario y que los de Frege y Peano sí lo tuvieron. En concordancia con las observaciones hechas, describiré cada uno de los tres programas de investigación, primero, en términos de sus propósitos o metas y, segundo, en términos de los desarrollos heurísticos trabajados en el programa.

Empecemos considerando el programa de investigación de Boole en lógica. Boole perteneció a la escuela británica de álgebra que floreció en el siglo XIX. Los miembros de esta escuela desarrollaron nuevas técnicas y sistemas algebraicos, y los aplicaron a una variedad de problemas en matemáticas y física. La primera obra de investigación matemática de Boole, "Un método general en análisis" (1844), aplica esta de clase aproximación al análisis desarrollando un cálculo de operadores. Su siguiente idea fue tratar la lógica de la misma forma, es decir, reducir los métodos de la lógica tradicional a un cálculo algebraico. El título de la obra de Boole de 1847, *El análisis matemático de la lógica, un ensayo hacia un cálculo del razonamiento deductivo*, indica claramente el programa de Boole. Así pues, el propósito del programa de investigación de Boole fue expresar la lógica tradicional en términos de un cálculo algebraico; su heurística fue usar las diferentes técnicas y sistemas algebraicos desarrollados por la escuela matemática a la cual pertenecía.

Un examen del clásico de Boole *El análisis matemático de la lógica* corrobora este análisis de su programa de investigación. En el primer capítulo de su libro "Primeros principios", Boole señala las operaciones básicas de su cálculo algebraico. Los siguientes cuatro capítulos, que constituyen el centro de la obra, se titulan "De la expresión y la interpretación", "De la conversión de proposiciones", "De los silogismos" y "De las hipotésis". La estructura de cada uno de estos capítulos es la misma. Boole empieza resumiendo las reglas y procedimientos de la lógica tradicional en el campo en cuestión y luego muestra cómo pueden traducirse a su sistema algebraico. Así, el capítulo "De los silogismos" empieza con una corta sinopsis de la doctrina tradicional de los silogismos, dando la forma general de un silogismo, las cuatro figuras del silogismo, e incluso los versos latinos para recordar los 24 silogismos supuestamente válidos (Barbara, Celarent, Darii, etc.). Boole procede entonces a mostrar cómo los silogismos pueden ser traducidos en su sistema de ecuaciones algebraicas y cómo el razonamiento silogístico puede ser llevado a cabo por una manipulación algebraica de estas ecuaciones. Así, Boole está, en efecto, traduciendo la lógica tradicional a fórmulas y manipulaciones algebraicas. Por supuesto, su nueva notación y aproximación sugiere extensiones de la lógica tradicional en varios puntos, pero no hay nada en el programa que prometa traer una alteración dramática en el contenido de la lógica tradicional. La obra de Boole puede ser comparada con una reformulación de la mecánica newtoniana con un sistema matemático más poderoso (digamos un sistema más de análisis que de geometría). Tal reformulación bien pudo haber sido un importante paso, pero no pudo ser un intento de remplazar la mecánica newtoniana por una nueva clase de mecánica.

Unas pocas estadísticas ayudan a presentar la conservativa, más que revolucionaria, naturaleza del avance de Boole. La edición de Blackwell en 1948 de *El análisis matemático de la lógica* (1847) consta de 82 páginas y los cuatro capítulos centrales que tratan la lógica tradicional ocupan 40 páginas, el 49%. En particular, el capítulo "De los silogismos" tiene 17 páginas, siendo así el 21% de la monografía. Así, el porcentaje de la obra de Boole que trata los silogismos (21%) es casi tan grande como el porcentaje, sobre el mismo tópico, del libro de J. N. Keynes de 1884 (29%). El contraste con el *Bregriffsschrift*, que dedica menos del 1.5% de su espacio a la lógica tradicional, es particularmente sorprendente. ¿Pero qué, entonces, conduce a Frege a realizar tal rompimiento dramático con la lógica aristotélica? La respuesta está en el programa de investigación de Frege, que consideraremos a continuación.

El propósito del programa de investigación de Frege (el programa logicista) era mostrar que la aritmética podía ser reducida a la lógica. El programa falló en alcanzar su meta. El intento de Frege fue viciado por la paradoja de Russell, y los esfuerzos posteriores de Russell fallaron por el primer teorema de incompletitud de Gödel, además de otras dificultades. De cualquier forma, pocos exitosos programas de investigación han sido tan fructíferos intelectualmente como el fracasado programa logicista. Mostraré cómo el programa logicista dio origen a una revolución en la lógica formal, pero eso está lejos de ser el fin del asunto. La obra de Frege en su programa logicista produjo avances en filosofía y también en la teoría del lenguaje, aunque esto no lo consideraremos acá.[12]

Frege expone su programa logicista en *The Foundations of Arithmetic* (1968), aunque, como veremos, había formulado su programa y comenzado su trabajo antes de la aparición del *Begriffsschrift* en 1879. El programa logicista de Frege de alguna forma se origina en una crítica a la teoría de la aritmética de Kant. De acuerdo con Kant, las verdades aritméticas son sintéticas *a priori* y basadas en la intuición. Frege piensa que, por el contrario, las verdades aritméticas son analíticas e independientes de la intuición en el sentido kantiano (es decir, la intuición como una forma de sensibilidad). Frege empezó su investigación dando una nueva definición de lo analítico, que vio cómo una generalización de la de Kant. Frege estableció esta definición como sigue:

> Su objetivo, pues, es encontrar la prueba y retrotraerla hasta las verdades originarias. Si por este camino se llega a leyes lógicas generales y a definiciones, entonces se tiene una verdad analítica, para lo cual se presupone que también se toman en consideración los enunciados en los que se basa la admisibilidad de una definición. Si, por el contrario, no es posible llevar a término la prueba sin utilizar verdades que no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del saber, entonces el enunciado será sintético. (Frege 1968 27)

El propósito del programa logicista de Frege era mostrar que las verdades de la aritmética son analíticas en este sentido. Tal conclusión a algunos puede parecerles bastante implausible, ya que la aritmética involucra entidades especiales —los números naturales 0, 1, 2, 3, ..., n, ... (los cuales se ven muy distintos de alguna cosa que ocurra en lógica)— y procede de acuerdo con modos especiales de razonamiento; particularmente, el principio de inducción matemática

$P(0)\wedge((\forall n)(P(n+1)))\rightarrow(\forall n)P(n)$*,

[12] En general, el presente artículo se enfoca hacia la contribución de Frege a la lógica formal o matemática. Las dos décadas anteriores han visto la publicación de varios libros que tratan la obra de Frege en un sentido más amplio. Tres en particular, los cuales expresan diferentes puntos de vista: de Dummett (1973), Currie (1982) y Wright (1983).

* En el original errado, naturalmente se trata de $(P(0)\wedge(\forall n)\ (P(n)\rightarrow(P(n+1)))\rightarrow(\forall n)P(n)$. (Nota de los Traductores)

que parece diferente del razonamiento lógico ordinario. Sin embargo, esperaba superar tales objeciones definiendo número en términos de nociones puramente lógicas y mostrando que la inducción matemática puede ser reducida a la inferencia lógica ordinaria. Como dice en la introducción de *The Foundations of Arithmetic*: "[...] de la presente obra podrá desprenderse que incluso una inferencia matemática aparentemente singular, como la que pasa de $n$ a $n+1$, se basa en las leyes lógicas universales [...]" (Frege 1968 15).

El prefacio del *Begriffsschrift* de 1879 muestra que Frege tenía, por ese tiempo, no sólo formulado su programa logicista, sino que ya tenía completamente adelantado mucho trabajo en él. Efectivamente, el *Begriffsschrift* mismo es el primer fruto del trabajo en el programa logicista. El segundo parágrafo provee, de hecho, su nueva definición de lo analítico y de lo sintético (aunque realmente no introdujo estos términos). Frege dice:

> Ahora, mientras consideraba la cuestión de a cuál de estos dos tipos [de verdad] pertenecen los juicios aritméticos, primero tuve que examinar hasta dónde una [verdad] puede obtenerse en aritmética por medio de deducciones lógicas solamente, apoyadas únicamente en las leyes del pensamiento, las cuales trascienden todos los particulares. El procedimiento en este esfuerzo fue éste: busqué primero reducir el concepto de ordenamiento-en-una-sucesión a la noción de ordenamiento *lógico*, con miras a avanzar de este punto al concepto de número. A fin de que algo intuitivo (*etwas Anschauliches*) no pudiera pasar inadvertido aquí, era más importante conservar la cadena de razonamientos sin huecos. Mientras procuraba cumplir con esta condición rigurosamente, encontré un obstáculo en la inadecuación del lenguaje; a pesar de toda la pesadez de las expresiones, la más compleja de las relaciones obtenidas resultó menos precisa de lo que mi propósito requería. De esta deficiencia provino la idea de la "notación conceptual" presentada aquí. (Frege 1972a Prefacio y 104)

Éste es un pasaje muy interesante, porque nos da una idea de la heurística empleada por Frege para trabajar en su programa. Él parece haber tomado verdades particulares de la aritmética e intentado encontrar una forma de probarlas a partir de premisas que pudieran ser reconocidas como "leyes del pensamiento que trascienden todos los particulares", esto es, como principios lógicos generales. Intentó asegurar que sus pruebas involucraban "sólo deducciones lógicas" y que nada intuitivo (*Anschauliches*) pasaba inadvertido. Esto, por supuesto, fue porque deseaba desechar la idea de que cualquier clase de intuición kantiana era necesaria como base de la aritmética. Encontró, sin embargo, que el lenguaje ordinario era inadecuado para la formulación de las pruebas rigurosas que requería, y esto le dio la idea de desarrollar su *Begriffsschrift*.

Este recuento de la génesis del *Begriffsschrift* expone un curioso rasgo del trabajo que aún no he mencionado. Frege da un desarrollo axiomático-deductivo del cálculo de proposiciones y del cálculo de predicados de primer orden en las partes I y II, pero la parte III es dedicada al extraño tema "Algunos tópicos de una teoría general de sucesiones". Al introducir la parte III, se señala suavemente: "[l]as siguientes derivaciones son propuestas para dar una idea general de cómo manipular esta 'notación conceptual', aunque ellas no basten, tal vez, para revelar enteramente las ventajas que posee" (Frege 1972a 167). El lector es dejado en la oscuridad sobre las razones de Frege para desarrollar una "teoría general de las sucesiones". De cualquier forma, estas razones son dadas en un trabajo posterior. De hecho, en *The Foundations of Arithmetic* (1968 103), Frege cita del *Begriffsschrift* (1972a 173-174) la definición de '$y$ es el siguiente de $x$ en la $\Phi$-serie', y luego comenta: "[s]ólo mediante esta definición de la sucesión en una serie es posible reducir la inferencia de $n$ a ($n$+1), que aparentemente es peculiar de la matemática, a las leyes lógicas generales" (Frege 1968 104). Así todo resulta claro. Frege desarrolla una "teoría general de sucesiones" para mostrar que el principio de inducción matemática puede ser reducido a las leyes generales de la lógica; y esto, como hemos visto, es una parte importante del programa logicista.

El programa de investigación de Frege es obviamente muy diferente del de Boole. Este último tomó el cuerpo aceptado de la lógica tradicional como su punto de partida y su propósito era reducirlo a un cálculo algebraico. El punto de partida de Frege, por el contrario, era un cuerpo de verdades aritméticas que intentaba probar lógicamente a partir de premisas que podían ser reconocidas como principios lógicos generales. Considerando que la lógica tradicional no juega un papel en el programa fregeano, vemos en esto la explicación de por qué el 49% de *El análisis matemático de la lógica* (1948) de Boole se refiere a la lógica tradicional, frente al menos del 1.5% del *Begriffsschrift* de Frege.

Ahora mostraremos por qué el programa de Frege produjo mayores innovaciones en lógica que las producidas por el de Boole. El punto realmente es más simple de lo que parece. Frege tuvo que hacer totalmente explícitos todos los principios lógicos necesarios en un desarrollo deductivo de la aritmética y de hecho muchos de estos iban más allá de cualquier cosa que haya sido reconocida en la lógica tradicional. Por otro lado, había, como ya argumenté, pocas razones para pensar que el programa de Boole conducía a fuertes cambios en el contenido de la lógica tradicional.

Podemos ampliar esto considerando uno de los más significativos avances de Frege en lógica —su introducción de cuantificadores—. Realmente la teoría de la cuantificación es necesaria para formalizar la aritmética. Consideremos la bien conocida verdad de la aritmética: hay un número primo mayor que cualquier número dado. Si tomamos "$m$ es un número primo" como Pr($m$), ésta viene a ser:

$(\forall n)(\exists m)(\mathrm{Pr}(m)\wedge(m>n))$.

Sin embargo, aquí tenemos los cuantificadores anidados $(\forall n)(\exists m)$, y esto va más allá de cualquier cosa encontrada en la lógica tradicional. Entonces de nuevo, al expresar el principio de inducción matemática en su forma de primer orden

$(\mathrm{P}(0)\wedge(\forall n)(\mathrm{P}(n)\rightarrow(\mathrm{P}(n+1)))\rightarrow(\forall n)\mathrm{P}(n)$,

es indispensable la noción de alcance de un cuantificador. Esta noción es introducida por Frege en el *Begriffsschrift* (1972a 131). De manera significativa, Frege va a usar el concepto de alcance de un cuantificador en la parte III del *Begriffsschrift* cuando desarrolla su teoría general de sucesiones. De hecho, parte de la fórmula (69) del *Begriffsschrift* (*íd.* 167) es (traducida a la notación moderna usual):

$(\forall \mathrm{b})(F(\mathrm{b})\rightarrow(\forall \mathrm{a})(f(\mathrm{b},\mathrm{a})\rightarrow F(\mathrm{a}))$.

Frege toma esto para significar que la propiedad $F$ es hereditaria en la $f$-sucesión. Este concepto, de una propiedad que es hereditaria en la $f$-sucesión, es luego usado para definir "$y$ es el siguiente de $x$ en la $f$-sucesión", y esta definición, como hemos visto, es una parte fundamental en el intento de Frege de reducir la inducción matemática a una inferencia lógica.

De esta forma el programa logicista de Frege proporcionó el estímulo para sus avances en lógica formal, pero, si el asunto es considerado cuidadosamente, se podría pensar que únicamente una parte de este programa habría sido suficiente por sí misma para proveerse los estímulos necesarios. El punto crucial del programa es desarrollar la aritmética como un sistema formal axiomático-deductivo, esto es, como un sistema axiomático-deductivo en el cual la lógica subyacente se hace totalmente explícita. Esta visión, creo yo, podría ser soportada considerando la obra de Peano en lógica y los fundamentos de la aritmética. Pasemos pues, del programa de investigación de Frege al de Peano.

El programa de investigación de Peano puede ser descubierto en su *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* (1889). El propósito del programa fue desarrollar la aritmética como un sistema axiomático-deductivo, en el cual la lógica subyacente se hace completamente explícita. El programa difiere del programa logicista en que Peano no pensó que los axiomas podían ser principios lógicos generales. Por el contrario, pensaba que los axiomas contendrían nociones aritméticas primitivas, irreductibles a la lógica:

> Aquellos signos aritméticos que pueden ser expresados usando otros, junto con los signos de la lógica, representan las ideas que podemos definir. Así, he definido todos los signos, si se exceptúan los cuatro que está contenidos en las explicaciones del §1. [Éstos son: número (entero positivo), unidad, sucesor e identidad (de números).] Si, como creo, éstos no pueden ser aún más reducidos, entonces las ideas que expresan no pueden ser definidas por las ideas ya supuestas como conocidas. (Peano 1973 102)

Aunque el programa de investigación de Peano difiere del programa de investigación logicista, el primer teorema de incompletitud de Gödel mostró que, tanto aquél, como el programa logicista, no podían ser llevados a cabo completamente.

La heurística del programa de Peano también difiere en algunos aspectos de la del programa de Frege. En particular, como he señalado en la sección 3, Peano tomó la noción de clase como una noción lógica básica, mientras que Frege tomó la noción de concepto como básica e introdujo las clases sólo como extensiones de conceptos. Como veremos, estas diferentes perspectivas resultaron, en los desarrollos lógicos de Peano, un poco diferentes de los de Frege.[14]

Si nuestra tesis general es correcta, Peano debería, como Frege, haber sido conducido por su programa de investigación a realizar avances en lógica superiores a todos los alcanzados por Boole. Éste es realmente el caso. Por ejemplo, Peano fue forzado por los requisitos de su programa de aritmética a encontrar algún medio de expresión el cual es ahora expresado usando los cuantificadores universal y existencial. Revisaremos a continuación lo que hizo.

El primer pasaje relevante es éste:

> Si las proposiciones $a$, $b$, contienen las cantidades indeterminadas $x, y, \ldots$, esto es, expresan condiciones sobre estos objetos, entonces $a \supset_{x,y,\ldots} b$ significa: cualesquiera sean $x, y, \ldots$, de la proposición $a$ se deduce $b$. Si realmente no hay peligro de ambigüedad, en lugar de $\supset_{x,y,\ldots}$ escribimos sólo $\supset$. (Peano 1973 105)

Este recurso permite a Peano expresar proposiciones como:

$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), \quad (\forall x)(\forall y)(A(x, y) \rightarrow B(x, y))$.

[14] Es interesante que Dedekind estaba de acuerdo con Peano al tomar *clase* como una noción lógica básica. La diferencia entre este acercamiento y el de Frege es discutida en otra parte (*cf.* Gillies 1982 caps. 5 y 8).

Sin embargo, no puede usarlo para expresar directamente proposiciones como:

$(\forall x)A(x)$, $(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x))$, $(\forall x)(\exists y)A(x, y)$.

Para incrementar el poder expresivo de su simbolismo, Peano hizo uso de la noción de clase, que, como hemos visto, la considera como una noción lógica básica. Así, escribe:

> Sea *a* un proposición que contiene la indeterminada *x*; entonces la expresión $[x\varepsilon]$ *a*, la cual se lee *los x tales que a*, o *soluciones* o *raíces* de la condición *a*, indican la clase que consiste en los individuos que satisfacen la condición *a*. (Peano 1973 108)

Usando esta herramienta de abstracción de clases, Peano pudo expresar la cuantificación existencial. Por ejemplo, $(\exists x)a(x)$ lo pudo escribir como $[x\varepsilon].a\!: - = \wedge$, donde $\wedge$ es la clase vacía, y "$- =$" significa "no es igual a". Realmente, Peano tiene que hacer uso de este recurso para expresar algunos de los teoremas en su subsiguiente desarrollo de la aritmética. Por ejemplo, su sección 8 Teorema 12 (*cf.* Peano 1973 126) sería escrita usando los cuantificadores usuales así:

$(\forall p, q)(p, q\varepsilon\, N\rightarrow(\exists m)(mp/q\varepsilon\, N))$,

donde *N* representa la clase de los números naturales (enteros positivos). Peano lo escribe de la siguiente forma:

$p, q\varepsilon\, N\,.\supset\, :: [m\varepsilon] : m\varepsilon\, N\,.\, mp/q\varepsilon N \therefore - = \wedge$.

En un escrito posterior, "Estudios en lógica matemática" de 1897, Peano introduce explícitamente el cuantificador existencial, como sigue:

> La proposición $a \sim\, = \wedge$, donde *a* es una clase, de este modo significa 'existe algún *a*'. Ya que esta relación ocurre muy frecuentemente, algunos trabajos en este campo sostienen que es útil indicarla con una notación simple, en vez de el grupo $\sim\, = \wedge$. La siguiente definición puede hacerse:
>
> 19. $a\ \varepsilon\ K\,.\supset : \exists\ a\,.=.\ a \sim\, = \wedge$ Def.
>
> Ejemplo
>
> $\exists N^2\cap(N^2+N^2)$ 'Existen cuadrados que son la suma de dos cuadrados'. (Peano 1973 203)

Podemos ver que el $\exists a$ de Peano tiene el mismo significado que el moderno $(\exists x)(x\ \varepsilon\ a)$.

La dificultad básica con la aproximación de Peano a la teoría de la cuantificación es que usa el recurso de abstracción de clases $[x\varepsilon]a$, y de esta forma asume implícitamente el llamado "axioma de comprehensión": $(\exists y)(\forall x)(x\varepsilon y \leftrightarrow a(x))$. Sin embargo, la paradoja de Russell como mostraré, es derivada de este axioma en unas pocas líneas.

Sólo tenemos que sustituir $a(x)$ por $x \notin x$ ($x$ no es un miembro de sí mismo) para obtener

$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$.

Poniendo B (por Bertie) en lugar de *y*, tenemos $(\forall x)(x \in \mathrm{B} \leftrightarrow x \notin x)$ y entonces, $\mathrm{B} \in \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{B} \notin \mathrm{B}$, lo cual es una contradicción.

La aproximación de Frege a la cuantificación, que es la moderna, no se ve afectada por la paradoja de Russell y, así, el sistema de la de lógica de Frege se ve menos afectado por la paradoja de Russell que el de Peano. Podemos atribuir esta diferencia a la gran perspicacia lógica de Frege, aunque tal vez sólo tuvo suerte. Frege no rechazó el problemático principio de abstracción de clases. Como vimos en la sección 3, Frege (1984 240) se declaró a sí mismo de acuerdo con la abstracción de clases de Peano. Realmente, en su *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), Frege introduce la extensión de un concepto, que es equivalente a la de abstracción de clases de Peano. La extensión de un concepto tiene que satisfacer la Ley v básica del *Grundgesetze*, de la cual se sigue simplemente el axioma de comprehensión. Ciertamente una versión del axioma de comprehensión aparece como Teorema 1 del *Grundgesetze*. Todo esto muestra que Frege no se percató de los peligros que envolvía la noción de extensión de un concepto. Sin embargo, no usó las extensiones de conceptos en su desarrollo de la teoría de cuantificación, la cual es, por lo tanto, superior a la de Peano, desde el punto de vista moderno. Aún así, aunque Peano no fue tan exitoso como Frege, al igual que éste fue conducido por su programa de investigación mucho más allá de los confines de la lógica aristotélica tradicional.

Lo fructífero de los programas de investigación de Frege y de Peano es una sorprendente ejemplificación de las ideas que Grosholz propone en "Was Leibniz a Mathematical Revolutionary?" (*RM* 117-133). Grosholz argumenta que la reunión de dominios conectados puede a veces resultar en un significativo y rápido aumento del conocimiento. Ella ilustra esto con un recuento de cómo Leibniz inventó y desarrolló el cálculo por medio de su síntesis de la geometría, el álgebra, la teoría de números y la mecánica. Similarmente, los avances revolucionarios de Frege y Peano surgieron de reunir la lógica con la aritmética. Grosholz adicionalmente argumenta que la reducción de un dominio a otro es menos fructífera que una unificación parcial en la cual los dominios "[c]omparten algo de su estructura al servicio de la solución del problema, sin embargo retienen su carácter distintivo" (*RM* 118). A primera vista parece que esta descripción se ajusta a Peano mejor que a Frege, dado que la meta de Frege era reducir la aritmética a la lógica. Realmente, no obstante, me parece que la idea de Grosholz se aplica a ambos pensadores, puesto que, aunque Frege tenía como propósito la reducción de la aritmética a la lógica, en la práctica consiguió sólo una unificación parcial de los dos dominios.

Los progresos hechos por Peano en lógica pueden igualmente conducir a cuestionar la conveniencia de la expresión "la revolución fregeana en lógica". Puede ser argumentado que, si bien Frege fue indudablemente brillante y realizó grandes adelantos en lógica, su trabajo, infortunadamente, no fue leído o apreciado, de modo que la lógica moderna actual no se deriva de Frege, sino del trabajo de Peano como fue desarrollado por Russell. Sólo después de que se completó la revolución, puede argumentarse, los trabajos de Frege fueron descubiertos y apreciados. Así, Frege se anticipó a una revolución, de la cual, de hecho, hizo poco o nada para efectuarla.[15]

Este punto de vista es plausible, pero ha sido presentado como falso por Nidditch en su importante artículo "Peano and the Recognition of Frege" (1963). Aquí Nidditch demuestra convincentemente que a lo largo de los años 90 del siglo XIX, cuando se desarrollaba su programa en lógica matemática, Peano tenía conocimiento del trabajo de Frege y lo había estudiado cuidadosamente. Niddtich también muestra que fue a través de Peano que Russell llegó a conocer el trabajo de Frege y que Russell también estudió y tuvo en cuenta los escritos de Frege. En una

[15] Esta objeción fue hecha cuando, el 22 de Junio de 1989, leí una versión previa de este artículo al taller de fundamentos de las matemáticas en la Universidad de Cambridge.

etapa posterior Frege fue estudiado por Hilbert y por Church. Todo esto justifica la afirmación hecha anteriormente de que, aunque Frege fue leído por pocas personas, entre éstas se incluyen figuras clave, de manera que Frege ejerció una importante influencia en la revolución en lógica durante todo su desarrollo y no sólo después de conseguida la victoria.

Nidditch (1963) da una detallada lista de todas las referencias a Frege publicadas por Peano. Aquí menciono sólo algunas de ellas. La primera referencia de Peano a Frege aparece en "Los principios de la lógica matemática" (1891), donde dice que en el *Begriffsschrift* Frege introduce una notación para la implicación a→b (notación bidimensional de Frege, que consideraremos en la siguiente sección). Esto muestra que Peano conocía el *Begriffsschrift* en 1891. En 1895 Peano publicó una reseña del Volumen I de *Grundgesetze der Arithmetik* (1893). Frege escribió una carta a Peano, fechada el 29 de septiembre de 1896, contestando dicha reseña, y Peano publicó la carta con una respuesta (Peano 1899). Mientras tanto, Frege escribió un artículo, al cual ya hemos hecho referencia, discutiendo la notación conceptual de Peano. Éste fue publicado en 1897. Estos intercambios muestran que puede ser bastante equivocado considerar a Frege completamente aislado e ignorado por Peano y su escuela.

Es, sin embargo, igualmente equivocado atribuir todo a Frege y olvidar las contribuciones de Peano y sus seguidores. La más importante contribución intelectual dejada por Peano está tal vez en la notación que ideó para la lógica matemática. Casi todas las notaciones lógicas modernas son tomadas directamente de Peano o son variaciones sencillas de la notación por él usada; el cuantificador existencial considerado antes en esta sección es un bonito ejemplo. En contraste, la notación bidimensional de Frege tuvo un gran número de limitaciones importantes, las cuales consideraremos en la siguiente sección, y probablemente constituyeron una barrera importante en la comprensión y aceptación de sus ideas.

La segunda contribución importante de Peano al desarrollo de la nueva lógica tiene un carácter más sociológico. Frege, por toda su genialidad, fue un individuo aislado e introvertido, que tuvo gran dificultad para llevar sus ideas a otros miembros de la comunidad académica interesada en el tema. En contraste, Peano fue una persona gregaria y sociable. Organizó un grupo de estudiantes para que le ayudaran a continuar con el desarrollo de la lógica matemática, y realizaba conferencias cuyo tema era la importancia de la materia misma. Fue a través de la escuela de Peano que Bertrand Russell se interesó en la lógica matemática. Como Russell dice en su *Autobiografía* (1967):

> En Julio de 1900, hubo un Congreso Internacional de Filosofía en París en conexión con la Exhibición de ese año. Whitehead y yo decidimos ir a este congreso y acepté una invitación para leer un artículo allí [...]. El congreso fue un cambio de posición en mi vida intelectual, pues allí encontré a Peano. Ya lo conocía por nombre y había visto algo de su obra, pero no me había tomado la molestia de dominar su notación. En las discusiones del congreso, observé que era siempre más preciso que cualquiera y que invariablemente obtuvo lo mejor de cualquier argumento sobre el que se embarcara. Cuando los días pasaron, pensé que esto se debía a su lógica matemática. Conseguí por consiguiente que él me diera todos sus trabajos y tan pronto como culminó el congreso, me retiré a Fernhurst a estudiar calladamente cada palabra escrita por él y por sus discípulos. Era claro para mí que su notación se permitía el lujo de ser un instrumento de análisis lógico tal como lo había buscado hace años, y que estudiándolo estaba adquiriendo una nueva y poderosa técnica para el trabajo que quería realizar desde hace tiempo. Por el final de agosto ya estaba familiarizado completamente con la obra de su escuela. Pasé septiembre extendiendo sus métodos a la lógica de relaciones. Parece ser, en mirada retrospectiva, que en ese mes todos los días fueron calurosos y soleados. (144)

De hecho, Peano concebía el desarrollo de la nueva lógica como una actividad colectiva. Animó a novatos, como Russell, a trabajar en la materia, y trató de incorporar los resultados de otros investigadores, tales como Frege, en su sistema. Su actitud se hace muy clara en la respuesta a la carta de Frege, donde empieza refiriéndose a "[...] la carta más importante del Señor Frege, que contribuirá a la clarificación de varias dificultades y puntos controversiales en lógica matemática" (Peano 1958 295), y termina diciendo que: "[e]l *Formulario di Matematica* no es el trabajo de un individuo, sino una empresa de colaboración mutua; todas las observaciones que contribuyan a su crecimiento y mejoría serán recibidas con gratitud" (Peano 1958 296). Un nuevo paradigma nunca es el trabajo de un genio aislado, con todo lo brillante que sea. Su creación requiere alguien que pueda organizar un grupo de investigadores y despertar el interés en las nuevas ideas entre la amplia comunidad académica.

## 5. Algunas características adicionales de las revoluciones en matemáticas

Los anteriores colaboradores de este volumen [*Revolutions in Mathematics*] han discutido acontecimientos que pueden ser característicos de las revoluciones en matemáticas. Resulta interesante ver si estas características estuvieron presentes en el caso de la revolución fregeana en lógica; dedicaré la sección final de este artículo a investigar este asunto. Más específicamente, consideraré dos características propuestas. La primera, sugerida por Dunmore, es el cambio de metanivel; la segunda, discutida por Dauben y Giorello, es la resistencia a las nuevas ideas (o incluso contrarrevolución).

Empecemos entonces con el criterio de Dunmore para revoluciones en matemáticas. De acuerdo con ella, una revolución en matemáticas ocurre si y sólo si una doctrina de metanivel sobre las matemáticas es "derrocada e irrevocablemente desechada" y es remplazada por una nueva visión. Por ejemplo, antes de la geometría no euclidiana, virtualmente todos los matemáticos se suscribían a la doctrina de metanivel de que había sólo una geometría posible, llamada geometría euclidiana, que la verdad de esta geometría podía ser establecida *a priori* y que esta geometría era la geometría correcta del espacio. Después del descubrimiento de la geometría no euclidiana esta doctrina fue "derrocada e irrevocablemente desechada", para ser reemplazada por la visión de que un cierto número de geometrías diferentes son posibles. Debido a este cambio de metanivel, el descubrimiento de la geometría no euclidiana es, para Dunmore, una revolución en matemáticas. Dunmore ha hecho, según creo, una importante contribución en atraer la atención a la que es una característica frecuente de las revoluciones en matemáticas. Particularmente, trataré de mostrar ahora que el cambio de metanivel ocurre en la revolución de Frege en lógica.

Antes de la revolución fregeana en lógica era ampliamente sostenida la creencia de metanivel de que la lógica tradicional contenía una formulación completa y definitiva de las leyes de la lógica. Este punto de vista se encuentra de manera muy clara y explícitamente en Kant. Éste siempre supuso que la visión aristotélica de los juicios tiene la forma sujeto/predicado, y su tabla de categorías supuestamente *a priori* es basada en su propia versión de la lógica tradicional. Además, en el prólogo a la segunda edición de la *Crítica de la razón pura* dice sobre la lógica:

> Que la lógica ha llevado ya esa marcha segura desde los tiempos más remotos, puede colegirse, por el hecho de que, desde Aristóteles, no ha tenido que dar un paso atrás, a no ser que se cuenten como correcciones la supresión de algunas sutilezas inútiles o la determinación más clara de lo expuesto, cosa empero que pertenece más a la elegancia que a la certeza de la ciencia. Notable es

> también en ella el que tampoco hasta ahora hoy ha podido dar un paso adelante. Así pues, según toda apariencia, hállase conclusa y perfecta. Pues si algunos modernos han pensado ampliarla ello proviene de que desconocen la naturaleza peculiar de esa ciencia. [...] El límite de la lógica empero queda determinado con entera exactitud [...]. (Kant B viii-ix)

Kant era todavía la influencia dominante en filosofía cuando Frege empezó su trabajo en lógica. Más aún, la opinión de que la lógica aristotélica era un tratamiento final y definitivo de la lógica fue sostenida por muchos que estaban muy lejos de ser kantianos. Un llamativo ejemplo tardío de ello es *La science allemande* (*La ciencia alemana*) de Duhem (1915). Este trabajo, escrito durante la Primera Guerra Mundial, es un ataque a la ciencia alemana, y Kant es también criticado severamente por sus características alemanas (*cf.* Duhem 1915 17-18, 35-7). Ciertamente, Duhem describe la *Crítica de la razón pura* como "[...] el más largo, el más oscuro, el más confuso, el más pedante comentario" (Duhem 1915 17), ¡en un dicho particular de Pascal! A pesar de esta polémica, sostiene una visión similar a la de Kant con respecto a la lógica aristotélica: "[h]ay un método general de deducción; Aristóteles ha formulado sus leyes para siempre (*pour toujuours*)" (Duhem 1915 58). Por supuesto que Duhem no era un matemático o lógico profesional, pero trabajaba en los, estrechamente relacionados, campos de la física y de la historia y filosofía de la física. Además era, en sentido informal, un maestro en lógica.[16] Es notable, entonces, que para 1915 parezca no ser consciente de la nueva lógica y que sostenga que Aristóteles tiene la última palabra en el tema. Todo esto muestra que la revolución en lógica de Frege realmente ocasionó cambios de visión en el metanivel de la materia.

Vamos ahora a revisar la *resistencia* como característica de las revoluciones en matemáticas. Dauben expone el punto muy claramente:

> [La] resistencia a nuevos descubrimientos puede ser tomada como un claro indicador de su carácter revolucionario [...]. Tal vez no hay mejor indicación del carácter revolucionario de un nuevo avance en matemáticas que el grado de oposición que encuentra. La revolución, entonces, consiste tanto en superar la oposición establecida, como en la naturaleza visionaria de las nuevas ideas mismas. (*RM* 63-64)

Hay claramente acuerdo sobre la evidencia de resistencia a las nuevas ideas de Frege.

El trabajo de Frege fue, inicialmente, extensamente ignorado. Peano fue realmente el primero en apreciar algunos de los logros de Frege, pero ello ocurrió sólo en los años 1890s, más de una década después de la aparición del *Begriffsschrift*. Hay más evidencia de resistencia a las ideas de Frege en las primeras reseñas del *Begriffsschrift*. Bynum, en su traducción de 1972 del *Begriffsschrift*, recogió convenientemente estas reseñas y las tradujo al inglés en un apéndice del libro cuando fue necesario. Leyendo estas reseñas se tiene una vívida impresión de la reacción al trabajo de Frege por parte de sus contemporáneos.

Hay seis reseñas. Las de Hoppe y Lasswitz de hecho son medianamente favorables: ambas elogian a Frege por haber rechazado el análisis aristotélico con la forma sujeto/predicado de las proposiciones. El punto de vista opuesto es tomado por Tannery, cuya corta reseña es completamente despectiva, como muestran los siguientes fragmentos:

[16] Es extraño decir que la gran habilidad lógica es bastante compatible con el chovinismo, como el caso de Frege también lo muestra.

> [L]as explicaciones son insuficientes, la notación es excesivamente compleja; y en lo que a las aplicaciones concierne, se quedan sólo en promesas [...]. El [autor] suprime los conceptos de *sujeto* y *predicado* y los remplaza por otros que llama *función* y *argumento* [...]. No podemos negar que esta concepción no parece ser muy fructífera. (Tannery 1879 233)

Michaelis es totalmente despreciativo con los esfuerzos de Frege y ciertamente le reprocha sólo criticar y no hacer contribuciones constructivas:

> Para sus propósitos, Frege tiene que pasar por encima de muchas cosas en lógica formal y quitar incluso más de su [ya escaso] contenido [...]. No dudo, sin embargo, que exceptuando la insatisfactoria clasificación [de los juicios], el trabajo [aristotélico] es completo. Uno no debe sólo criticar, uno debe contribuir constructivamente. (Michaelis 1880 217)

Pero concluye su reseña con la sentencia: "[s]u trabajo [sin embargo] continúa, obviamente, siendo original y por supuesto no carece de importancia" (Michaelis 1880 218).

La reseña más larga es la de Schröder, y su visión general del *Begriffsschrift* es resumida agudamente en el siguiente pasaje:

> [E]l presente pequeño libro hace un avance que considero muy estimable, si una gran parte de lo que intenta no ha sido ya obtenido por alguien más, y ciertamente (como probaré) en un modo indudablemente más adecuado. (Schröder 1880 220)

Como veremos al examinar con más detalle algunas de las críticas de Schröder, aquel "alguien más" era Boole, o quizás Boole y los booleanos, incluido Schröder mismo. La cuestión es puesta más explícita y convincentemente por Venn, quien escribe en su reseña:

> [N]o me parece que el plan del Dr. Frege pueda por un momento ser comparado con el de Boole. Debería suponer, ya que no hace referencia cualquiera al último, que no lo conoce, ni algunas de las modificaciones de éste con las que estamos familiarizados aquí. Claramente los méritos que reclama para su propio método son comunes a todos los métodos simbólicos. (Venn 1880 234)

Los que es sorprendente aquí es el total fracaso de Schröder y Venn en apreciar los grandes avances que Frege ha hecho más allá de Boole.

Nuestro primer análisis sugirió que la resistencia a las ideas de Frege probablemente provendría de adeptos al viejo paradigma aristotélico y de aquellos que trabajaban en el alternativo programa de investigación booleano. Las reseñas del *Begriffsschrift* en gran parte confirman esto. Un punto interesante, sin embargo, es que la crítica de Frege al análisis aristotélico sujeto/predicado de las proposiciones es apreciado por dos críticos, por lo cual tal vez había en la época un sentimiento de insatisfacción hacía la lógica aristotélica. Por otra parte, otro crítico (Tannery) no encuentra mérito en la crítica de Frege al análisis sujeto/predicado, mientras que otro (Michaelis) parecía pensar que, con una pequeña modificación, "el trabajo [aristotélico] es completo". Los dos críticos que estuvieron trabajando en el programa de investigación booleano (Schröder y Venn) están en completo acuerdo en que la propuesta de Frege es inferior a la de Boole. Es así que quizás no es accidental que el primer investigador significativo en lógica en apreciar el trabajo de Frege (*i. e.* Peano) estaba trabajando, no en el programa booleano original, sino en un nuevo programa de investigación bastante similar al de Frege mismo.

Frege fue, entonces, un pensador cuyas innovaciones no fueron, en general, ni comprendidas ni apreciadas por sus contemporáneos familiarizados con viejas formas de pensamiento. No obstante, hay un factor particular que pudo hacer su trabajo innecesariamente difícil para sus contemporáneos, y es su peculiar notación bidimensional. Claramente la reseña más detallada de Frege (la de Schröder) distingue este rasgo en favor de su crítica, a menudo bastante justificada, y la escritura bidimensional de Frege es la única parte de su lógica que nunca ha sido aceptada. Trataré de explicar brevemente la notación de Frege y las objeciones que pueden hacérsele.

Frege escribe el contenido de una proposición $A$ como


Si la proposición es afirmada, escribe


donde la pequeña línea vertical es su señal de afirmación. Él basa su tratamiento del cálculo proposicional en dos conectivos, la implicación material y la negación (en nuestra notación $\rightarrow$ $\neg$).

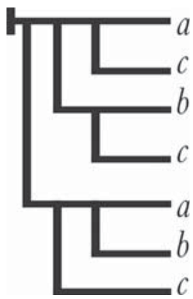
Escribe $\neg A$ como


a lo cual nada se puede objetar, pero $A \rightarrow B$ lo escribe como


Este procedimiento da al *Begriffsschrift* de Frege su peculiar carácter bidimensional. Esta notación nos permite prescindir de corchetes. Así, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ se escribe


mientras $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ se escribe como

El segundo axioma de Frege para el cálculo proposicional que en nuestra notación es $(c\rightarrow(b\rightarrow a)) \rightarrow ((c\rightarrow b) \rightarrow (c\rightarrow a))$, es escrito por él (*cf.* 1972a 140) como




Esto da una efectiva ilustración de cómo la notación de Frege convierte una hilera horizontal en una columna vertical.

Schröder comenta lo que sigue sobre la notación de Frege:

> De hecho, el lenguaje de fórmulas del autor no sólo permite la práctica japonesa de la escritura vertical, sino que también lo limita a sólo *una* hilera por página, o a lo sumo, si contamos la columna añadida a la explicación, ¡dos hileras! Este monstruoso desperdicio de espacio que, desde un punto de vista tipográfico (como es evidente aquí), es inherente a la "notación conceptual" fregeana, debe decidir definitivamente la cuestión a favor de la escuela booleana —si, ciertamente, todavía hay un asunto de elección—. (Schröder 1880 229)

Aquellos acostumbrados a la lectura de lenguas europeas ciertamente encuentran más fácil seguir una caligrafía escrita en líneas de izquierda a derecha. En castellano, por ejemplo, la condicional se escribe "si *A*, entonces *B*", de forma que la expresión simbólica $A\rightarrow B$, que soporta una analogía obvia, es fácil de entender. La fórmula de Frege


es análogamente difícil de comprender. Sin embargo, la comparación de Schröder de la notación de Frege con caligrafías escritas verticalmente, como la china o la japonesa, es engañosa. Todos los lenguajes naturales, si se escriben de derecha a izquierda, de izquierda a derecha, o verticalmente, son lineales, y la manera en la que la notación de Frege difiere de todas ellas es en que es bidimensional.[17]

Schröder tiene razón, no obstante, cuando dice que la notación de Frege es un "desperdicio de espacio", como el lector puede ver fácilmente comparando el segundo axioma de Frege en su propia notación, con el mismo axioma escrito en la notación más usual (como se mostró hace unas líneas). Pero Schröder es culpable de un *non sequitur* cuando dice que este desperdicio de espacio "debe decidir definitivamente la cuestión a favor de la escuela booleana". Como mucho, el desperdicio de espacio muestra que Frege tenía una mala notación para la condicional

[17] Este punto me fue sugerido en una conversación con Moshé Machover.

material, no que su sistema entero es inferior al de Boole. Sin embargo, este *non sequitur* pudo haber sido por lo menos en parte responsable de la pobre recepción del *Begriffsschrift*.

Otra desventaja de la notación de Frege es que no nos permite introducir abreviaturas para los otros conectivos. Supongamos, por ejemplo, que tenemos un desarrollo axiomático-deductivo del cálculo de proposiciones, introduciendo $\rightarrow$ y $\neg$ como conectivos principales. No tenemos, por supuesto, que introducir algunos conectivos adicionales, ya que $\rightarrow$ y $\neg$ son suficientes por sí solos para expresar cualquier proposición compuesta del cálculo. Sin embargo, es muy conveniente para la claridad y la concisión introducir los otros conectivos como abreviaturas, tales como:

$A \vee B =_{\text{def}} \neg A \rightarrow B$,

$A \wedge B =_{\text{def}} \neg(A \rightarrow \neg B)$.

Pero la notación de Frege no nos permite introducir tales abreviaturas en alguna manera conveniente; requiere que escribamos todas las proposiciones compuestas en la notación primitiva. Schröder (1880 227) destaca un ejemplo particularmente llamativo de esto: "[a]hora, a fin de representar, por ejemplo, la disyunción 'o' —a saber, declarar que *a vale o b vale*, *pero no ambos*— el autor tiene que usar el esquema


que definitivamente aparece torpe comparado con el modo booleano de escritura [...]". Aquí, Schröder está característicamente defendiendo la escuela booleana contra Frege, pero el punto es en verdad más general que esta disputa particular. Si la 'o' exclusiva es necesaria en el tratamiento habitual, podemos fácilmente introducir una abreviatura (ciertamente, $A \overline{\vee} B$ es a veces usada para ello). No obstante, en la notación de Frege, la complicada expresión tiene que ser escrita completamente en cada caso.

Debe ser observado, a propósito, que Schröder obviamente había leído cuidadosamente el *Begriffsschrift*. Destaca un error cometido por Frege (1972a 117): "[p]odemos ver al mismo tiempo fácilmente que


niega el caso en que $B$ es afirmado, pero $A$ y $\Gamma$ son negados".

De hecho, la definición verbal de Frege corresponde a la fórmula (en nuestra notación) $B \rightarrow (A \vee \Gamma)$, en lugar de la que proporciona, la cual es $(B \rightarrow A) \rightarrow \Gamma$. Schröder comenta en este contexto que "el autor, infortunadamente comete un error (7 —sin embargo, es el único que noto en todo el libro—)" (1880 229). Schröder también admite que Frege puede expresarse generalmente mejor que Boole, pero añade que "[...] no se puede quizás encontrar aquí una justificación para sus otras desviaciones de la notación de Boole, y las modificaciones análogas o extensiones pueden ser fácilmente conseguidas en la notación booleana misma" (*íd.* 229-30).

Es posible, entonces, que si Frege hubiese sustituido su notación bidimensional para la implicación material por una lineal, su trabajo podría haber sido recibido más favorablemente. No obstante, Frege apuntó sus armas y rechazó las consideraciones de sus críticos en este punto. En una respuesta a la reseña de Schröder, "Sobre el objetivo del *Begriffsschrift*", nos dice:

> La desventaja del desperdicio de espacio de la "notación conceptual" se convierte en una ventaja de claridad. La concisión de Boole es transformada en la desventaja de su ininteligibilidad. La "notación conceptual" hace lo máximo de la bidimensionalidad de la superficie de escritura permitiendo al contenido aseverable seguir uno debajo del otro mientras cada uno de éstos se extiende [separadamente] de izquierda a derecha. Así, los contenidos separados están claramente separados entre sí y, es más, sus relaciones lógicas son fácilmente visibles en una ojeada. Para Boole, una simple línea, resultaría por lo general excesivamente larga. (Frege 1972b 97)

La réplica de Frege al booleano Schröder es interesante, ya que revela cierta falta de confianza en un momento. Es verdad que Frege definitivamente sostiene que su tratamiento de la cuantificación es un avance con respecto a Boole. Hablando de su notación del cuantificador universal, dice lo siguiente: "[c]onsidero este modo de notación uno de los principales componentes de mi "notación conceptual", por la cual ésta también tiene, como una mera presentación de formas lógicas, una ventaja considerable sobre el modo de notación de Boole" (1882 99). Pero, cuando compara su *Begriffsschrift* con el lenguaje formal leibniziano-booleano, dice: "[p]odemos preguntar "[...] si tal vez mi lenguaje formal gobierna una pequeña región" (Frege 1972b 98). ¿Fue Frege mismo, por lo menos parcialmente, inconsciente de la superioridad de su lógica sobre la de los booleanos?

Frege no cambió su pensamiento acerca de su notación bidimensional. Cuando compara su sistema de lógica formal con el de Peano, escribe:

> En la notación conceptual de Peano, la presentación de fórmulas en una sola línea ha sido aparentemente cumplida en principio. Me parece esto una renuncia gratuita a una de las mayores ventajas de dicha escritura. Después de todo, la conveniencia del tipógrafo no es ciertamente el *summum bonum.* Por razones fisiológicas es más difícil con una línea larga obtener de una ojeada y aprehender la articulación, que con líneas más cortas (dispuestas una abajo de otra) obtenidas fragmentando la más larga —con tal de que esta partición corresponda a la articulación del sentido—. (Frege 1984 236)

## Reconocimientos

Una versión previa de este artículo fue dada como conferencia en el taller de fundamentos de matemáticas en la Universidad de Cambridge el 22 de Junio de 1989. Estoy muy agradecido con aquellos que me hicieron comentarios en esa ocasión, particularmente a Paolo Mancosu, John Mayberry y a una persona a quien no conozco, pero cuya objeción es considerada en la sección 4. Algunos extractos del artículo fueron leídos como una contribución a un simposio sobre revoluciones en matemáticas en una Conferencia en San Sebastián, España, el 27 de Septiembre de 1990. De este evento, estoy no sólo agradecido con los comentarios de la audiencia, sino con las discusiones informales a lo largo de la conferencia con mis compañeros del simposio Joseph Dauben y Giulio Giorello. He recibido también los comentarios muy útiles de Charles Chihara, Dov Gabbay, Colin Howson, Moshé Machover, Elliott Mendelson y de Arthur Miller.

## Bibliografía

Aristóteles.

*Ética Nicomáquea. Ética Eudemia*, trad. Pallí Bonet, J. Madrid: Gredos, 1988.

Bell, J. L. & Machover, M.

*A Course in Mathematical Logic.* Amsterdam: North-Holland Pub. Co, 1977.

Boole, G.

[1847] *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Oxford: Basil Blackwell, 1948.

Detlefsen, M.

*Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism.* Berlin: Springer, 1986.

Duhem, P.

*La sicence allemande*. París: Hermann, 1915.

Frege, G.

[1879] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Traducción al ingles en: *Conceptual Notation and Related Articles*, trad. Bynum, T. W. Oxford: University Press, 1972a: 101-203.

[1882] "On the Aim of the *Begriffsschrift*". *Conceptual Notation and Related Articles.* Oxford University Press, 1972b: 90-100.

[1884] *The Foundations of Arithmetic. A Logico-Mathematical Enquiry into the Concept of Number*, trad. Austin, J. L. Basil Blackwell, 1968.

[1897] "On Peano's Conceptual Notation and My Own". *Gottlob Frege. Collected Papers*, McGuinness, B., ed. Basil Blackwell, 1984: 234-48.

Gillies, D., ed.

[*RM*] *Revolutions in Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 1995.

Heijenoort, J. V.

*From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. Harvard: Harvard University Press, 1967.

Kant, I.

*Crítica de la razón práctica*, trad. Miñana Villagrasa, E. y García Morente, M. México: Porrúa, 1972.

Keynes, J. N.

*Studies and Exercises in Formal Logic.* Londres: Macmillan, 1884.

Kitcher P. S.

*The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press, 1983.

Koestler, A.

*The Sleepwalkers. A History of Man's Changing Vision of the Universe*. Hutchinson, 1959.

Kuhn, T.

[1962] *La estructura de las revoluciones científicas*, trad. Contin, A. México: fce, 1998.

Lakatos, I.

"Falsificationism and the Methodology of Scientific Research Programs". *Philosophical Papers*, Worrall, J. & Currie, G. eds. Vol. 1, 1978: 8-101.

Lukasiewicz, J.

"On the History of the Logic of Propositions". *Polish Logic* 1920-1939, McCall, S., ed. Oxford: Oxford University Press, 1967: 66-87.

Masterman, M.

"The Nature of a Paradigm". *Criticsm and the Growth of Knowledge*, Lakatos, I. & Musgrave, A, eds. Cambridge: Cambrige University Press, 1970: 59-89.

Mendelson, E.

*Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.

Michaelis, C. Th.

"Review of Frege's *Begriffsschrift*". *Conceptual Notation and Related Articles*, Bynum, T. W., ed. Oxford: Oxford University Press, 1880: 212-18.

Miller, A.I.

*Imagery in Scientific Thought. Creating* $20^{th}$ *Century Physics*. Cambridge: mit Press, 1987.

"Have Incommensurability and Causal Theory of Reference Anything to Do with Actual Science? Incommensurability, No; Causal Theory, Yes", *International Studies in the Philosophy of Science* 5 (1991): 97-108.

Moore, G.H.

"The Emergence of the First Order". *History and Philosophy of Modern Mathematic*, Aspray, W. & Kitcher, P., eds. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988: 95-136.

Niddich, P.

"Peano and the Recognition of Frege", *Mind* 72 (1963): 103-110.

Peano, G.

[1888] "The Operations of Deductive Logic". *Selected Works of Giuseppe Peano*, Kennedy, H.C C., ed. Londres: Allen & Unwin, 1973. 75-79.

[1889] *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. Traducción al ingles en *Selected Works of Giuseppe Peano*, Kennedy, H. C., ed. Londres: Allen & Unwin, 1973. 101-134.

[1891] "The Principles of Mathematical Logic". *Selected Works of Giuseppe Peano*, Kennedy, H. C., ed. Londres: Allen & Unwin, 1973. 153-161.

[1895] "Review of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*". *Opere scelte*, Vol. 2. Roma: Cremonese, 1958: 189-195.

[1897] "Studies in Mathematical Logic". *Selected Works of Giuseppe Peano*, Kennedy, H. C., ed. Londres: Allen & Unwin, 1973. 190-205.

[1899] "Rispota ad una lettera di G. Frege, preceduta dalla letrera di Frege". *Operete suelte*, Vol. 2. Roma: Cremonese, 1958: 288-296.

Popper, K. R.

*Realism and the Aim of Science*. Londres: Hutchinson, 1983.

Russell, B.

*The Autobiography*. Londres: Allen & Unwin, 1967.

Shapere, D.

"The Structure of Scientific Revolutions", *Philosophical Review* 73 (1964): 383-394.

Schröder, E.

[1880] "Review of Frege's *Conceptual Notation*". Reimpreso en: *Conceptual Notation and Related Articles*, Bynum, T. W., ed. Oxford: Oxford University Press, 1972: 218-232.

Strawson, P. F.

*Introduction to Logical Theory*. Londres: Methuen, 1952.

Tannery, P.

[1879] *Begriffschrift*. Reimpreso en: *Conceptual Notation and Related Articles*, Bynum, T. W., ed. Oxford: Oxford University Press, 1972. 232-233.

Venn, J.

[1880] "Review of Frege's *Begriffsschrift*". Reimpreso en: *Conceptual Notation and Related Articles*. Bynum, T. W., ed. Oxford: Oxford University Press, 1972. 234-235.

Wittgeinstein, L.

[1912-13] "Review of Coffey: *The Science of Logic*", *Cambridge Review* 34 (1913): 351. Reimpreso en: *Wittgenstein: A Life. Young Ludwing*, 1889-1921, McGuinness, B., ed. Londres: Penguin, 1990. 169-170.