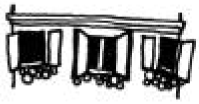
SOBRE LA FUNDAMENTACIÓN DISCONTINUA DE LA MATEMÁTICA



MARTHA DUQUE SALAS
Universidad Nacional de Colombia

Resumen: Mi propósito principal es mostrar, teniendo en cuenta las observaciones de Kuhn acerca de las revoluciones en la ciencia, algunas consideraciones que sugieren una concepción de la matemática como una actividad discontinua. Para tal efecto, tomaré tres grandes episodios de la historia de la matemática que comparten una característica esencial: el intento fallido por fundamentar, por encontrar bases sólidas para el desarrollo seguro de la ciencia matemática. Tales episodios, en los que, a mi parecer, se han producido las crisis y, posiblemente, las subsecuentes revoluciones (términos acuñados por Kuhn), son: la fundamentación pitagórica de la matemática, la fundamentación euclidiana de la matemática y la fundamentación cantoriana de la matemática.

Abstract: The central purpose of this paper is to show, according to the observations of Kuhn on the revolutions in science, some considerations that suggest a conception of mathematics as a discontinual activity. Thus, I will consider three great episodes in the hystory of mathematics which share an essential characteristic: the failed attempt to find solid grounds for a sure development of mathematical science. Such episodes, in which the named crisis has occured with the subsequent revolutions (in Kuhnian terms), are: the pythagorical, the euclidian and the cantorian grounding of mathematics.

Introducción

Como hace notar Ritter, las matemáticas gozan de una fama ambivalente entre los historiadores de las ciencias (Ritter, 1991, p. 1). Para unos, las matemáticas son un río, un flujo permanente de incrementos graduales, acumulativos, en el que cada individuo, generación y civilización añade su riachuelo al mismo gran río; en algunas ocasiones, las condiciones del terreno por el que pasa el río pueden desviar por un momento su flujo, y hasta detenerlo, pero fácilmente se reafirma la fuerza y el impulso interno del dominio, y el gran río puede continuar su curso. En cambio, para otros, las matemáticas son exclusivamente la obra de pocos grandes genios, hombres brillantes que, gracias a su profundo pensamiento y a su originalidad, hacen contribuciones definitivas que artesanos menores se conformarán con desarrollar, pero que de ninguna forma dichas contribuciones son el resultado de previos incrementos graduales. A mi parecer, ambos casos son exesivamente radicales.

Por un lado, y como pretendo mostrar, el desarrollo de la matemática no ha sido (como comunmente se cree) meramente continuo; su crecimiento no se debe sólo a innumerables aportes todos de carácter acumulativo: la ciencia matemática no es únicamente una actividad que se rige según unas determinadas y casi que eternas reglas de trabajo. Pecaríamos al considerar su evolución como constituyente de lo que Kuhn caracteriza como ciencia normal. Sin embargo, la ciencia matemática ha protagonizado capítulos que se ciñen con cierta fidelidad a lo que Kuhn llamó actividad normal, pero éstos no son más que episodios, comparados con toda la obra matemática hasta hoy generada. Hay que tener en cuenta que después de una larga actividad de resolución de problemas (anomalías), la comunidad matemática debe enfrentar enigmas que piden para sí un pronto remedio; debe ocuparse de enmendar cuanta fisura se pronuncie dentro de la actividad. Dichas fisuras son los principales síntomas de crisis dentro de la actividad normal de la matemática, y son precisamente tales crisis, las que nos permiten hablar de esta ciencia, no solamente como una actividad acumulativa, sino en cierto modo como una actividad revolucionaria, categoría que, según Kuhn, es completamente opuesta al antes mencionado término normal[1]. Pero, por otro lado, la matemática tampoco es producto de unos pocos hombres de ciencia, que sucesivas generaciones casi insignificantes han de seguir. Si bien el desarrollo de la matemática es (podríamos decir) hasta cierto punto discontinuo, ello no quiere decir que aquellos que hacen las revoluciones estén limpios de todo concepto matemático antes dado, y que la nueva orientación de la disciplina matemática sea una elección individual; se trata, mejor, de problemáticas colectivas determinadas históricamente. Hoy en día, por ejemplo, es insostenible la tesis de la minúscula influencia de las culturas egipcia y mesopotámica en la "más civilizada Grecia", como también es impensable una mecánica newtoniana sin un Galileo o un Kepler[2] o, más recientemente, una teoría de conjuntos sin un Riemann o un Dedekind.

Antecedentes

Por lo general, el estudio de los orígenes de la matemática no tiene gran atractivo entre sus historiadores. Los genios desconocidos que crearon la disciplina (egipcios y babilonios) vivieron demasiado temprano en la historia de las ciencias como para dar testimonio válido de su trabajo. Por ello, opina Ritter, los escasos historiadores que escudriñan los rastros más prematuros de la matemática son considerados por sus colegas como "bichos exóticos" que se contentan con balbuceos pueriles, superados hace ya bastante tiempo y olvidados, con razón, por los matemáticos en ejercicio y por aquellos que los estudian (ibid., p. 1). En efecto, Egipto y Mesopotamia, dos de las grandes civilizaciones antiguas, pasan

[1] Un paradigma, según Kuhn, no es solamente una teoría; un paradigma define problemas, métodos y hasta instrumentos legítimos de investigación. Dicha investigación (ciencia normal) está basada firmemente en una o más realizaciones científicas pasadas, que alguna comunidad, científica también, reconoce durante cierto tiempo, como fundamento para su práctica posterior. Por ejemplo, la *Física* de Aristóteles y el *Almagesto* de Ptolomeo: sirvieron para definir problemas, métodos e instrumentos que sucesivas generaciones de astrónomos adoptaron. Dichas obras lograron tales alcances, debido a que, entre otras cosas, fueron lo suficientemente incompletas como para dejar al grupo de astrónomos muchos problemas por resolver. Sin embargo, muchos de estos problemas (anomalías) no fueron remediados satisfactoriamente, hasta el punto en que la teoría geocéntrica no resistió un enmiendo más y se produjo en ella una crisis.

Las crisis en las teorías científicas regularmente nos predicen cuándo éstas son susceptibles de un pronto cambio en la concepción normal de la ciencia; estos cambios son las llamadas revoluciones científicas, con las cuales se da la bienvenida a un nuevo paradigma, legitimado con distintos métodos y problemas de investigación al del sustituido (Vease Kuhn, Cap.III, p.112-127).

[2] Cabe recordar que el mismo Newton estaba convencido de que "todo lo que vio, lo vio gracias a que estaba sobre hombros de gigantes".

inadvertidas para los historiadores de la matemática a la hora de atribuir papeles protagónicos dentro del desarrollo de la actividad. Sin embargo, esta consideración resulta engañosa. A pesar de que estas dos culturas desarrollaron un conocimiento matemático urgido por las necesidades de organización de la vida en sociedad, los cálculos alcanzados eran realmente eficaces y gozaban de un nivel ciertamente elaborado. En Mesopotamia, por ejemplo, sabían resolver ecuaciones de segundo grado, en tanto que en Egipto, manejaban ciertas fracciones. Ambas culturas recurrían a las tablas para efectuar operaciones dadas. Se manipulaban, por ejemplo, tablas de multiplicar, de raíces cuadradas y raíces cúbicas.

Pero lo verdaderamente importante de la matemática en Mesopotamia y en Egipto, es que ésta se desarrolló conjuntamente con la escritura. Para que ésta última surgiera fueron centrales las necesidades materiales, en particular, la necesidad de guardar registros de transacciones. La necesidad de medir, dividir y repartir el poderío material de sus sociedades, fue lo que produjo el nacimiento de los primeros sistemas de escritura (o al menos esto es lo que muestran los descubrimientos arqueológicos de los últimos decenios). Estos descubrimientos arqueológicos nos revelan una actividad matemática vinculada a lo social y a lo cultural de la época. Precisamente este sentido práctico de la matemática es lo que separa a Grecia de civilizaciones como la mesopotámica y la egipcia. Mientras en estas dos se procedía algorítmicamente, es decir, se seguía una serie de pasos sin justificación pero que permitían llegar a un resultado correcto (procedimiento que se repetía para cada conjunto de datos), en Grecia no solamente estaban interesados en generalizar mediante fórmulas, también lo estaban en la organización de los conocimientos que poseían. Mientras en Egipto se calculaba cómo hacer un granero redondo, es decir, de sección circular (cuyas dimensiones se escriben como "9 y 10") o, para ser más exactos, cómo encontrar el volumen de un cilindro, no en "codos cúbicos" sino en una unidad práctica de medida (su capacidad en granos), en Grecia los datos y los resultados eran abstracciones; allí la matemática ya no tenía una orientación práctica sino demostrativa. Los intereses en Grecia eran otros, como el de inscribir un triángulo en un círculo o el de duplicar un cubo. Lo importante era establecer las propiedades de las distintas figuras geométricas y sus posibles relaciones: "Los egipcios poseían algunos conocimientos matemáticos pero no más que los que necesitaban para construir sus pirámides, o para medir sus campos. Los griegos empezaron a estudiar tales materias por el gusto de inquirir" (Russell, 1962, p. 22).

1. Crisis en la "fundamentación pitagórica" de la matemática

Después de que Tales de Mileto introdujo en Grecia la geometría conocida en Egipto, y de que Pitágoras va allí a causa de la conquista de Jonia por parte de los persas, éste (Pitágoras), inicia la organización de dichos conocimientos geométricos. Pitágoras, afirma Proclo, hizo del estudio de la geometría una enseñanza teórica al indagar los principios y al estudiar los problemas desde un punto de vista puramente abstracto y conceptual. Los pitagóricos, comenta Aristóteles (Met. A5, 985 b 23), cultivaron las matemáticas y las hicieron avanzar. Creyeron que los principios de ellas eran principios de todas las cosas existentes, esto es, los números, los primeros de toda la naturaleza, los elementos de todo lo existente. Uno de sus propósitos era asignar números a las cosas. Así, decían que una cosa determinada poseía número, una indeterminada no. Los números eran, pues, realidades naturales: "Un número era, para los pitagóricos, un arreglo de puntos cuya disposición no arbitraria manifestaba propiedades. De esta manera, los pitagóricos pretendían conocer las cosas mediante las propiedades de los números que les eran asignados" (Campos, 1994, p. 87). Así, por ejemplo, un número triangular era un triángulo de puntos de esta manera:

```
                          .
              .          . .
     .      . .        . . .
.  . .  . . .  . . . ., etc.
```

y se expresaba mediante la siguiente progresión aritmética, cuyo primer término es 1 y cuya razón es 1:

1 = 1
1 + 2 = 3
1+2+3 = 6
1+2+3+4= 10
1+2+... +n = [n (n+1)] / 2

En este ejemplo elemental de la matemática pitagórica se deja ver lo que Bourbaki quiere decir cuando afirma: "Si hay que tener como auténtica la tradicional máxima «Todas las cosas son números» de los primeros pitagóricos se la puede considerar como la traza de un primer intento por unificar la geometría y el álgebra de la época con la aritmética" (Bourbaki, 1969, p.35).

Puede intuirse, por la idea de número descrita anteriormente, que este concepto para los pitagóricos estaba reservado estrictamente a los enteros naturales >1 (1 es la mónada y no un número propiamente hablando). No solamente estaban excluidos los irracionales, sino también los racionales; estos últimos porque no son más que razones de números, es decir, relaciones entre los verdaderos números; y los irracionales porque no son siquiera razones de números. En efecto, y aunque el ejemplo suene trivial, si todas las cosas son números, y si ?2 es un número, entonces, ¿hay, por ejemplo, alguna cama que tenga de largo ?2? ¿Qué clase de propiedades manifiesta el arreglo de puntos que le corresponde al número ?2, si es que ?2 es un número? Si ?2 no es susceptible de ser representado mediante una disposición de puntos, no arbitraria, entonces ?2 no es un número (responderían los pitagóricos); pero entonces esta afirmación traería como consecuencia el hecho de que no todas las cosas son números y, con ello, el fracaso de la máxima pitagórica o, al menos, la modificación de su teoría[3].

Pero no era suficiente con hacer una clasificación entre aquellas cosas que son número y las que no son número. Para Aristóteles, el problema de los pitagóricos fue haber identificado la causa formal con la substancia, es decir, haber dicho que el número era la substancia de las cosas que existían en sí. Por esta razón, la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con uno de sus lados introdujo un desorden dentro del cuerpo de la matemática y dentro de la *physis*. El intento pitagórico de fundamentar la matemática en los números naturales había fracasado, y como puede verse, dicho intento fallido obedecía tanto a motivos filosóficos, como matemáticos. Como primera medida, estaba en tela de juicio la teoría del conocimiento, y con ésta, el problema de qué es lo que verdaderamente existe (si algo era susceptible de ser representado mediante una disposición de puntos y, por ello, geométricamente, entonces ese algo existía). Como segunda medida, el descubrimiento de la irracionalidad de ?2 estremeció y puso en peligro la teoría fundamental de la semejanza de triángulos. Una manera de ilustrar tal problema es la siguiente: sean X y Z dos triángulos semejantes, donde a, b y c son los lados del triángulo X, a´, b´, c´ son los lados del triángulo Z, y, además, suponemos que los

[3] Recordemos que precisamente fueron los pitagóricos quienes descubrieron y probaron por *reductio ad absurdum* la irracionalidad de ?2.

lados a y a´ designan lo que comúnmente conocemos como hipotenusa del triángulo. La relación entre (b, b´) y (c, c´) es susceptible de expresarse mediante números enteros, pero la relación entre (a, a´) no corre con la misma suerte, y de esta forma la semejanza de los triángulos X y Z es únicamente parcial. Igualmente, dicho descubrimiento tuvo serias consecuencias para el álgebra, porque demostrar el simple problema de encontrar un X tal que $X^2 = 2$, que se propone con tanta facilidad, no tenía solución en números, en el sentido en que lo entendían los pitagóricos. Por otro lado, el descubrimiento pitagórico de la irracionalidad de ?2, pertenece al campo matemático que lleva posteriormente (con el programa de la rigorización del análisis del que hablaré más adelante) al conocimiento preciso de número real y, por ello, dicho descubrimiento da un golpe directo al cuerpo de las matemáticas.

A la luz del criterio pitagórico de número, y con todas sus consecuencias en los procesos de límites, en la semejanza y en el álgebra, muchas de las antiguas demostraciones perdían toda su fuerza de convicción y quedaban convertidas en argumentos aparentes. Si se quería salvar las matemáticas era necesario dotarlas de bases más consistentes. A Eudoxio le tocó la tarea de proveer a las matemáticas de una sólida cimentación. Eudoxio (una generación más joven que Platón), rescató la teoría de la semejanza al establecer un nuevo criterio para determinar cuándo una razón es mayor que otra. Logró su propósito utilizando como única base los números enteros, pero lo llevó a cabo de tal manera que sus definiciones comprendían tanto elementos racionales como irracionales. El criterio de Eudoxio constituyó el único fundamento de todos los procesos de límites que aparecieron después en las obras griegas de matemáticos de carácter serio y científico.

2. Crisis en la "fundamentación euclidiana" de la matemática[4]

Como bien enuncia Falk, "la correspondencia neopitagórica entre ley matemática y ley de la ciencia física, la relación inextricable entre los objetos del estudio matemático y los objetos del mundo real que ellos idealizan, había generado un criterio de existencia esencialmente geométrico" (Falk, 1990, p. 8). A pesar del descubrimiento de la irracionalidad de ?2, los griegos mantenían el criterio según el cual un ente matemático existe si y sólo si se le puede dar una interpretación geométrica. Esto explica la enorme aceptación que tuvo la obra *Elementos* de Euclides dentro de la comunidad matemática griega.Euclides no solamente recogió y ordenó los materiales procedentes de la libre investigación, sino que lo hizo axiomáticamente. *Elementos* se convirtió en el texto más famoso, y durante 22 siglos, fue el único paradigma del sistema formal. Pero su influencia no fue sólo matemática; la obra euclidiana, "en cuanto sistema formal rígidamente construido sobre principios evidentes, incontestables, de raíz ontológica, de los cuales pueden derivarse con toda naturalidad toda suerte de verdades adquiridas anteriormente y entre la que deben injertarse aquellas con visos de verdad" (Campos, 1994, p. 7), se estableció como el modelo a seguir, tanto por filósofos como por matemáticos y físicos posteriores. Para mencionar unos pocos casos propongo como ejemplo a Descartes, Spinoza, Leibniz, Newton, Kant y Hilbert.

En total, la obra de Euclides contiene 131 definiciones repartidas en 13 libros. En cada uno de estos 13 libros aparecen invariables 5 postulados y 5 nociones comunes o axiomas. Actualmente la axiomática se concibe como una construcción a partir de principios adoptados convencionalmente. Entre dichos

[4] En este episodio de la historia de la fundamentación de la matemática, sigo de manera regular la exposición del profesor Campos.

principios se encuentran los procedimientos para la construcción, reglas de construcción que en Euclides corresponderían a los postulados. En efecto, los postulados 1 y 2 indican para qué utilizar la regla: para unir dos puntos cualesquiera (postulado 1) y para prolongar una recta finita dada (postulado 2). El postulado 3 indica qué compás se emplea para trazar círculos. Sin embargo, los postulados 4 y 5 no son, propiamente hablando, reglas de construcción. El postulado 4 (todos los ángulos rectos son iguales entre sí) es más un principio general que una construcción con un instrumento. Y lo que presenta el quinto postulado es más bien una especie de consecuencia, aquella que indica que «si una línea recta incide sobre dos líneas rectas, hace ángulos internos por un mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas prolongadas indefinidamente se encuentran por el lado en que están los ángulos menores que dos ángulos rectos».

En palabras de Proclo "...el postulado y el axioma deben contener ambos lo sencillo y lo fácil de entender" (Cit. en Vera, 1970, p. 1171). Sin embargo, los hechos que presenta el quinto postulado no se perciben en una construcción. Entre postulado y axioma se ve la misma relación que entre el teorema y el problema: estos tienen en común que son demostrables, aquellos, que son indemostrables. De esta manera, geómetras posteriores a la obra de Euclides creyeron ver un error de tipo axiomático en la obra. Para unos, Euclides no debió incluir el postulado quinto, pues, según ellos, éste era deducible o estaba implícito en la obra misma, es decir, definitivamente el quinto postulado no era un postulado sino un teorema. Para otros, el quinto postulado ni siquiera era necesario en el sistema, pues, sin él, es posible demostrar ciertos teoremas que Euclides había demostrado a condición del postulado quinto. "Fuera como fuera, el problema consistía en ver razones para no aceptar el quinto postulado como postulado y en ver alguna manera de demostrarlo" (Campos, 1994, p. 162), es decir, de deducirlo, sea con los otros supuestos de los *Elementos*, o bien, incurriendo en petición de principio, es decir, a condición de que para su prueba se acepte una premisa equivalente al postulado quinto.

De esa manera, procedió, por ejemplo, Proclo de Licia quien es siete siglos posterior a Euclides. También lo hizo Ptolomeo (excelente astrónomo del siglo II de nuestra Era), Omar Jayam (1050-1123), Nasir Edin (1201-1274), Cristoph Clavio (1537-1612), John Wallis (1616-1703), y otros más. Gerolamo Saccheri (1667-1773) fue la excepción. Saccheri escribió la obra: *Euclides vindicado de toda mancha,* en la que quiso mostrar que Euclides procedió correctamente al asumir el quinto postulado. Para ello, Saccheri procedió según el método por *reductio ad absurdum*, esto es, supuso que si el quinto postulado se sigue de los supuestos de los *Elementos,* entonces su negación debe conducir a una contradicción dentro de la obra. Efectivamente, la contradicción se hizo patente y, por ello, Saccheri concluyó que el quinto postulado es verdadero, que se sigue de los supuestos de la obra, y que, como consecuencia de ello, «Euclides no había cometido ninguna falla lógica al asumirlo». Ciertamente, «todo el plan de Saccheri fue correcto»; sin embargo, hoy en día sabemos que la negación del quinto postulado genera las geometrías no euclidianas, hecho del que Saccheri no se percató dado el prejuicio neopitagórico antes mencionado: un ente matemático existe si y sólo si se le puede dar una interpretación geométrica, o lo que resultaba igual, una interpretación euclidiana. Una hipótesis no euclidiana era inconcebible. El espacio geométrico euclidiano era el único pensable, era el que nos mostraba tal cual la realidad. "Cuando se cree que las verdades de la geometría euclidiana concuerdan universalmente con la experiencia, se cree también que tal geometría es la única posible, que es connatural con la manera de percibir de los seres humanos"(Campos, 1994, p. 7). Este es el parecer de uno de los filósofos más reputados de la modernidad. En efecto, Kant era uno de los que pensaba que el ser humano, en cierta medida, es naturalmente euclidiano, en tanto que percibe euclidianamente. Por ello, es de esperar que, con la evolución de la geometría, los matemáticos se sintieran en aprietos y les costara un gran esfuerzo mental admitir la primera geometría no euclidiana (la de Bolyai-Lobachevski). Después de la invención de las geometrías no euclidianas, la teoría del conocimiento no podía ser la misma, como tampoco se podía seguir pensando que la matemática y la lógica estaban hechas de una vez por todas. Dichas geometrías provocaron en el siglo XIX una crisis profunda en la filosofía de la matemática y básicamente en toda la teoría del conocimiento humano. El hecho de que éstas estuvieran completamente fundamentadas desde el punto de vista de su lógica interna, hizo que se cuestionara lo que hasta ese momento se tenía por verdadero, por existente. En efecto, si la geometría describe la realidad ¿cuál de todos los sistemas geométricos es el verdadero? ¿Cuál de ellos corresponde a la realidad? Así pues, el poder de poseer la verdad se había escapado de la matemática, lo único que indicaba la teoría del conocimiento era una pérdida de la certidumbre. Había que reconsiderar una cantidad de supuestos, como el de la filosofía pitagórica-platónica de la matemática, que descansa sobre la correspondencia entre la matemática y sus leyes, y las leyes del universo.

3. Crisis en la "fundamentación cantoriana" de la matemática[5]

El rompimiento de la unidad interna de la matemática fue un hecho; su fundamentación en la geometría se trivializó. Se hizo necesario volver a hallar bases firmes para la matemática, y Gauss tuvo la respuesta: "Solamente las leyes de la aritmética son necesarias y verdaderas". De esta manera, importantes investigadores iniciaron una movimiento de retorno a los fundamentos, movimiento que culminó con la llamada aritmetización del análisis matemático (ciencia que recoge el álgebra, la aritmética, el cálculo diferencial e integral).

El cálculo (como diciplina matemática) introdujo inevitablemente el manejo del infinito y particularmente el manejo de las series infinitas. Estos enfoques condujeron a importantes matemáticos a encontrar, mientras desarrollaban sus trabajos, paradojas de difícil resolución. Semejante hecho les hizo dudar de las bases en que el cálculo se encontraba fundamentado, y decidieron entonces subsanarlas. De esta manera, en la primera mitad del siglo XIX, matemáticos de la talla de Cauchy, Dirichlet, Bolzano y Weierestrass iniciaron la fundamentación del cálculo basada únicamente en conceptos aritméticos. Dicha fundamentación produjo:

- Un entendimiento más general de la noción de función.
- Definiciones de límite y continuidad en las que no se recurría a la noción «metafísica» de cantidades infinitesimales, sino a los números reales "tan pequeños como se quiera".
- Y, finalmente, la diferenciación entre sucesión convergente y divergente, y criterios de convergencia

[5] En la primera parte de este tercer apartado sigo la exposición de la profesora Falk.

Lo más notable de haber realizado un análisis más riguroso (del cálculo) es que ello permitió la eliminación de los infinitesimales, pero basó el análisis en los números reales; y, en efecto, transladó el problema al estudio y a la adecuada fundamentación de estos números. Sólo hasta la segunda mitad del siglo XIX, se contó con una fundamentación lógica del sistema de los números reales; antes ni siquiera había una definición clara de estos números. Pero las definiciones no solamente fueron obscuras para los reales; en sí, hubo poca claridad en el sistema numérico, de hecho, se puso en claro que las dificultades, en últimas, se centraban en los irracionales, y que el significado y las propiedades de los irracionales presuponían la construcción firme de los racionales. El más conocido intento por fundamentar adecuadamente los números irracionales fue el de Dedekind. Basándose en la noción de «cortadura» , éste, definió número real como una «cortadura» de números racionales. Es de sumo interés mencionar que en el procedimiento (expuesto en 1872), para la definición de los reales, Dedekind hizo uso de conjuntos (infinitos) de números racionales. También otros tratamiento de los irracionales, como el de Otto Stolz y el de Georg Cantor hicieron referencia ineludible al infinito. En su teoría de los irracionales, presentada en 1883, Cantor identificó un número real con una sucesión fundamental de números racionales: cada número real es un conjunto (sucesión) infinito de números racionales. De esta manera, la fundamentación de los números reales comprometió a la comunidad matemática a trabajar con el infinito actual. Posteriormente, se inició la construcción del sistema de los números naturales, enteros y racionales, cimentándose así, y como último paso, la matemática sobre la aritmética de los números naturales. El escenario quedó entonces preparado para recibir las teorías innovadoras de Cantor, teorías que lanzarían una vez más a la matemática a otra crisis en su fundamentación. La teoría de conjuntos respondió directamente a ciertas dificultades que se encontraban en la obra de la re-fundamentación de la matemática sobre la base de la aritmética.

Ahora bien, es importante destacar dos aspectos de los cuales se ocupa la teoría de conjuntos. Primero, es una teoría matemática que permite la manipulación teórica del infinito; y segundo, con ella se logra (en su momento) la conjuntización[6] de la matemática, o, aquello que es casi lo mismo, su fundamentación. A partir de la definición de conjunto infinito como aquél que se puede poner en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio, y de la definición de número infinito (transfinito) como el número (cardinal) de un conjunto infinito, podemos anotar, someramente, algunos alcances de la teoría de conjuntos, mencionados por Cantor:

- Hay diferentes órdenes de infinito: hay conjuntos que se pueden poner en correspondencia uno a uno con los números naturales y otros que no son susceptibles a tal correspondencia. Los primeros se llaman conjuntos numerables[7], los segundos, no numerables.[8] De ello se concluye que el número de elementos de los conjuntos no numerables pertenece a un orden superior que el infinito de los números naturales.[9]
- Se logró la diferenciación entre un número cardinal y un número ordinal: número cardinal hace referencia a la cantidad de elementos de un conjunto, y número ordinal al tipo de orden de los elementos de un conjunto.

[6] Conjuntizar la matemática es equivalente a fundamentarla mediante la teoría de conjuntos a la manera de Cantor y la escuela logicista

[7] Cantor demuestra que los números racionales, los números construibles con regla y compás y los números algebraicos, constituyen conjuntos numerables.

[8] De igual forma, Cantor prueba que el conjunto de los números reales y el de los puntos sobre un segmento no son numerables.

[9] De esta manera se construye una aritmética que incluye números infinitos basada en una teoría de conjuntos.

▫ También se logró la manipulación del infinito en acto, superándose así la proscripción antigua, debida a Aristóteles, del infinito actual en matemáticas.

Interpretando a Hilbert, antes que un "Nadie ha de poder expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros", hay mejor un "No queremos ser expulsados del paraíso que Cantor ha creado para nosotros". Sin embargo, cualquier posición pasa ser obstinada ante al evidencia implacable de una paradoja. La primera fue expuesta el 28 de marzo de 1897 en un encuentro del Círculo Matemático di Palermo y fue conocida con el nombre de Burali-Forti (Sánchez, 1996, p. 54). Éste era el enunciado: “dado un ordinal siempre existe uno mayor. Siendo ON el conjunto de todos los ordinales bien ordenado, este debe tener un ordinal ON + 1; pero, este último, es a la vez un elemento del conjunto, y también es mayor que todos”. En efecto, sea On la colección de todos los ordinales bien ordenada, y sea On+1 el ordinal mayor a On. Dado que On+1 es igualmente un ordinal pertenece al conjunto On, es decir, es un elemento de On. Pero On+1 es también el ordinal mayor de On (porque siempre, dado un ordinal, hay uno mayor que el ordinal dado), entonces, On+1 es a la vez elemento del conjunto On y mayor que On.

Gottlob Frege (1848-1925), al igual que Cantor, trabajó en la fundamentación conjuntista del análisis, e igualmente su sistema condujo a paradojas. Bertrand Russell le señaló a Frege la inconsistencia de su sistema, demostrándole que su principio de abstracción (toda propiedad define un conjunto) llevaba a una contradicción. Veamos. Existen conjuntos que no poseen la propiedad que los define, como sería, por ejemplo, el conjunto de todos los hombres (que evidentemente no es un hombre), pero existen conjuntos que sí poseen la propiedad que los define, como por ejemplo, el conjunto de las ideas abstractas. Para formular lo anterior, llamemos R al conjunto de los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, esto es:

R = {X? X? X } y preguntemos: ¿Es R un elemento de R o no lo es?

Si R?? ??R? R ? ?R

Si R ? ?R ? R? R

de lo que concluimos:

R ? ?R? ?R ? ?R

La contradicción es inmediata y sus repercusiones en la teoría de conjuntos también, pues ésta alude al concepto de pertenencia, concepto fundamental de esa teoría.

Como estas dos paradojas surgieron otras más, pero sólo bastaba una de ellas para que la teoría de conjuntos fuera un sistema inconsistente y para que, de nuevo, la cimentación de la matemática comenzara a temblar. La matemática estaba otra vez en crisis, y otra vez las respuestas no se hicieron esperar. Los bandos se dividieron entre aquellos que definitivamente rechazaban la teoría de conjuntos, y aquellos que la defendían y trataban de encontrar soluciones a sus paradojas. De esta manera surgieron, como respuesta directa a las paradojas, tres escuelas de la filosofía de la matemática: logicismo (sus máximos exponentes fueron Russell y Frege), intuicionismo (Kronecker y Brouwer) y formalismo (con Hilbert a la cabeza). Como bien sabemos, tanto la primera como la última, intentaron defender la teoría aportando soluciones a las paradojas. En tanto que la segunda escuela fue una inmensa opositora (posición que le mereció la fuerte crítica de gran parte de la comunidad matemática, pues, al rechazar la teoría de conjuntos, se estaba rechazando una enorme parte del avance de la matemática): botaba por la borda una cantidad de soluciones y aportes que la teoría de conjuntos había facilitado. Estas escuelas tenían un propósito en común: la fundamentación de la matemática. Sin embargo, faltaba un golpe certero, aquel que acabaría con ese esquizofrénico pero justificado afán por encontrar bases sólidas para la matemática. En 1931 Gödel dio dicho golpe: publicó unos teoremas en los cuales demostró (entre otras cosas) que todo sistema formal que contenga la aritmética, contiene proposiciones no susceptibles de demostración o de refutación dentro del mismo sistema, es decir, contiene proposiciones formalmente indecidibles. Demostró también que la consistencia de cualquier sistema formal que contenga la aritmética no puede ser probada, acabando así con las tres escuelas de la filosofía de la matemática (especialmente con el programa de Hilbert: axiomatización, formalización y prueba de la consistencia de las teorías formalizadas).

Características de las tres crisis

▫ *Elementos* sirvió tanto explícita como implícitamente, durante cierto tiempo, para definir los problemas, métodos e instrumentos de investigación dentro del campo de la actividad geométrica. Esta obra sirvió para tales fines debido a que fue lo suficientemente incompleta como para dejar un problema del cual geómetras posteriores se ocuparon. De esta manera, un gran número de matemáticos intentó responder durante 22 siglos al problema generado por el quinto postulado, hecho que desató, como dice Kuhn, una proliferación de teorías en competencia; pero ningún matemático consiguió una respuesta satisfactoria, ya que ésta se continuó ofreciendo bajo los métodos proporcionados por *Elementos,* es decir, según lo establecido por la actividad normal de la matemática de ese entonces. Sin embargo, con las geometrías no euclidianas se da una respuesta (aunque de tipo negativo) al problema en cuestión. Así pues, la negación del quinto postulado generó geometrías que de ninguna manera se desarrollaron con los parámetros de la geometría euclidiana. Fue imposible, por ejemplo, reducir el quinto postulado a la geometría de Bolyai-Lobachevski o, mejor aún, hacer de la geometría euclidiana un caso especial de las no euclidianas. Por ello, la actividad matemática no pudo continuar su curso normal (en el sentido de *ciencia normal* de Kuhn) y se vio obligada a aceptar dentro de su esquema una revolución: las geometrías no euclidianas se constituyeron en un nuevo paradigma, pero ello no quiere decir que la geometría euclidiana sea menos o más verdadera que las no euclidianas o que, estas últimas, contengan más o menos matemática que la primera.

▫ Por otro lado, en *Mathemátische Annalen*, donde Cantor expone, mediante artículos, su teoría de conjuntos, suministró problemas, métodos, y hasta formas de ver y de desarrollar la matemática. También fue lo bastante incompleta como para dejar un cierto número de problemas (paradojas) que ocuparon a sucesivas generaciones de matemáticos. Sin embargo, como en el primer caso, las respuestas no fueron definitivas. También en este episodio de la matemática se desató una proliferación de teorías en competencia; las tres escuelas de la filosofía de la matemática intentaron responder, distintamente, a las paradojas generadas por la teoría de conjuntos.

▫ Tanto en el caso de la crisis de la geometría euclidiana, como en el de la teoría de conjuntos, surgió una respuesta directa, de índole no acumulativo, al problema en cuestión: las geometrías no euclidianas (que surgieron de la negación del quinto postulado) para el primer caso, y los teoremas de Gödel para el segundo. En el caso de la crisis de la matemática pitagórica, Eudoxio respondió a los problemas originados (ver numeral 1).

▫ Los problemas que produjeron crisis fueron todos reconocidos desde mucho tiempo antes. La actividad *normal* de la matemática había proporcionado toda clase de razones para creerlos resueltos o casi resueltos; ello explica en gran medida por qué el sentimiento de fracaso es tan agudo cuando se da una respuesta directa a la crisis. Cuando se generaron las geometrías no euclidianas, el problema del quinto postulado llevaba 22 siglos intentando ser solucionado, y como pudimos ver, las geometrías no euclidianas estremecieron a toda la comunidad matemática y a toda la teoría del conocimiento humano, experimentándose, así, un síntoma de fracaso, especialmente en aquellos que vieron el espacio euclidiano como el único real.

Los enigmas no ceden (no se resuelven) ante los primeros ataques. Los pitagóricos y cierta parte de los neopitagóricos no desistieron de su idea de número como concepto solo atribuible a los enteros positivos, restricción que ocasionaba, junto con otras concepciones, la crisis. Por otro lado, en 1832 estaban publicados *Los principios de la geometría* de Lobachevski, pero hubo que esperar casi 40 años y el peso de la autoridad de Gauss, para que la nueva geometría despertara el interés del mundo matemática (Ver Campos, 1994, p. 270). Entre tanto, a pesar de las paradojas presentadas por la teoría de conjuntos, sus defensores logicistas y formalistas no perdían la esperanza de salvaguardarla, presuponiendo varias soluciones para ella.

Cambios del concepto de mundo

Cuando cambian los paradigmas matemáticos el mundo mismo cambia; los matemáticos adoptan nuevos instrumentos, nuevas formas de proceder, ven cosas que antes no veían. Pero no es que haya cambio de planeta, no hay —como diría Kuhn— trasplantación geográfica, sólo que los cambios de paradigma hacen que los matemáticos vean el mundo de investigación, que les es propio, de manera diferente (Kuhn,1971, p. 112-211). El matemático, luego de la superación de la crisis y del reconocimiento de un nuevo paradigma, debe iniciar un proceso de reeducación, debe aprender a ver conejos y no patos[10]. Antes de que el geómetra euclidiano escudriñe en el espacio de Bolyai-Lobachevski, debe comenzar un proceso de readaptación; por ejemplo, al ponerse "los lentes que le hacen ver" la geometría sobre un círculo del plano euclidiano o sobre la superficie de una esfera, seguramente sus razonamientos serán, por decirlo de alguna manera, torpes —como el caminar de un hombre cuando es obligado a utilizar lentes transversos. De igual manera, sus instrumentos dejan de ser la regla y el compás, y seguramente, después de un esfuerzo, observará que no siempre la suma de los ángulos internos de un triángulo es dos rectos, sino que dicha suma puede ser menor que dos rectos o mayor que dos rectos, según "los lentes sean de Bolyai-Lobachevski o de Riemman", respectivamente.

Con estas últimas consideraciones, espero haber cumplido mi propósito de mostrar la matemática como una actividad discontinua.

[10] Kuhn compara las transformaciones del mundo científico con cambios de la forma visual que en psicología se conocen con el nombre de cambios gestálticos; como por ejemplo, el del pato-conejo, una figura que, dependiendo de como se observe, se ve como un pato o un conejo, pero no los dos al tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES
"Metafísica". Ed. Planeta de Agustini, 1997. (Traducción y notas De Tomás calvo Martínez).

BOURBAKI (1969)
"Elementos de Historia de las Matemáticas" Ed, Hermann. París.

CAMPOS, Alberto (1994)
"Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides". Ed. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

CAMPOS, Alberto (1994)
"Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki". Ed. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

FALK, María (1990)
"Introducción a la matemática contemporánea". Ed. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

KUHN, Thomas (1971)
"La Estructura de las Revoluciones Científicas". Ed. Fondo de Cultura Económica. México.

RITTER, James. (1991)
"A cada uno su verdad: las matemáticas en Egipto y Mesopotamia". En: *Elementos de historia de las matemáticas*. Ed. Cátedra, Madrid.. Selección y adaptación del texto: Myriam Acevedo.

RUSSELL, Bertrand (1962)
"La Sabiduría de Occidente". Ed. Aguilar. Madrid.

SANCHEZ, Clara Helena (1996)
"El Surgimiento de la Teoría de Conjuntos". Publicado en el XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Ed. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá 2 al 6 de diciembre de 1996.

VERA, Francisco (1970)
"Científicos griegos". Volumen II. Ed. Aguilar. Madrid.