EL TEOREMA DE GÖDEL Y SU RELACIÓN CON LAS APORÍAS[1]

SERGIO ANDRÉS HENAO LÓPEZ
sergio.henao@gmail.com

GRUPO DE LIMITACIONES DE LOS FORMALISMOS
cilec_fch@unal.edu.co
Universidad Nacional de Colombia

Resumen: En este ensayo se revisará la estructura de la prueba del teorema de incompletitud de Gödel, el cual afirma que existen verdades acerca de los números naturales que no pueden ser deducidas dentro de un sistema formal o axiomático-deductivo de la aritmética. Esto se hará con el propósito de tener una idea general de la demostración y del significado del teorema, ya que una comprensión del mismo es necesaria para determinar si tiene implicaciones importantes en campos diferentes a la lógica matemática. Posteriormente compararemos la estructura del teorema con la estructura general de las paradojas matemáticas. Tal comparación se hace con el fin de señalar la estructura común que subyace a la prueba del teorema y a una paradoja.
Palabras clave: Gödel, teorema de incompletitud, sistemas formales, paradojas, aporías.

Abstract: In this essay we will revise the Gödel's incompleteness theorem proof structure with the purpose of making us an idea of this theorem, which affirms that truths exist about the natural numbers that cannot be deduced inside a formal or axiomatic-deductive system of arithmetic. The general comprehension of Gödel's theorem can be useful to determine if this theorem have important implications in non-logical topics. Later, we will compare the structure of the theorem proof with the structure of a mathematical paradox making a previous conceptual explanation about paradoxes. With this comparison we want to show the common structure that underlies to the theorem proof and a paradox.
Keywords: Gödel, incompleteness theorem, formal systems, paradoxes, aporia.

INTRODUCCIÓN

El nombre de Gödel suele citarse en estudios que aparentemente no tienen una relación directa con la Lógica o la Matemática. Su teorema de incompletitud es referido como una verdad establecida que demuestra y explica por qué los sistemas teóricos tienen siempre limitaciones con respecto a aquello que constituye su campo de estudio y por qué hay aspectos que no se pueden formalizar sistemáticamente. Afirmaciones como «ninguna teoría sociológica es suficiente para entender completamente el funcionamiento de la sociedad», «jamás se podrá elaborar un sistema de principios económicos que prediga exactamente la fluctuación del capital» o «el comportamiento humano no puede estar siempre guiado por un conjunto de máximas» parecen adquirir legitimidad a la luz del teorema de incompletitud de Gödel. También parece posible apoyarse en el teorema para afirmar que no existe ni se puede construir un sistema universal de conocimiento, lo cual puede ser entendido como un ataque directo al dogmatismo[2]. Del teorema de incompletitud se puede asimismo seguir que la interacción entre las disciplinas es necesaria para elaborar

[1] Agradezco a Carlos Márquez, quien fue mi compañero en esta investigación, por su colaboración y, sobre todo, por su amistad.

[2] Entendiendo 'dogmatismo' como un tipo de actitud subjetiva hacia las teorías, una disposición a considerar que el sistema de conocimientos defendido puede llegar a explicar *todo* lo que sucede en el sistema al que se refiere. Según mi punto de vista, ser dogmático es considerar que la teoría que se adopta constituye una perspectiva suficiente y única para comprender y explicar el objeto del que se ocupa el estudio.

sistemas de conocimiento más completos. Otra posible consecuencia del teorema sería el fracaso de todo tipo de reduccionismo con pretensiones absolutistas, entendiendo por esto último el intento de traducir o sustituir *todas* las proposiciones de diferentes tipos de teorías por proposiciones formuladas en el lenguaje de una sola de ellas. En epistemología y en filosofía de la mente, el teorema podría indicar que la concepción según la cual el intelecto humano es un sistema formal de transformación de información[3] es errónea, pues existen funciones del intelecto que no pueden sistematizarse con respecto a un conjunto de axiomas. Gödel mismo afirmaba que una de las más importantes implicaciones filosóficas de su teorema era que la mente humana sobrepasa las capacidades de una máquina (en el sentido especial de máquina de Turing), pues lo que el hombre puede comprender mediante su intuición de lo que es verdadero sobrepasa aquello que puede obtener mediante el razonamiento deductivo (Gödel, 1951).

El teorema de Gödel parece ser así un tipo de verdad sencilla rica en consecuencias y un resultado aplicable a cualquier tipo de teorías. Pero ¿cómo puede tener un teorema perteneciente a la lógica matemática tantas implicaciones para las diversas ramas del conocimiento?

Una buena metodología exige, antes de elaborar, considerar o evaluar las aplicaciones e implicaciones no-matemáticas del teorema, tener una comprensión aceptable del mismo y, además, investigar cuál es el papel de la lógica matemática en las demás ciencias para saber cómo un resultado perteneciente a aquel ámbito puede ser determinante en áreas diferentes del saber.

En este artículo se tratará el primer punto que se tiene que resolver con miras a solucionar el problema del valor y la validez de las implicaciones del teorema de incompletitud de Gödel, es decir, se intentará saber qué es lo que afirma y qué significa su enunciado, y se intentará dar una idea general de la prueba que lo implica. Para ello se ofrecerá una explicación y un esquema simplificado de la demostración del teorema, esquema que será comparado con la estructura de las 'paradojas' matemáticas tales como la 'paradoja' de Russell (más adelante señalaré por qué me propongo tratar este tema y por qué se entrecomilla el término 'paradoja').

I. El teorema de Gödel

a. Modelo, teoría, metateoría y lenguajes formales

Para entender el teorema de Gödel, es necesario tener claros algunos conceptos de la Lógica, principalmente los de *modelo*, *teoría* y *metateoría*. Se intentará ahora aclarar esos conceptos junto con algunas otras nociones básicas que se deben tener en cuenta para lo que se expondrá en el esquema de la prueba del teorema.

De manera muy general, un *modelo* es un conjunto de elementos que tienen ciertas propiedades y se relacionan entre sí[4], una *teoría* es un conjunto de proposiciones que hablan acerca de lo que sucede en un modelo, y una *metateoría* es un conjunto de proposiciones que hablan acerca de la teoría. Las proposiciones que conforman una teoría se expresan lógicamente por medio de un lenguaje formal de primer orden. Las *fórmulas bien formadas* [FBF's], proposiciones formuladas adecuadamente en el lenguaje formal de la teoría, son secuencias de signos enlazados de tal manera, que conforman expresiones que pueden evaluarse en términos de verdad o falsedad. Una FBF es verdadera si y solamente si los objetos del modelo referidos cumplen

[3] Según esta concepción, el funcionamiento del intelecto podría reducirse plenamente a unos pocos principios de transformación de información, análogos a los axiomas de un sistema lógico deductivo o a las reglas de un programa computacional clásico. Esta concepción puede encontrarse implícita en teorías que afirman que los principios de un sistema lógico (como los del cálculo proposicional clásico) capturan exactamente la manera como funciona la mente (en pocas palabras, en una teoría en la que se considera que la Lógica es el fiel reflejo del pensamiento), o en aquellas otras teorías que afirman que el cerebro funciona como un computador (entendiendo éste como una máquina de procesamiento de información análoga a un sistema axiomático).

[4] También se puede hablar del modelo como un *mundo* o *universo* constituido por objetos que tienen cualidades y se relacionan de alguna forma entre sí; mas se prefiere evitar estas expresiones, dada la connotación ontológica de los términos que involucran. Un modelo es una *situación* abstracta que no necesariamente corresponde a una situación fáctica o real. Podemos crear un modelo constituido por poliedros perfectos sin querer afirmar con ello que los poliedros existen de la misma manera en que existe una guitarra.

con la propiedad o la relación que se expresa en la fórmula, y es falsa en el caso contrario.

Una *teoría* es un sistema de FBF's de un lenguaje definido que se relacionan lógicamente entre sí o se refieren al mismo modelo. Todo sistema teórico de formulas se refiere a lo que sucede en uno o varios modelos; así, podemos definir una *teoría* como un conjunto ordenado de proposiciones que se expresa acerca de los objetos dados y las relaciones en las que éstos se hallan.

Una *teoría axiomatizada* es una teoría cuyas FBF's se derivan de una lista de FBF's primarias (*axiomas*) por medio de reglas específicas de deducción[5]. Si una proposición es deducida desde los axiomas por medio de las reglas de la Lógica, dicha proposición se considera válida y se llama *teorema*.

[5] Todas las FBF's se derivan de los axiomas, excepto los axiomas mismos.

La *demostrabilidad* de una proposición se refiere al valor de la deducibilidad que ésta tiene dentro de la teoría; la *validez* de una proposición se refiere al valor que ella tiene dentro del modelo. Una proposición es válida si es verdadera, es decir, si corresponde a una verdad del modelo. El propósito de axiomatizar una teoría puede verse como el intento por crear un aparato lógico que atrape en lo deducible todo lo que es verdadero; esto pondría de manifiesto que, en la tarea de axiomatizar una teoría, se trabaja con el principio según el cual el conjunto de proposiciones demostrables es igual de extenso al conjunto de proposiciones válidas.

Un sistema axiomático es *completo* si toda FBF verdadera con respecto al modelo es deducible en el sistema o, lo que es lo mismo, cuando se puede deducir en un número finito de pasos la afirmación –o bien la negación– de toda FBF de la teoría, esto es, cuando toda FBF es *decidible*. De manera más sencilla, la axiomatización de una teoría es completa si deduce todo lo que es verdadero o si se puede decidir a partir de ella la verdad o falsedad de cualquier FBF que pertenezca a la teoría.

B. Matemática y Lógica: teoría aritmética y modelo de los números naturales

Los conceptos lógicos de modelo, teoría y metateoría pueden ser aplicados en la Matemática. Cada uno de los conjuntos principales en los que se organizan los números (naturales, enteros, racionales, reales, imaginarios y complejos) constituye un modelo en sentido lógico; a cada uno de estos conjuntos corresponde una teoría de números, y se puede elaborar una metateoría que se refiera a las proposiciones que constituyen la teoría de números. La *aritmética* es aquella teoría cuyo modelo es el conjunto de los números naturales, las propiedades que los caracterizan o constituyen (ser primo, ser par, ser divisible por 13, etc.) y las relaciones que guardan entre sí (ser igual a, ser menor que, etc.). Las proposiciones aritméticas pueden ser expresadas en un lenguaje formal de primer orden; por ejemplo, una afirmación aritmética como «todo número natural es menor que el número natural que es su inmediato sucesor» se puede expresar formalmente como «$\forall x\, (x < S(x))$». El alfabeto de un lenguaje formal aritmético está constituido por un conjunto de *constantes* (que en el caso de la aritmética son los números naturales), un conjunto de *variables* ($x, x_2, x_{3\ldots}\, x_n$, y, z...) que representan objetos indeterminados del modelo, un conjunto infinito de *variables predicativas* (P, Q, R...) y *relaciones* (R) que expresan las propiedades de los objetos dados y las relaciones que se dan entre ellos, un conjunto infinito de *funciones* (f) que pueden verse como un tipo especial de relaciones, un conjunto de cuantificadores que afectan las variables ('$\forall$' y '$\exists$'{ «para todo» y «existe»}), el signo de negación ('$\neg$') y los signos de relación lógica entre los términos ('→'{implicación}, '∨' {disyunción}, '∧' {conjunción}...). Combinando estos signos mediante determinadas reglas sintácticas, se construye *fórmulas aritméticas bien formadas*.

La aritmética es la teoría de los números naturales y la *metaaritmética* es el conjunto de las consideraciones acerca de las propiedades de las fórmulas de la aritmética, tales como «esta proposición aritmética tiene tal extensión (cantidad de símbolos)», «esa proposición es un axioma», «aquella proposición tiene la propiedad de ser verdadera» o «tal proposición aritmética es deducible desde los axiomas de la teoría».

c. El problema de la fundamentación de la teoría formal axiomática de números

Antes de entrar en el estudio directo del teorema, es necesario reseñar brevemente un par de episodios de la historia de la Matemática que permiten contextualizar el trabajo de Gödel: se trata de la teoría de conjuntos de Cantor y de la fundamentación de la Matemática propuesta por Russell y Whitehead.

A finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, la discusión sobre la naturaleza y la fundamentación de la Matemática alcanzó una gran importancia entre los matemáticos. Esta discusión estaba en relación con el proyecto de formalización y axiomatización de la teoría de números, proyecto que se veía obstaculizado por el descubrimiento de algunas paradojas que revelaban la existencia de inconsistencias al interior de los sistemas formales axiomatizados.

Georg Cantor (1845-1918) es conocido por haber propuesto fundamentar la teoría de números en una teoría de conjuntos. Cantor descubrió una serie de problemas lógicos en su teoría, entre los cuales se destaca la llamada «paradoja de Cantor», que se puede formular como el siguiente acertijo: El universo de conjuntos se puede dividir en los conjuntos que se contienen a sí mismos y los que no. Se puede construir entonces el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. ¿Este conjunto pertenece a sí mismo?

Russell replantea la paradoja de Cantor con el concepto lógico de clase y muestra que no se puede dar una solución consistente al problema si se maneja un concepto de clase análogo al concepto de conjunto de Cantor (Paradoja de Russell): Si se puede construir una clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas, entonces es legítimo preguntar si esta clase está contenida en sí misma. Si la clase está contenida en sí misma, entonces tiene la propiedad de no contenerse a sí misma, como todos los elementos de su clase, lo cual es contradictorio; y si se dice que no está contenida en sí misma, dado que es un clase que no se contiene a sí misma, y que es la clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas, entonces se contiene a sí misma, lo cual también es contradictorio.

Uno de los aportes más importantes al proyecto de la formalización de la teoría de números es el de los filósofos y matemáticos británicos Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred Whitehead (1861-1947) en su obra *Principia Mathematica*, publicada entre 1910 y 1913. En esta obra Russell y Whitehead intentan fundamentar sólidamente la Matemática en la Lógica con el propósito de dar a los teóricos de la Matemática una base común para desarrollar sus demostraciones e investigaciones. Uno de los objetivos por los cuales Russell y Whitehead emprendieron la tarea de elaborar la formulación de un lenguaje preciso para la Matemática, fue el de solucionar las paradojas lógicas que surgían en la teoría de números al tratarla como una teoría de conjuntos.

D. ¿QUÉ DICE EL TEOREMA DE INCOMPLETITUD?

Kurt Gödel (1906-1978) publicó su primer teorema de incompletitud, conocido como el teorema de Gödel, en 1931. El teorema pertenece al ámbito de la lógica matemática y versa sobre el carácter incompleto de la teoría aritmética axiomatizada, es decir, afirma que existen proposiciones acerca de los números naturales que no pueden ser demostradas por un sistema formal deductivo. Dicho de otra manera, el teorema de Gödel indica que la axiomatización de la teoría de números (tal y como se hace en los *Principia Mathematica*) deja proposiciones aritméticas indecidibles. La demostración de Gödel consiste básicamente en demostrar que algo es indemostrable pero verdadero. Los puntos clave de esta demostración, la cual será expuesta y explicada enseguida, son la elaboración de una proposición metateórica verdadera que afirma de sí misma que es indemostrable y la elaboración de un sistema de traducción que permite formalizar proposiciones metateóricas dentro de la misma teoría de números.

El teorema de Gödel tiene además un corolario[6] que afirma que ningún sistema axiomático aritmético puede demostrar su propia consistencia (un sistema axiomático es *consistente* si no deduce contradicciones). Teniendo en cuenta que, con respecto a las teorías en general, una teoría aritmética axiomatizada es un canon de precisión y que por esta razón muchas teorías científicas (especialmente de la Física) se expresan como teorías matemáticas de carácter hipotético-deductivo[7], este corolario puede llegar a ser significativo para la filosofía de la ciencia, pues equivale a decir que una sola teoría, por más precisa que parezca ser, no garantiza por sí misma su propia coherencia.

[6] Un corolario es una proposición que se deduce mediata o inmediatamente de la demostración del teorema y del teorema mismo.

[7] Ésta es otra forma de referirse a una teoría axiomática. Una teoría axiomática es hipotética en tanto que sus axiomas no se demuestran (si se demostraran, no serían axiomas, y si la teoría no tuviera axiomas, no tendría un punto de partida para realizar las deducciones).

E. ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN DEL PRIMER TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

(TG) Teorema de incompletud de Gödel: $\exists P \ni \Sigma \nvdash P$ y $\Sigma \nvdash \neg P$

(1) Lema 1: $\exists \mathrm{Dem}(x) \ni \forall P[(\Sigma \vdash P) \Leftrightarrow (N \models \mathrm{Dem}(\#\bar{P}))]$

(2) Lema 2: $\forall \Psi \exists P \ni [\Sigma \vdash (P \leftrightarrow \Psi(\#\bar{P}))]$

(3) Lema 3: $\exists P \ni [\Sigma \vdash (P \leftrightarrow \neg \mathrm{Dem}(\#\bar{P}))]$

(TV) Teorema de validez: $(\Sigma \vdash P) \Rightarrow (N \models P)$

(DV) Definición de validez: $(N \models \neg P) \Leftrightarrow (N \not\models P)$

Prueba del TG por reducción al absurdo:

A) $(\Sigma \vdash P) \underset{3}{\Rightarrow} (\Sigma \vdash \neg \mathrm{Dem}(\#\bar{P})) \underset{TV}{\Rightarrow} (N \models \neg \mathrm{Dem}(\#\bar{P})) \underset{DV}{\Rightarrow} (N \not\models \mathrm{Dem}(\#\bar{P})) \underset{1}{\Rightarrow} (\Sigma \vdash P)$

B) $(\Sigma \nvdash \neg P) \underset{3}{\Rightarrow} (\Sigma \vdash \mathrm{Dem}(\#\bar{P})) \underset{TV}{\Rightarrow} (N \models \mathrm{Dem}(\#\bar{P})) \underset{1}{\Rightarrow} (\Sigma \vdash P)$

Símbolos utilizados en el esquema de la prueba:

$\forall$: "Para todo" / $\exists$: "Existe".

$\neg$: Negación. / $\ni$: "tal que".

$\leftrightarrow$: "Si y sólo si" a nivel teórico. / $\Leftrightarrow$: "Si y sólo si" a nivel metateórico (en los pasos de la prueba).

$\Rightarrow$: Implicación (en los pasos de la prueba).

$\vdash$: Deducibilidad ("[A partir de lo que está antes del signo] *se deduce que* [lo que sigue]"). / $\nvdash$: No deducibilidad.

$\models$: Validez ("[Lo que sigue] es *válido o verdadero* en el modelo". / $\not\models$: No validez.

Σ: Teoría axiomatizada de la aritmética - que contiene la aritmética de Peano (PA)-.

N: Los números naturales (modelo).

Dem: Predicado de prueba, indica que lo que le sigue es demostrable o deducible en Σ.

Ψ: Predicado de la metateoría trasladado a la teoría.

P: Sentencia. Sentencia que dice de ella misma que es indemostrable [P: $\neg$Dem(#$\overline{P}$)].

#: Indica que la sentencia que viene después está *numeralizada*, esto es, que se puede tratar la sentencia como un número.

$\overline{}$: Indica que el elemento del modelo (número) señalado está *gödelizado*, esto es, que se puede hablar de él como una fórmula o sentencia de la teoría.

E. Explicación del esquema ofrecido en la sección anterior

El esquema se puede dividir en tres partes: una en donde están las afirmaciones primarias que se utilizan en la prueba, otra en la que se hace la demostración, y otra en la que se enuncia lo demostrado. El punto clave del argumento es la afirmación según la cual se puede construir una sentencia verdadera P que afirma de sí misma que es indemostrable (tercer lema o conclusión). Esa afirmación se sustenta directamente en los dos primeros lemas, por lo cual la carga de prueba recae en éstos. Se explicará a continuación cada una de las partes en las que se ha dividido el esquema de la prueba:

1) Proposiciones que fundamentan la prueba:

(1) **Lema 1:** Existe un predicado de prueba tal que, para toda sentencia P, si la teoría deduce tal sentencia, entonces en el modelo es válida la fórmula que dice que # $\overline{P}$ es deducible, y viceversa.

(2) **Lema 2:** Para cualquier predicado metateórico que se pueda transportar a la teoría, existe una sentencia P tal que la teoría deduce: La sentencia P se da si y sólo si se da una fórmula en la que el predicado metateórico se aplique a la sentencia # $\overline{P}$

(3) **Lema 3:** Existe una sentencia P tal que la teoría deduce: P se da si y sólo si el número de Gödel de la sentencia $\overline{P}$ no es demostrable.

(TV) **Teorema de validez:** Si algo es deducible en la teoría, entonces es válido en el modelo.

(DV) **Definición de validez:** Si en el modelo es válida una sentencia, entonces no es válida la negación de esa sentencia [=]. Si en el modelo es válida la negación de una sentencia, entonces no es válida la sentencia afirmada.

2) Prueba:

La prueba del teorema de Gödel se hace por el método de reducción al absurdo. En una *prueba por reducción al absurdo*, se pone como hipótesis la proposición contraria a la que se quiere demostrar, y se muestra que tal hipótesis conduce a contradicción y que, por lo tanto, es insostenible negar la proposición, de tal manera que ésta queda demostrada.

El teorema de Gödel se demuestra argumentando que, al afirmar que la teoría es completa, se llega a una contradicción, y por ende la teoría es incompleta. La hipótesis de inicio para la demostración es, así, la negación del teorema. Si la teoría es completa, entonces deduce la sentencia P o su negación $\neg$P (que son FBF's). Así, la hipótesis inicial se divide en dos y la demostración del teorema tiene dos secciones: una [A] en la que se supone que la teoría Σ deduce la sentencia P, y otra [B] en la que se supone que deduce su contraria:

Prueba del teorema de Gödel por reducción al absurdo

Parte a) [Hipótesis de inicio: La teoría demuestra la sentencia P] Si la teoría Σ demuestra la sentencia P (que se construye combinando los poderes teóricos de

representabilidad y de auto-referencia), *entonces* deduce una sentencia que dice de sí misma que es indemostrable; *entonces*, por el teorema de validez, tal sentencia es válida en el modelo; *entonces*, por definición de validez, en el modelo no es válida la negación de la sentencia; *entonces*, por el lema uno, la teoría no demuestra la sentencia P, lo cual equivale a una inconsistencia en el sistema teniendo en cuenta la hipótesis de inicio. *Por lo tanto*, tal hipótesis es falsa, es decir, la teoría no demuestra la sentencia P.

Prueba del teorema de Gödel por reducción al absurdo

Parte b) [Hipótesis de inicio: La teoría demuestra la negación de P] Si la teoría Σ demuestra la negación de la sentencia P, *entonces*, por el lema 3, deduce el predicado de prueba de la sentencia que equivale al número de Gödel de $\overline{\mathrm{P}}$, es decir, afirma que P es demostrable; *entonces*, por el teorema de validez, el predicado de prueba de la sentencia que equivale al número de Gödel de la sentencia $\overline{\mathrm{P}}$ es válido en el modelo; *entonces*, por el lema 1, la teoría Σ demuestra P, lo cual, teniendo en cuenta la hipótesis de inicio, constituye una contradicción, por lo cual esta hipótesis ha de ser falsa. *Por lo tanto*, la teoría no demuestra la negación de la sentencia P.

3) Resultado de la prueba:

Teorema de incompletitud: Existe una sentencia P que la teoría Σ no puede deducir, ni a ella ni a su contraria.

F. EXPLICACIÓN DEL LEMA 1: SOBRE EL PODER DE REPRESENTACIÓN DEL LENGUAJE ARITMÉTICO

El teorema de Gödel es una afirmación metateórica que dice que existe una fórmula que, siendo verdadera en los números naturales, no puede ser demostrada. El paso crucial de la prueba consiste en poner a la teoría a hablar sobre números, pero a la vez ponerla a hablar sobre las sentencias de la teoría (poner a la metateoría en el mismo nivel que la teoría) por medio de un sistema de codificación que le asigna unívocamente a cada sentencia un número natural.

A continuación será construido un sistema de codificación análogo al utilizado por Gödel[8]. El primer paso es asignar a cada signo un número natural diferente:

∀ ... 1
) ... 2
→ ... 3
(... 4
¬ ... 5
a ... 6
b ... 7
P ... 8
Q ... 9
∃ ... 10
x ... 11
y ... 13
F ... 17
R ... 19

El siguiente paso es tomar una sentencia cualquiera de la teoría (digamos 'P(a)' [que puede significar que el número designado con la letra 'a' es primo]), descomponerla en sus signos básicos y convertirlos en los números asignados:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{P} & (& \mathrm{a} &) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 4 & 6 & 2 \end{array}$$

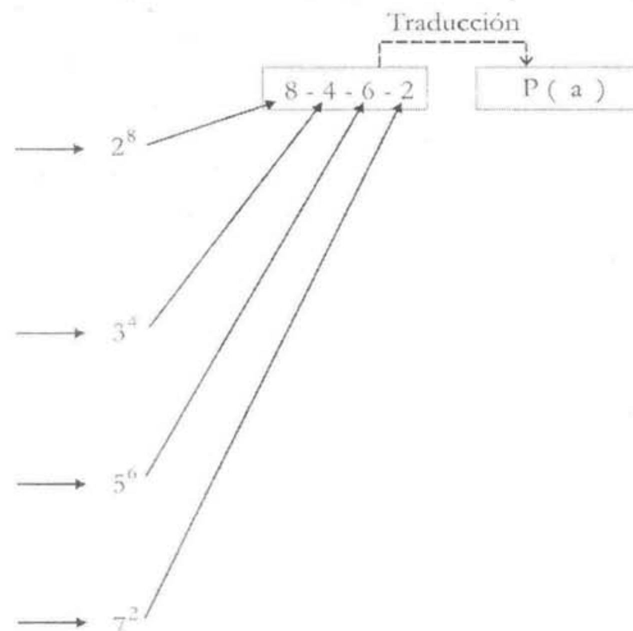
[8] Elaboraremos un esquema alternativo para que la exposición resulte menos compleja. Se puede plantear ciertos problemas, como «¿qué sucedería, teniendo en cuenta que la lista de las constantes es infinita en tanto hay infinitos elementos en el modelo, cuando los números equivalentes a los signos coincidieran con los números gödelianos de fórmulas complejas?». El sistema de codificación original no permite que los números se crucen de tal manera gracias a que se empieza a utilizar en la tabla cuadrados y cubos de números primos a partir del número 10.

Luego, la combinación de números obtenida se coloca, conservando el orden, como exponentes en una secuencia multiplicativa de números primos que empieza desde dos y que tiene tantos números como signos hay en la fórmula:

$$2^8 x 3^4 x 5^6 x 7^2 = 15.876,000.000$$

El número obtenido es el *número de Gödel* de la fórmula, y el proceso realizado para obtenerlo se llama *numeralización* (en el esquema de la prueba una fórmula numeralizada se representa precedida de un signo «#»). La numeralización permite tratar un elemento de la teoría (fórmula) como un elemento del modelo (número). A cada fórmula le corresponde solamente un número de Gödel, debido a que se ordenan los números adjudicados a cada signo en una secuencia de primos; en otras palabras, el hecho de que a cada número le corresponda una sola factorización en números primos[9] garantiza que a cada secuencia de signos le corresponda un solo número al ser gödelizado. Por el mismo hecho es posible convertir un número natural cualquiera en una secuencia de signos propios de la aritmética. Al número 1.653.750 le corresponde la factorización en primos $2^1 x 3^3 x 5^4 x 7^2$. Si se toman en orden los exponentes de esta factorización (1,3,4,2) y se decodifican según la tabla, se obtiene la secuencia de signos '$\forall \rightarrow ()$'. Esta secuencia de signos no es una fórmula bien formada [FBF]. No a todos los números naturales les corresponde una FBF, pero a toda FBF le corresponde un número natural. Al número 15.876.000.000 le corresponde la fórmula 'P(a)':

15.876,000.000	2
7.938,000.000	2
3.969,000.000	2
1.984,500.000	2
992,250.000	2
496,125.000	2
248,062.500	2
124,031.250	2
62,015.625	3
20,671.875	3
6.890.625	3
2,296.875	3
765.625	5
153.125	5
30.625	5
6.125	5
1.225	5
245	5
49	7
7	7
1	



El proceso mediante el cual se convierte un número en una sentencia o en una FBF de la aritmética se llama *gödelización* o *interpretación*. Este proceso permite entonces tratar elementos del modelo (números) como secuencias de signos del lenguaje formal, algunas de las cuales son FBF's de la teoría aritmética.

[9] Aquí estamos enunciando un teorema fundamental de la aritmética que fue demostrado por Carl Gauss (1777-1855).

Los procesos de codificación que permiten la representación de los elementos de la teoría aritmética en el modelo numérico de los naturales, y viceversa, se pueden ilustrar así:

En el lema 1 de la prueba está implícito el fuerte poder de representabilidad de la teoría de los números naturales, lo cual significa que la aritmética puede representar todas las propiedades y relaciones que guardan entre sí los números naturales. Pero no sólo significa eso; el poder de representabilidad de la aritmética es *fuerte* porque con él es posible representar no sólo lo que sucede en el modelo, sino también lo que sucede en la metateoría: muchas de las propiedades de las fórmulas aritméticas que se expresan como predicados de la metateoría pueden expresarse como fórmulas de la teoría[10].

Intentaré ahora detallar un poco más la noción de representabilidad en el caso de los predicados metateóricos de la aritmética. Ejemplos de propiedades metateóricas de las proposiciones son la deducibilidad y la longitud. Cuando se manejan frases como «tal proposición es deducible» o «tal fórmula tiene una longitud *x*» (que se refiere al número de signos que la constituyen), se predican propiedades acerca de las proposiciones teóricas. Ahora bien, muchas de estas «metapropiedades» pueden ser expresadas como propiedades de la aritmética misma –pueden ser *representadas* en la teoría– porque pueden ser definidas aritméticamente, así como la propiedad teórica «ser par» se puede definir aritméticamente: «un número natural es par si y sólo si, al ser dividido por dos, da como resultado un número natural ['$\{x \in N \text{ y } y \in N\}$ $(Px \leftrightarrow (x/2 = y))$']». Un criterio suficiente que nos permite saber cuándo una propiedad o relación entre proposiciones es definible aritméticamente, es el criterio de verificación algorítmica. Una propiedad numérica es *algorítmicamente verificable* si existe una operación específica (algoritmo) que, al ser aplicada a cualquier número, nos dice si ese número satisface o no la propiedad. Si una propiedad o una relación entre números naturales (códigos de fórmulas o fórmulas) es algorítmicamente verificable, entonces dicha propiedad se puede definir aritméticamente y, por lo tanto, se puede expresar en una fórmula aritmética.

Existen algunas propiedades, tales como la definibilidad o la verdad, que no resultan definibles aritméticamente, dado lo cual no toda propiedad o relación de las fórmulas de la aritmética resulta expresable por medio de fórmulas de la aritmética misma. Pero ése no es el caso de la longitud y de la deducibilidad, que, según la exposición de Gödel, sí son propiedades definibles aritméticamente. Veamos el caso de la primera propiedad: para definir aritméticamente la propiedad de tener una longitud x, se necesita encontrar una función que, aplicada a una sentencia cualquiera, dé como resultado el número de signos que la conforman. Para que ello se pueda hacer se requiere tratar la proposición o sentencia como un número, lo cual es posible mediante un proceso de numeralización como el descrito antes. Asignemos para tal propiedad la abreviatura «L» en el lenguaje de primer orden: así, la longitud de la proposición es igual a la solución de la ecuación '$L(\#(\Psi)) = x$', donde 'Ψ' simboliza

[10] El alto poder de representabilidad de la aritmética fue sistematizado en la *aritmética de Peano* [Giusepe Peano (1852-1932)], que es una exposición axiomático-deductiva de la teoría aritmética de los números naturales. Por ello se dice que el teorema es válido para toda teoría Σ que contenga la aritmética de Peano (PA).

una fórmula cualquiera. Al instanciar la sentencia «P(a)» en el lugar de 'Ψ', la ecuación queda así: 'L(#(P(a)))=x'.

La longitud de la fórmula 'P(a)' es 4. La cuestión aquí consiste en hallar el algoritmo exacto que permite calcular la longitud de una fórmula mediante su número de Gödel para así poder manejar tal propiedad metateórica dentro de la teoría. El número de Gödel de la fórmula 'P(a)' es: 15.876,000.000. La descomposición de este número en factores primos es '$2^8 x 3^4 x 5^6 x 7^2$', que, como puede verse, tiene cuatro bases (2,3,5,7). La cantidad de bases siempre coincidirá con la cantidad de signos de la fórmula gracias a las reglas del código de numeralización, así que lo único que se tiene que hacer para averiguar el resultado de una ecuación de la forma 'L(#(Ψ))=x' es, dado el número de Gödel de Ψ, aplicar el algoritmo que determina el número de bases con exponente diferente a cero que tiene su factorización en números primos.

El lema 1 significa entonces que el poder de representabilidad de los naturales es tal, que permite construir un predicado de la prueba propio de la metateoría en la teoría misma, lo cual significa, de manera general, que es posible tratar ciertos predicados metateóricos como predicados teóricos. Poder tratar un predicado metateórico como un predicado teórico es cuestión de hallar un algoritmo que, aplicado a una fórmula, nos diga si tal fórmula cumple o no con la propiedad. Gödel encontró un algoritmo para poder definir aritméticamente la propiedad de deducibilidad y pudo así tratar este predicado teóricamente y representarlo con un número del modelo[11].

[11] Este asunto es demasiado complejo para ser tratado en este ensayo.

G. Explicación del lema 2: sobre el poder de auto-referencia

Recuérdese que las proposiciones teóricas se pueden tratar como elementos del modelo, de tal manera que las propiedades metateóricas trasladadas a la teoría se predican de números, es decir, para *cualquier* número se debe poder construir en la teoría aritmética una FBF en la que se predique de él una propiedad metateórica de las interpretadas como propiedades teóricas. Ahora bien, como la frase que se obtiene ha de tener un número de Gödel, es posible construir una sentencia que hable de la interpretación de su propio número de Gödel, es decir, una fórmula que se refiera a sí misma.

La posibilidad de construir fórmulas auto-referentes utilizando predicados metateóricos teorizados será ilustrada con un ejemplo: Todo enunciado formulado correctamente en el lenguaje de una teoría aritmética es verdadero o falso. A todo número le corresponde una secuencia de signos que tiene una determinada longitud. Por lo tanto, la fórmula 'L(x)=6' ha de ser verdadera o falsa para cualquier número que vaya en vez de x. Ahora bien, a la FBF 'L(x)=6' le corresponde un número de Gödel *n*, de tal manera que la FBF 'L(n)=6' debe ser verdadera o falsa. Efectivamente, la fórmula 'L(x)=6' tiene seis signos de longitud y, por lo tanto, es verdadera cuando se refiere a sí misma, es decir, cuando se instancia en x el código numérico gödeliano (n) que corresponde a la fórmula.

H. Construcción y consecuencias del Lema 3

Dado que se puede construir predicados propios de la metateoría en la teoría, específicamente un predicado de prueba (Dem) que afirma que cierta fórmula es deducible desde la axiomatización dada, entonces ha de ser posible hablar de la negación del predicado de prueba (¬Dem) porque muchas fórmulas no cumplen

con la propiedad de ser demostrables. Este predicado negado ha de ser aplicable a cualquier número, inclusive al propio suyo (por el lema 2), lo cual significa que es posible construir una fórmula bien formada P que afirme que su código interpretado tiene la *propiedad* de no ser deducible.

Se puede llegar así a construir una frase P que afirma de sí misma que es indemostrable (P: $\neg\mathrm{Dem}(\overline{\#P})$). Como toda FBF del lenguaje de la aritmética, esta frase o su negación ha de ser deducible desde el sistema axiomático Σ si es que Σ es completo. Ahora bien, por una parte, si se supone que la afirmación de esta fórmula es deducible desde Σ, entonces se llega a que la frase no es deducible, lo cual no puede ser posible [ver parte A de la prueba por reducción al absurdo]. Por otra parte, si se supone que la negación es deducible desde Σ, entonces se llega a que la afirmación también lo es, y así el sistema sería inconsistente [ver parte B]. Suponiendo que la frase es deducible, se llega a un absurdo; lo mismo sucede si se supone que su negación es deducible. Por lo tanto, la hipótesis de que Σ era completa es falsa. En conclusión, existe una FBF tal, que ni ella ni su negación pueden ser deducidas desde Σ (teorema de incompletitud de Gödel).

Lo que hemos visto se puede resumir así: cuando el poder de representabilidad de un modelo es alto, es decir, cuando el modelo puede representar los elementos de la teoría y cuando el lenguaje de la teoría permite definir en la misma las propiedades metateóricas de las fórmulas[12], entonces sucede que el modelo puede representar más cosas de las que pueden ser probadas en el sistema axiomático, de tal manera que el poder de representación excede al poder de demostración, o, como habíamos dicho al comienzo, existen verdades que no se pueden demostrar desde tal sistema.

[12] Como sucede en la aritmética de Peano y en todas las teorías que la contienen.

II. Relación del teorema de Gödel con las paradojas y las aporías

En la presente parte del texto, se pretende analizar la estructura del teorema y la de una paradoja matemática buscando puntos en común. Igualmente, se intenta hacer algunas conjeturas acerca de qué podría significar que realmente el teorema de incompletitud y las paradojas tuviesen la misma estructura. Como primer punto se realizará una aclaración terminológica con respecto a lo que es referido cuando se utiliza el término 'paradoja'; esto se hará con el propósito de mostrar que en algunos casos, en especial en el caso del problema de 'la paradoja de Russell', es más preciso hablar de aporía que de paradoja. Luego, se señalará un par de características de las aporías que parecen estar también en el teorema de incompletitud (auto-referencia y tendencia al infinito) y será presentado un esquema que permite ver la similitud de ambas estructuras. Por último, se intentará plantear un problema al respecto y postular algunas posibles soluciones.

a. Caracterización de las paradojas

'Paradójico' es un adjetivo que predicamos correctamente de situaciones fácticas, de proposiciones en modo de pregunta o afirmación, de argumentos, de perspectivas, de metodologías y hasta de estados psicológicos. Unas veces el término denota contradicción o violación de algún principio teórico establecido o aceptado; otras veces señala que algo tiene carácter problemático; y otras simplemente significa que ese algo es extraño, curioso o asombroso. Las situaciones paradójicas suelen ser situaciones inesperadas, que se dan pese a ser poco probables; generalmente se trata de situaciones desagradables (un ejemplo de esto sería el caso de alguien que paradójicamente se encuentra con la persona que menos esperaba y quería encontrarse). También es posible referirse a algunos estados psicológicos como paradójicos: las sensaciones de confusión, incertidumbre, absurdidad, equivocación o perplejidad con respecto a problemas de difícil solución. En el caso de las argumentaciones se dice que dos o más de ellas son paradójicas cuando demuestran cosas contradictorias entre sí por vías aparentemente válidas. Algo parecido sucede con las perspectivas o las metodologías: dos de ellas son paradójicas cuando conforman entre sí un par de proposiciones que no pueden ser verdaderas al mismo tiempo.

Esta pluralidad de significados posibles dificulta el uso preciso del término 'paradoja' tanto a nivel general como a nivel específicamente lógico; sin embargo, al usar el término en las matemáticas, se hace referencia al carácter contradictorio de las proposiciones aparentemente válidas que se ofrecen como respuesta a cierto tipo de problemas lógicos (dos proposiciones son lógicamente contradictorias cuando no es posible, según los métodos de valuación lógicos, que ambas sean verdaderas porque la verdad de la una equivale a la falsedad de la otra).

Un ejemplo famoso de paradoja lógica es la paradoja estoica del cornudo: «Lo que no has perdido lo sigues teniendo. No has perdido los cuernos. Luego sigues teniendo cuernos» (Campos, 1994). En este caso la paradoja parece consistir en un argumento que concluye una proposición que va en contra de la experiencia, de la opinión, y que produce cierta inconformidad. Pero no se puede incluir dentro de la definición lógica de paradoja elementos psicológicos ni elementos como lo comúnmente aceptado o lo que dicta la experiencia; aunque etimológicamente una paradoja sería algo «por fuera de la opinión», esos elementos no tienen que ver directamente con el objeto de estudio de la Lógica, que son los principios formales de los razonamientos. Si la paradoja del cornudo es una paradoja lógica, entonces su forma es un poco más compleja de lo que parece, dado que ofrece la forma lógica de un argumento constituido por tres proposiciones y no tiene ninguna contradicción explícita. Se acepta que lo especial en el argumento del cornudo es que su conclusión contradice la experiencia; esto se puede formalizar diciendo que la conclusión contradice la conclusión de este otro argumento: «Si tuvieras cuernos, te percatarías de ello por medio de la experiencia. No has tenido ninguna experiencia sensible de tus cuernos. Luego no tienes cuernos». Se nota así que la paradoja es un conjunto de argumentos en principio formalmente válidos que concluyen proposiciones que son contradictorias entre sí. Estos argumentos pueden verse como respuestas a la pregunta «¿Tienes cuernos?», dado que versan sobre lo mismo, y teniendo en cuenta que las conclusiones, pese a tener diferente calidad (la una es afirmativa y la otra es negativa), relacionan los mismos términos. De esta manera se puede decir que las paradojas son conjuntos de argumentos en principio formalmente válidos que ofrecen soluciones lógicamente contradictorias a problemas lógicos específicos. Una paradoja es básicamente una contradicción proposicional, pero «paradójico» no es exactamente un sinónimo de «contradictorio». Una paradoja se refiere a una contradicción proposicional en relación con un conjunto de argumentos, y una contradicción lógica se refiere sencillamente a un par de proposiciones.

También se suele llamar 'paradojas' a proposiciones que se contradicen a sí mismas, como, por ejemplo, «esta proposición no dice nada». A continuación se mostrará que el concepto de paradoja expuesto anterioemente se aplica también a los casos de autocontradicción.

¿Qué se entiende por «autocontradicción»? Una proposición autocontradictoria parece ser una proposición que afirma un hecho que es negado al ser ejecutada. Por ejemplo, la proposición «esta proposición no dice nada» –llámese R– se contradice a sí misma porque, al decir que no dice nada, dice algo. Recuérdese que por definición una contradicción es un evento formal que se da entre proposiciones, no entre proposiciones y hechos. Para que R sea una contradicción, tendría que tener una estructura compuesta de por lo menos dos proposiciones que no pueden ser verdaderas al mismo tiempo, es decir, tendría que ser equivalente a o implicar las proposiciones «R dice algo» y «R no dice nada». Dado que «esta proposición no dice nada» fue bautizada 'R', entonces equivale a «R no dice nada», y, dado que dice de ella misma que no dice nada, entonces implica «R dice algo». Así, la supuesta autocontradicción adquiere la forma de una paradoja, una contradicción entre las conclusiones de dos argumentos que responden a la pregunta «¿R dice algo?». Hay que notar aquí nuevamente que para que las proposiciones sean contradictorias es necesario que estén formuladas en el mismo lenguaje y en el mismo nivel teórico[13]: si R implica «R dice algo» en un nivel de la teoría diferente a aquél en el que R es idéntica a «R no dice nada» y si estos niveles no son traducibles el uno al otro, entonces no hay una contradicción legítima en el caso de «esta proposición no dice nada».

B. Caracterización de las aporías

Una *aporía* es un problema de la forma «¿'a v ¬a'?», donde la disyunción es exclusiva (sólo una de las partes de la disyunción es verdadera; ni ambas ni ninguna[14]) y donde cualquiera de las opciones de respuesta, 'a' o '¬a', lleva a una contradicción: 'a ⇒ ¬a' y '¬a ⇒ a'. Dado que es un problema cuyas soluciones lógicas tienen un carácter contradictorio, una aporía puede verse como un tipo especial de paradoja.

Toda genuina aporía está apoyada en un marco conceptual y teórico específico, que es el que permite plantear el problema limitando las opciones de respuesta adecuadas a opciones que conducirán a contradicciones. Si el marco teórico cambia, es posible que la aporía se desvanezca, pues pueden aparecer nuevas opciones de respuesta que en virtud de las modificaciones conceptuales no lleven a contradicción.

C. Analogía entre el teorema de Gödel y la 'paradoja' (aporía) de Russell

Muchas de las 'paradojas matemáticas' no son sino ejemplos más sofisticados de 'paradojas' como la señalada anteriormente, en la cual, por medio del recurso de auto-referencia, podemos poner a una frase a hablar de su propia verdad o falsedad. Ahora bien, ya ha sido expuesto cómo es posible poner a la teoría de números a hablar acerca de las proposiciones de la teoría misma, proveyendo a la aritmética de esta misma capacidad de auto-referencia. Posteriormente se señaló también la forma en que dicha capacidad permite construir una fórmula que no puede ser deducida desde cualquier axiomatización de la aritmética y que, sin embargo, es verdadera en el modelo al que se refiere la teoría. El teorema de Gödel tiene en este punto un rasgo semejante al de las aporías matemáticas. Por otra parte, su demostración por reducción al absurdo se puede comparar con otro rasgo de las 'paradojas' cuando se entienden éstas como problemas que no tienen una solución lógica posible. Dadas estas semejanzas, intentaremos ahora comparar el teorema de Gödel con la 'paradoja' de Russell, es decir, intentaremos dar al teorema la forma de una 'paradoja matemática'.

[13] Son posibles las contradicciones entre proposiciones formuladas en lenguajes diferentes si y sólo si existen mecanismos que permitan traducir las proposiciones de un lenguaje a otro lenguaje.

[14] Una aporía puede ser un poco más compleja. Por ejemplo, un problema de la forma «¿(a∧b)∨(a∧¬b)∨(¬a∧b)∨(¬a∧¬b)?» es una aporía siempre y cuando cualquiera de las respuestas que se escoja implique contradicción.

Para ilustrar la comparación entre el teorema de Gödel y la aporía de Russell, se ha elaborado la siguiente tabla:

	Aporía de Russell	Teorema de Gödel
α	$A: \{X \dashv X \in X\}$	P: "$\Sigma \nvdash \neg P$"
β	¿$A \in A$ o $A \in A$?	¿$\Sigma \vdash P$ o $\Sigma \nvdash P$?
γ	$A \in A \Rightarrow A \in A$ $A \in A \Rightarrow A \in A$	$\Sigma \nvdash P \Rightarrow \Sigma \nvdash P$ $\Sigma \nvdash P \Rightarrow \Sigma \vdash P$
δ	$A \in A \Leftrightarrow A \in A$	$\Sigma \nvdash P \Leftrightarrow \Sigma \nvdash P$

A continuación explicaremos paso por paso la comparación propuesta:

Paso α:

Aporía de Russell:

Siguiendo los lineamientos de la teoría de conjuntos de Cantor, se puede construir, por un lado, conjuntos cuyos elementos sean conjuntos, y, por otro lado, conjuntos que contengan como elementos aquellos objetos que cumplen con una determinada propiedad. Luego ha de ser posible construir el conjunto A de aquellos conjuntos que cumplen con la propiedad de no contenerse a sí mismos (la clase de todas las clases que no se contienen a sí mismas).

Teorema de Gödel:

Teniendo en cuenta los elementos de la demostración del teorema Gödel, la metateoría puede ser representada dentro de la teoría, de tal manera que podemos construir la fórmula teórica P, que afirma la no demostrabilidad de P.

Paso β:

Aporía de Russell:

Una vez construido el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos, dado que dicha construcción es un conjunto, podemos preguntar si tal conjunto cumple con la propiedad de no contenerse a sí mismo. Si A es realmente un conjunto, entonces ha de tener la propiedad o no tenerla; por lo tanto, es lícito preguntar: ¿A cumple con la propiedad de no contenerse a sí mismo o A no cumple con dicha propiedad?

Teorema de Gödel:

Ya que fue posible elaborar la fórmula P como una fórmula de la teoría, podríamos expresar acerca de ella una de las dos afirmaciones siguientes: o «P es deducible desde Σ", o «P no es deducible desde Σ". Ahora bien, dado que toda lista de axiomas es completa si y solamente si deduce P o $\neg$P, entonces para que Σ sea completa debe poder deducir P o $\neg$P. Luego es lícito preguntar si P es deducible o no desde Σ.

Paso γ:

Aporía de Russell:

Si A cumple con la propiedad de no contenerse a sí mismo, entonces hace parte de los elementos de A; luego A se contiene a sí mismo. Pero si A no cumple con la propiedad de no contenerse a sí mismo, entonces A se contiene a sí mismo; luego debe cumplir con la propiedad de no contenerse a sí mismo. En conclusión, si A no se contiene, entonces se contiene, y si A se contiene, entonces no se contiene.

Teorema de Gödel:

Este paso corresponde a la demostración por reducción al absurdo del enunciado del teorema. Por un lado, suponemos que Σ deduce P; si se da esto, entonces Σ no deduce P; luego, contradicción, el supuesto es falso. Por otro lado, suponemos que Σ deduce No-P; si tal es el caso, entonces Σ deduce P; luego, contradicción, el supuesto es falso.

Paso δ:

Aporía de Russell:

Del paso anterior se sigue que A se contiene a sí mismo si y solamente si A no se contiene a sí mismo (contradicción). Luego el supuesto debe ser falso, es decir, no se puede construir el conjunto de aquellos conjuntos que no se contienen a sí mismos.

Teorema de Gödel:

Del paso anterior se sigue que, ni Σ deduce P, ni Σ deduce la negación de P, porque, si Σ deduce P, entonces no deduce P, y si deduce no-P, entonces deduce P. Suponer que Σ es completa lleva a este absurdo; por consiguiente, Σ es incompleta.

Lo interesante de la comparación es que muestra que la aporía y la prueba del teorema de Gödel tienen una misma estructura. Sin embargo, la aporía y el teorema difieren en un punto importante: la función de la conclusión.

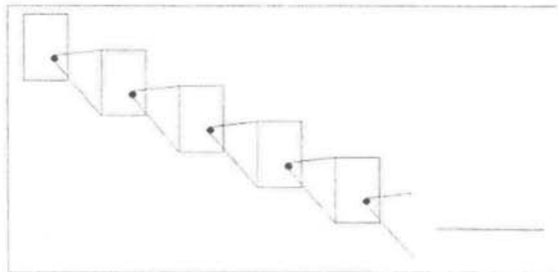
Si con la teoría de conjuntos disponible es posible construir ese conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, dado que esa construcción conlleva un problema cuya respuesta, dado el marco teórico manejado, no puede ser otra que una contradicción, entonces ha de haber algo mal en la teoría; y para corregirlo es necesario refinar algunos términos, introducir algunas distinciones, caracterizar mejor los diferentes tipos de conjuntos, de tal manera que no se pueda construir el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, o que el problema que se puede plantear al haber construido tal conjunto no necesariamente se resuelva en contradicción.

Una aporía como la de Russell cumple con la siguiente función: descubrir fallas en el sistema teórico para que éstas sean corregidas y la teoría se depure. Generalmente éste es el caso de las aporías matemáticas; mas no sucede así con el teorema de Gödel, que al parecer señala un par de *insuperables* limitaciones de la formalización de la teoría aritmética de los números naturales (incompletitud e incapacidad de deducir su propia consistencia).

D. ALGO EXTRAÑO EN LA SENTENCIA P

La sentencia P utilizada en la prueba del teorema, construida por combinación de los lemas, parece compartir las características de auto-referencia y tendencia al infinito con las construcciones teóricas de las que surgen las aporías matemáticas.

Si existe un conjunto de todos los conjuntos, este conjunto ha de contenerse a sí mismo, pues contiene todos los conjuntos posibles. Sucedería así que un elemento del conjunto es el mismo conjunto; lo mismo para un elemento de los que hacen parte de este conjunto que es elemento, y así sucesivamente sin que se vislumbre final alguno:



Con la auto-referencia, en la sentencia P sucede algo similar. Si P es definido como «P no es demostrable», ha de ser posible intercambiar los términos, lo cual podría dar lugar a un proceso infinito:

«P es indemostrable»
««P es indemostrable» es indemostrable»
«««P es indemostrable» es indemostrable» es indemostrable»
«...«...«...«...«P es indemostrable» es indemostrable» es indemostrable»...» es indemostrable»...

Es posible presentar este problema de una mejor manera: La sentencia P [P: $\neg$Dem($\#\overline{P}$)] tiene un determinado número de Gödel –llamémoslo «x»–; ahora bien, como P está incluida en el enunciado de P gracias a los procesos de numeralización y gödelización (dado que consideramos que P es lo mismo que «$\#\overline{P}$»), acompañada de un predicado negado ($\neg$Dem), entonces la frase está incluida dentro de sí misma como una parte.

Si la auto-referencia es legítima, es decir, si la interpretación teórica del número de Gödel de P ($\#\overline{P}$) corresponde efectivamente a P, el número de Gödel de esta interpretación teórica tendría que ser x. Si sucede esto último, el número de Gödel de la sentencia P sería mayor que x, pues en su enunciado hay otros signos ('$\neg$' y 'Dem') que modifican el número de ($\#\overline{P}$) cuyo número de Gödel es x. Descubrimos entonces que, suponiendo que P es equivalente a «$\#\overline{P}$» (suponiendo que tienen el mismo número de Gödel), se llega a que el número de Gödel de P es mayor que el de «$\#\overline{P}$», lo cual constituye un contrasentido insostenible.

Para hacer frente a este contrasentido hay básicamente tres opciones: se puede proceder a negar la suposición que nos llevó al contrasentido, como si hubiéramos hecho una genuina demostración por reducción al absurdo, se puede considerar que algún eslabón en la cadena de razonamientos que nos llevó al problema constituye una falacia, o se puede aceptar que no es un contrasentido que el número de Gödel de una sentencia sea mayor que el número de Gödel de esa misma sentencia numeralizada y gödelizada.

La primera de esas opciones equivale a decir que la propiedad de auto-referencia en la que se fundamenta el teorema no es legítima o que algo falla en la sistematización gödeliana de los mecanismos de representación de la aritmética. En cierto sentido, la fórmula P no se refiere propiamente a sí misma, sino sólo indirectamente por medio de su número de Gödel. Por el contrario, al construir A como el conjunto de conjuntos que no se contienen a sí mismos, podemos hablar de A como conjunto, de tal

manera que A puede referirse propiamente a A en la medida en que se contenga como conjunto. Hablamos quizá, entonces, de dos tipos de auto-referencia: una no-genuina y otra completamente genuina. La segunda opción nos puede llevar a considerar que la equivalencia entre proposiciones es algo diferente a la equivalencia entre números de Gödel. La tercera opción consistiría en afirmar que es posible construir un número que siempre es mayor que sí mismo, algo que suena bastante absurdo. Asumiendo que la prueba de Gödel evita estas dificultades, la pregunta que se puede dejar planteada para un trabajo de profundización en la comprensión del teorema es la siguiente: ¿Por qué es legítimo el recurso de la auto-referencia en la prueba del teorema de incompletitud? y ¿cómo evita Gödel las dificultades que parece implicar la auto-referencia?

Como resultados que se pueden obtener de este texto, señalemos la comprensión general del esquema de la demostración del teorema de Gödel, el develamiento de la importancia de la auto-referencia, y la idea de que, entre la demostración del teorema y las aporías matemáticas, hay una estructura común, lo cual puede ser significativo para las teorías del conocimiento y de la ciencia teniendo en cuenta que las aporías, usualmente consideradas obstáculos que se deben evitar en el territorio teórico, ahora estructuralmente hacen parte del juego.

Bibliografía

Campos, A. (1994). *Introducción a la lógica y la matemática griegas anteriores a Euclides*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

_________(1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Gödel, K. (1931). «On formally undecidable propositions of *Principia mathematica* and related systems» En: *Collected Works*. Vol. I. Oxford-New York: Oxford University Press. 1986.

_________(1951). «Some basic theorems on the foundation of mathematics». En: *Collected Works*. Vol. III. Oxford-New York: Oxford University Press. 1986.

Microsoft Corporation®. *Biblioteca de consulta Microsoft Encarta 2002*. © 1993-2001.

Nagel, E.; Newman, J. (1979). *El teorema de Gödel* (Trad. Adolfo Martín). Madrid: Tecnos.

Russell, B.; Whitehead, A. (1960). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.

Zalamea, F. (2001). *Lógica III – Esqueleto de notas de clase*. (Sin publicar).