# EL PROBLEMA DEL REALISMO MATEMÁTICO

## Una posible respuesta desde thomas kuhn

Angel Rivera Novoa
angelrivera32@gmail.com

**Resumen:** El problema del realismo matemático puede verse desde un punto de vista ontológico y a su vez desde un punto de vista epistemológico. De esta forma, tal y como Stewart Shapiro lo expone, se crean cuatro esquemas que parecen ser excluyentes entre sí (a saber, las cuatro posibles combinaciones entre idealismo y realismo tanto epistemológico como ontológico). Por otra parte, la noción de "descubrimiento", expuesta por Thomas Kuhn en el capítulo VI de *La estructura de las revoluciones científicas*, parece implicar que es imposible determinar el límite entre un descubrimiento y un invento; además, desde un punto de vista histórico, un objeto científico parece oscilar entre uno y otro estado. Así pues, esta ponencia propone mostrar cómo la visión de Kuhn, acerca de los descubrimientos, puede convertirse en una posible solución al problema del realismo matemático —siempre desde un punto de vista histórico— de tal forma que el problema del realismo matemático tenga otra dirección.
**Palabras Clave:** Matemáticas, realismo, idealismo, descubrimiento, invención, Kuhn.

**Abstract** (*The Problem of Mathematical Realism: A possible answer from Thomas Kuhn*)**:** The problem of the mathematical realism can be seen from an ontological point of view and, at the same time, from an epistemological standpoint. Thus, as Stewart Shapiro expresses it, there are four schemes that seem to be exclusive between them (that is, four possible combinations between realism and idealism, that are either epistemological or ontological). On the other hand, the notion of 'discovery' espoused by Thomas Kuhn in chapter VI of *The Structure of Scientific Revolutions* seems to imply that it is impossible to determine the limit between a discovery and an invention; furthermore, from a historic standpoint, any scientific object seems to oscillate from one state to other. Thus, this paper intends to show how Kuhn's view regarding the 'discoveries' can turn into a possible solution to the problem of mathematical realism; always approaches from a historical standpoint and that way the problem of the mathematical realism has another direction.
**Keywords:** Mathematics, Realism, Idealism, Discovery, Invention, Kuhn.

Son pocos los recursos que se toman de la obra de Thomas Kuhn para abordar problemas relativos a la filosofía de las matemáticas. Este escrito tiene el objetivo de retomar una noción específica desarrollada por este filósofo, para dar una posible solución a uno de los problemas que más ha interesado a los filósofos dedicados a estudiar la naturaleza de las matemáticas, a saber, el problema del realismo —o a veces denominado platonismo— matemático. Con este propósito, esta ponencia se dividirá en tres partes: 1) primero se expondrá *grosso modo* en qué consiste el problema del realismo matemático, luego 2) se hará lo mismo con la noción de 'descubrimiento' desarrollada por Thomas Kuhn en el capítulo VI de *La estructura de las revoluciones científicas* y, por último, 3) se mostrará cómo esta noción puede ser una respuesta al problema del realismo, al menos reorientando la pregunta central del mismo, analizando el caso de la historia de los números complejos.

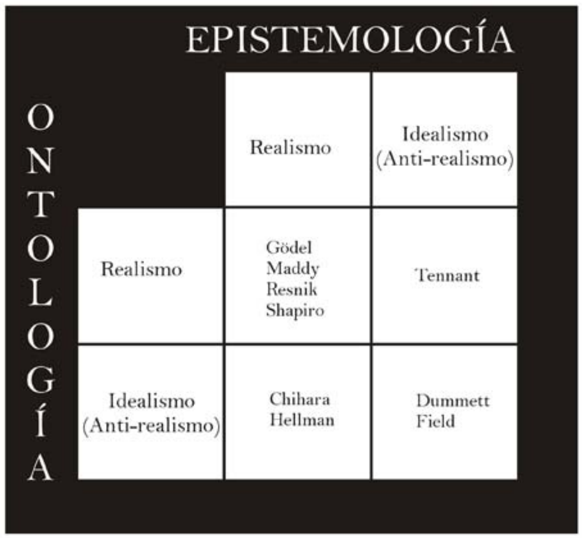
## 1) Realismo e Idealismo

Existen diversas formulaciones a propósito del problema a tratar en esta ponencia. Sin embargo todas ellas —o al menos la mayoría— parecen apuntar sólo en una dirección: el punto de vista ontológico. Por esta razón reproduciré la formulación de Stewart Shapiro (2000, 2005) que recoge, no sólo el punto de vista ontológico, sino también el epistemológico, lo que hace la formulación aun más completa.

Teniendo esto en cuenta, podemos caracterizar el problema de la siguiente manera (siguiendo lo dicho por Shapiro (2000) en el primer capítulo de su libro *Thinking about mathematics*): ¿existen los objetos matemáticos tales como los números, los puntos, las funciones, los conjuntos, etc., con independencia de las mentes que intentan conocerlos y del lenguaje que se utiliza para ello? Si la respuesta a la pregunta es una respuesta afirmativa tendremos una posición 'realista ontológica', es decir, la postura que afirma que las entidades matemáticas existen objetivamente. Una postura ontológica fuerte es denominada como 'platonismo', y defiende que si los entes matemáticos existen objetivamente, éstos deben tener propiedades tales como su carácter abstracto, indestructible, eterno, siendo independientes del espacio-tiempo. Ahora, si la respuesta a la pregunta antes planteada es negativa, la postura que debe ser asumida será entonces la 'idealista ontológica' o 'antirrealista ontológica', siendo ésta la interpretación que dice que es imposible, en todo caso, que las entidades matemáticas tengan una existencia independiente de las mentes que a ellas se aproximan.

Por otra parte, Shapiro plantea el problema de realismo-idealismo (o antirrealismo) desde un punto de vista que podríamos llamar epistemológico (que en parte es una salida a la posición realista ontológica fuerte, es decir, al 'platonismo'). Este enfoque del problema nos dice que, sin importar si los entes matemáticos existen objetivamente, es legítimo hacer la pregunta acerca de si los valores de verdad de los enunciados matemáticos son objetivos o no, esto es, si los valores de verdad de los enunciados existen con independencia de los hablantes que los enuncian o no. Si los valores de verdad son objetivos, estamos entonces ante lo que denominaré como una postura 'realista epistemológica'. Por otra parte, si los valores de verdad de los enunciados matemáticos tienen como condición de posibilidad a los hablantes mismos, nos encontraremos ante una postura 'idealista epistemológica'. Éste es, entonces, el problema del realismo o antirrealismo en los valores de verdad, en palabras del mismo Shapiro. Hay en principio —afirma Shapiro— una estrecha alianza entre la postura realista ontológica y la epistemológica, pues se argumenta a favor de la segunda diciendo que los términos singulares que se utilizan para formular los enunciados denotan directamente los objetos matemáticos, y los numerales entendidos como símbolos denotan números entendidos como entidades abstractas.

No obstante, es posible argumentar también que tanto las dos posiciones realistas, como las dos antirrealistas, no están ligadas necesariamente; es decir, el hecho de ser, por ejemplo, un idealista epistemológico, no implica ser un idealista ontológico, sino que se puede ser lo primero siendo a su vez un realista ontológico. Así, por ejemplo, algunos casos de realistas tanto ontológicos como epistemológicos son Gödel, Crispin Wright, Maddy, Resnik o el mismo Shapiro. Este último identifica dentro de la categoría de los idealistas absolutos (es decir, tanto ontológicos como epistemológicos) a Dummett y a gran parte del intuicionismo contemporáneo, lo mismo que a Field. Ahora bien, dos ejemplos de filósofos que son realistas epistemológicos, pero idealistas ontológicos, son Hellman y Charles Chihara. Por último, Shapiro encasilla a Tenant en la posición contraria, esto es, como un realista ontológico e idealista epistemológico. Tenemos entonces cuatro posturas establecidas, las cuales pueden ser presentadas en el siguiente esquema que Fernando Zalamea ha denominado como el cuadrado de Shapiro (*Fig.* 1):




(*Figura* 1)

El problema del realismo matemático puede entenderse entonces como aquel que nos dice que debemos establecer cuál de estas posturas es la correcta, teniendo como presupuesto que asumir una de las mismas implica no poder asumir ninguna de las otras tres (pues de lo contrario se tendría una inconsistencia). Por otra parte, el problema también puede enfrascarse dentro de las consecuencias mismas que puede acarrear una u otra posición, por ejemplo, tal y como lo presenta Benacerraf (1973), a modo de paradoja: si se acepta un realismo absoluto no hay manera de explicar cómo se conocen los objetos matemáticos, ya que la única conexión entre los matemáticos y estas entidades sería una conexión de un tipo casi místico. Si, por otra parte, se acepta el idealismo o antirrealismo, la explicación de la aplicación de las matemáticas a las demás ciencias (y además a la naturaleza) estaría injustificada dado el carácter contingente de las primeras.

## 2) Descubrimiento e invención en Thomas Kuhn

En la introducción de *La estructura de las revoluciones científicas* llamada 'Un papel para la historia', Kuhn le atribuye a los historiadores de la ciencia dos tareas fundamentales que han pretendido desarrollar: por un lado, el historiador "debe determinar por qué hombre y en qué momento fue *descubierto* o *inventado* cada hecho, ley o teoría científica contemporánea" (*énfasis mío*, Kuhn 1998: 21), y por otro debe precisar cuáles fueron los errores, mitos o supersticiones que impidieron que la ciencia evolucionara acumulativamente, describiendo a su vez las condiciones que permitieron desarrollar el proceso de acumulación de conocimiento de una manera eficaz. Estas dos tareas del historiador clásico parecen tener dos presupuestos, respectivamente, que no son del todo claros. En primer lugar, no es nada claro el hecho de que se pueda describir y precisar el momento justo en que hubo un descubrimiento o una invención, de tal modo que la distinción misma entre descubrimiento e invento se hace oscura. Por otro lado, se presupone que en efecto la ciencia evoluciona de manera acumulativa. De este modo —señala Kuhn más adelante— la labor del historiador de la ciencia debería consistir en poner de manifiesto la integridad histórica de determinada ciencia en su contexto propio, además de ver cuáles fueron las condiciones que hicieron posibles los desarrollos científicos, sean estos acumulativos o no (cf. Kuhn 1998: 23).

Así, luego de haber planteado el problema del realismo matemático, en esta sección intentaré aclarar la noción de descubrimiento expuesta por Kuhn, desde la cual sostiene que el primer presupuesto del historiador clásico descansa en un error. En general, la concepción de Kuhn al respecto radica en afirmar que el límite entre descubrimiento e invento es difuso y, además, el hecho de que puede haber, en relación a un mismo evento, un tránsito entre descubrimiento e invento sin que esto lleve a contradicción.

Pues bien, en el capítulo VI de *La estructura de las revoluciones científicas* llamado 'La anomalía y la emergencia de los descubrimientos científicos', Kuhn argumenta que la anomalía es la condición de posibilidad para que se produzca un descubrimiento o un invento, siendo esto a su vez la condición primaria de un proceso de revolución científica. Así, Kuhn comienza el mencionado capítulo diciendo que la naturaleza y la historia de la ciencia muestran cómo en diferentes momentos se producen novedades fácticas o teóricas, es decir, cómo la ciencia descubre diversos hechos e inventa nuevas teorías. En este punto vemos, entonces, la manera como Kuhn asocia el descubrimiento con lo puramente fáctico y la invención con lo que es en esencia teórico. En principio podemos decir que esta asociación es obvia y trivial. Sin embargo, el propósito de Kuhn es mostrar que esta diferencia es más artificial que natural, y que el invento (teoría) y el descubrimiento (lo fáctico) no pertenecen a categorías diferentes, sino que parecen ir de la mano.

De este modo, el primer paso para que se dé un invento o un descubrimiento es la percepción de una anomalía. Para definir lo que debe entenderse por anomalía en este contexto es bueno contrastar este concepto con la noción que tiene Kuhn a propósito de los enigmas. Un enigma es un problema que se le presenta a un científico o a una comunidad científica cuya solución está en las herramientas y teorías disponibles por el científico o la comunidad, esto es, el científico no debe acudir a herramientas nuevas para la resolución del problema. Por su parte, la anomalía es un problema que, de entrada, es inabordable desde las técnicas y los métodos que una ciencia particular posee. Para su resolución se exige el invento o descubrimiento de nuevos métodos o hechos que permitan solucionar el problema. El punto central radica en que lo teórico y lo fáctico no son, de hecho, totalmente separables, ya que el límite entre estos dos elementos es difuso —pues el proceso de descubrimiento implica un proceso de asimilación (por ejemplo, en el momento en que se descubre el oxígeno, se debe tener claro que lo que se tiene como muestra es el oxígeno mismo, y no el óxido nitroso tal y como creía

Priestley)—. Este proceso de asimilación implica a su vez, no sólo la asimilación empírica, sino la conceptual, de tal modo que el descubrimiento es posible únicamente si se da a la par con lo teórico.

Lo anterior puede interpretarse de dos formas: por un lado, se puede entender que las categorías de lo teórico y de lo fáctico son en realidad una sola; por otra parte se puede interpretar que, si bien las categorías son diferentes, el límite de las mismas es difuso, debido a que una no se puede dar sin la otra y, por lo mismo, en ocasiones es legítimo hablar indistintamente de descubrimiento e invención. En esa medida, lo que parecía ser teórico (invención) se convierte en fáctico (descubrimiento). Creo que esta última es la interpretación más adecuada y es la que voy a trabajar en esta ponencia. Para justificar sus afirmaciones Kuhn proporciona tres ejemplos de descubrimientos, a saber, el descubrimiento del oxígeno, el de los rayos X y el de la botella de Leyden. No obstante, creo que un ejemplo más adecuado se encuentra en su artículo "¿Qué son las revoluciones científicas?" (2002), donde describe el proceso de descubrimiento del 'problema del cuerpo negro' por parte de Planck. Este ejemplo, que expondré brevemente a continuación, refleja fielmente la idea de que es posible un tránsito de lo teórico a lo fáctico, y que por lo tanto la frontera entre un descubrimiento y una invención es siempre difusa.

Pues bien, el ejemplo de Planck se enmarca dentro del propósito central del mencionado artículo, a saber, el hacer clara la diferencia entre el proceso acumulativo y el proceso revolucionario como dos tipos de desarrollo científico; no obstante, el ejemplo aclarará lo expuesto anteriormente. El problema central de Planck era el de la radiación de un cuerpo negro: se debía explicar cómo cambia el color de un cuerpo a medida que cambia su temperatura. Para eso, Planck imagino una cavidad llena de radiación (*OE*) y supuso que ésta tenía un gran número de lo que él llamó resonadores, de tal modo que cada uno de ellos fuera sensible a la radiación de una frecuencia y no a la de otras. Al absorber dichos resonadores la energía de la radiación, la pregunta de Planck fue la siguiente: ¿cómo depende la energía absorbida por cada resonador de su frecuencia? ¿Cuál es la distribución de frecuencias de la energía de los resonadores? Para resolver la pregunta, Planck aplicó un método que consistía en dividir la cavidad en celdas imaginarias (a):


(*Figura* 2)

Esto le permitía calcular la proporción de resonadores que se asignaba a cada una de las celdas. Ahora bien, el tamaño de la celda (a) se determinaba del siguiente modo: $a = hv$, donde $v$ es la frecuencia del resonador y $h$ es una constante universal (que luego se conoció con el nombre de Planck). De este modo, Planck había resuelto el problema. Lo que me interesa resaltar nuevamente es el hecho de que la energía total *OE* hubiese sido dividida en celdas puramente imaginarias (a), como un recurso puramente teórico y estadístico para la resolución del problema.

Ahora bien, esto ocurrió en el año de 1900. Seis años después, algunos científicos no admitieron algo que Planck daba por sentado, a saber, que los resonadores pudieran estar distribuidos en cualquier parte de la línea de energía *OE*; antes bien, los resonadores sólo podían estar situados entre las divisiones de las celdas (a), es decir, la energía de un resonador sólo puede ser 0, a, 2a, 3a, etc., de tal forma que su energía no cambia de manera continua, sino discreta. Así, el argumento de Planck, matemáticamente hablando, es idéntico al que se dio en 1906; no obstante, físicamente son radicalmente distintos. Kuhn describe este fenómeno de la siguiente manera: "El elemento ['a'] ha pasado de ser una división mental de la energía total a un átomo separable de energía física, del cual cada resonador puede tener 0, 1, 2, 3 u otro número" (Kuhn 2002: 39-40). El cambio descrito por Kuhn se puede observar en la siguiente imagen:


(*Figura* 3)

Hay entonces un tránsito claro de lo teórico a lo fáctico, pues lo que en principio era apenas una división mental luego se convirtió en una entidad física existente con independencia de la mente que lo conoce. En este punto se ve entonces claramente cómo un proceso de descubrimiento no se da en un momento justo, sino que es un proceso que involucra la asimilación de la existencia de diversas entidades y el manejo de herramientas conceptuales que, en casos como estos, se mezclan con los elementos puramente fácticos. El ejemplo de Planck deja entonces claro que el límite entre un descubrimiento y una invención es compleja y que, además, en la historia de la ciencia se dan casos en los que es posible oscilar de uno a otro, esto es, de lo teórico a lo fáctico o viceversa.

### 3) Lo teórico y lo fáctico en la historia de los números complejos:

Por último deseo mostrar cómo es posible encontrar, en la historia de los números complejos, un tránsito de lo teórico a lo fáctico, tal y como se mostró en la sección pasada con Planck en los inicios de la física cuántica. Esto puede darnos una respuesta al problema inicial, siempre y cuando pensemos lo fáctico en términos realistas y lo teórico en términos idealistas o antirrealistas. En efecto, podemos pensar el asunto del siguiente modo: si se asume una postura realista (sea ontológica o epistemológica), se puede decir que lo que ocurre cuando decimos que conocemos los entes matemáticos o los valores de verdad de sus enunciados es que *descubrimos* las entidades y los valores de verdad; si por el contrario, tenemos una postura idealista (ontológica o epistemológica), lo que tenemos que decir al respecto de las entidades y los valores de verdad de los enunciados matemáticos es que éstos no van más allá de una *invención*, que son simplemente herramientas teóricas y metodológicas que permiten el avance de las investigaciones en el campo matemático.

De este modo asociaré la postura realista expuesta por Shapiro con la noción de descubrimiento de Kuhn y, por lo mismo, con las cuestiones fácticas expuestas anteriormente. A su vez, podemos establecer una clara relación entre la postura antirrealista o idealista con la noción de *invento* y de cuestiones teóricas. Si es legítimo hacer esta asociación tendremos que decir, siguiendo a Kuhn, que el realismo y el antirrealismo (del tipo que sean) no pertenecen a categorías diferentes, que el límite entre ambas posturas es difuso y que, además, deben existir casos concretos en el desarrollo histórico de las matemáticas en donde sea posible que las posturas o bien se confundan, o bien haya un tránsito entre una y otra. Así pues, voy a dar un recuento histórico muy general de la evolución que han tenido los números complejos que, aunque sea muy superficial, pueda mostrar que, en efecto, en el transcurso de las matemáticas, es posible pasar de una postura a otra.

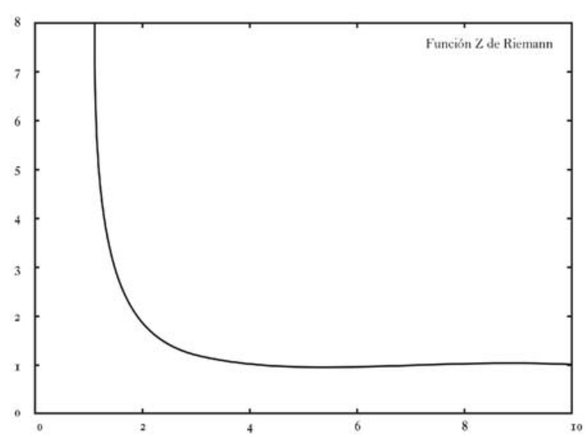
Antes de entrar a ver el desarrollo histórico de los números complejos, vale la pena recordar algo básico acerca de su naturaleza: los números complejos se componen de dos partes, una real y otra imaginaria, esto es, está compuesto de un número real y de otro imaginario, de tal modo que su representación se da del siguiente modo: $C = a + ib$, donde ‘a’ es la parte real y ‘$ib$’ es la parte imaginaria. Así, los números complejos, a diferencia de los reales, representan todas las raíces de los polinomios. Teniendo esto en cuenta, podemos entonces pasar a analizar el surgimiento de los números complejos. La primera referencia histórica que tenemos de ellos está enmarcada dentro de los siglos XV y XVI, principalmente en Italia, donde los matemáticos se enfrentaron al problema de la resolución de ecuaciones de tercer grado, las cuáles hasta entonces no tenían ninguna solución posible. Sin embargo, existía también otra anomalía: las raíces cuadradas de números negativos. Ya en la Grecia helénica se conocen dos casos donde dos matemáticos se enfrentaron a ese problema (Heron y Diofanto). Así, pueden encontrarse dos nombres importantes dentro de estos matemáticos italianos: Gerolamo Cardano y Rafael Bombelli; el primero de ellos abordó directamente el problema de las raíces negativas y tangencialmente el problema de las ecuaciones cúbicas. Este último problema fue abordado de mejor manera por Bombelli. Me centraré en exponer, en lo que sigue, la manera como Cardano se enfrentó a la anomalía de las raíces de negativos.

Pues bien, Cardano se planteó la siguiente inquietud: ¿es posible dividir el 10 en dos partes de tal modo que el producto de estas partes fuera 40 (es decir, de tal modo que $x + y = 10$ y $xy = 40$)? Cardono encontró que la única solución posible era considerar a $x$ como $5 + \sqrt{(-15)}$ y a $y$ como $5 - \sqrt{(-15)}$. Luego de encontrar estos resultados, los cuáles eran absurdos para ese entonces, Cardano intentó resolver el problema sin raíces de números negativos (esto es, considerando al 15 como número positivo); empero, el resultado no era 40. La única manera posible para que el resultado fuera 40 era considerar los valores expuestos hace un momento. Estos valores son ejemplos de números complejos que resuelven este tipo de problemas (al igual que Bombelli con las ecuaciones de tercer grado o de mayor grado). Sin embargo, para estos italianos, los números de este tipo no pasaban más que ser una especie de recursos a veces fantásticos que servían para resolver problemas; en ningún caso, ni Bombelli ni Cardano, consideraron que estos números existieran realmente, ni mucho menos que los valores de verdad de enunciados que involucraran estos números existieran con independencia de los matemáticos que los formulaban. Estos italianos se encontraban entonces, con relación a los números complejos, en una posición idealista tanto ontológica como epistemológica, es decir, los consideraban como elementos puramente teóricos, pero la idea de que fueran elementos fácticos les parecía absurda.

Pasaron muchos años y sólo hasta el siglo XIX los números complejos, gracias a algunos desarrollos hechos por Riemann, tuvieron un lugar en el espectro real de las matemáticas. Si bien Gauss y Euler trabajaron mucho con la manipulación de complejos para la resolución de complejos, un control de tipo realista no se dio sino hasta los trabajos de Riemann —los dos puntos más claros donde ocurre esto en la obra de Riemann están dados en: el desarrollo que éste hace acerca de la variable compleja y en el problema de la función Z—. Un análisis de lo primero se extendería más allá de los propósitos planteados, así que procederé a explicar brevemente lo segundo. Pues bien, la función Z ($\zeta(s)$) se define para todo número complejo cuya parte real sea mayor que 1 a través de lo que se conoce como la serie de Dirichlet, de modo tal que:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

En una serie de este tipo, no sólo *s* es un número complejo, sino que también lo será $n=1$ y el numerador de la fracción, en este caso 1. Riemann mostró entonces cómo la función podía extenderse por todo un plano complejo, excepto donde $s=1$. Esto se puede entonces apreciar en el siguiente gráfico (Fig. 4).




(*Figura* 4)

Esto llevó a uno de los más grandes problemas de la historia de las matemáticas, a saber, la hipótesis de Riemann. Sin embargo, lo que vale la pena resaltar es el carácter realista de los valores de verdad de los enunciados que involucran, en lo que tiene que ver con la función Z de Riemann, números complejos. Si bien Riemann —al igual que Euler— afirmaría que los números complejos no tienen una existencia en sí mismos, sí acepta que los valores de verdad de los enunciados que los involucran tienen una independencia de quien los conoce; en otras palabras, la verdad del enunciado 'la función Z puede prolongarse por el plano complejo menos en el punto donde $s=1$' no es una invención de Riemann, sino un descubrimiento (a diferencia de lo sucedido con los italianos de los siglos XV y XVI), pues las proposiciones de Riemann tienen un carácter de necesidad que no se puede negar, sin importar si los números complejos existen o no.

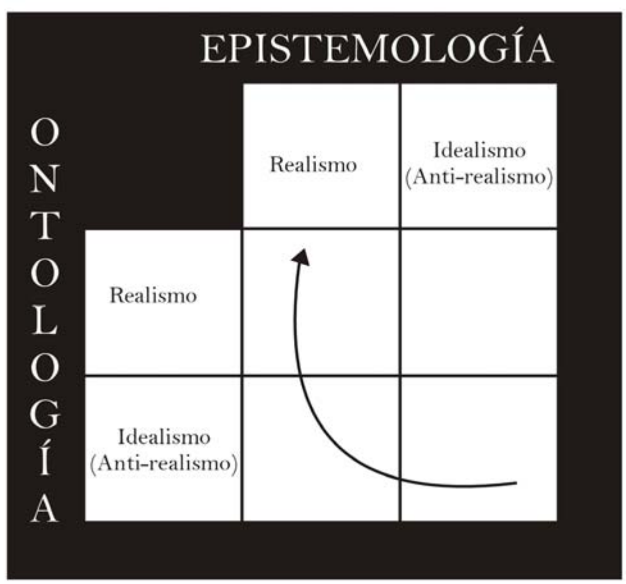
Finalmente, expondré un caso donde no sólo hay realismo epistemológico, sino donde se puede sugerir un realismo ontológico con relación a los números complejos, si bien es un caso más de aplicación de dichos números en otras áreas del conocimiento distintas a la matemática misma, en particular, hablo de las ecuaciones de Maxwell en el campo del electromagnetismo. El punto central de este último ejemplo es el siguiente: las ecuaciones de Maxwell son las que describen los fenómenos electromagnéticos. Maxwell introduce las nociones de campo y de corriente de desplazamiento dentro de estas ecuaciones. Por otra parte, de él, y gracias a sus ecuaciones, nace el concepto de 'campo electromagnético', ya que dichas ecuaciones sintetizan el campo eléctrico con el magnético. Ahora bien, lo importante del caso es que a partir de las ecuaciones generales de Maxwell se descubre la existencia de las ondas electromagnéticas que se mueven a una velocidad *vf* así:

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

De ahí Maxwell pasa a identificar el valor numérico de esta fórmula con el de la luz en un medio determinado, de tal modo que la luz fue identificada como una onda electromagnética. El punto entonces es el siguiente: para que las ecuaciones de Maxwell alcancen el valor explicativo que *grosso modo* acabo de exponer, éstas deben contener fasores, no como elementos puramente fácticos de utilidad para la explicación, sino como un elemento que se descubre dentro de la onda electromagnética, esto es, hace parte de ella. Dado que las ecuaciones de Maxwell muestran a la luz como una onda electromagnética, las ecuaciones deben involucrar estas constantes. El punto es que los fasores son siempre números complejos, y las ecuaciones sinusoides (esto es, las que describen ondas de tiempo) no pueden formularse sin fasores. Ahora bien, es legítimo pensar que, dado que en efecto existen ondas electromagnéticas tal y como Maxwell lo demostró, y éstas sólo pueden ser descritas por medio de los números complejos, entre otras cosas, porque la existencia de las ondas implica la existencia de fasores, los números complejos deben entonces tener, de algún modo extraño, una existencia separada de las mentes que a ellos se aproximan.

Si la descripción de los tres momentos que acabo de mostrar es correcta, tendremos que aceptar que los números complejos han transitado entre posturas diferentes (lo cual no es contradictorio): primero pasaron por una postura idealista tanto ontológica como epistemológica; luego estuvieron enmarcados dentro de un realismo epistemológico y, a la vez, en un idealismo ontológico; por último, es posible pensar a los números complejos desde una perspectiva realista ontológica y epistemológica. Hay entonces, históricamente, un tránsito entre las diversas posiciones y no necesariamente, como el problema del realismo matemático parecía presuponerlo, una posición absolutamente fija. ¿Cómo se da este tránsito?

A partir de los ejemplos expuestos anteriormente, podemos afirmar que las diversas consideraciones, a propósito de la naturaleza de los entes y de los valores de verdad de los enunciados matemáticos, han sido dadas por su uso y por la utilidad que tenía que asumir una u otra postura. En efecto, para que los problemas que Bombelli y Cardano se plantearon pudieran ser resueltos, estos debían suponer el papel de los números complejos en la resolución de los enigmas; empero, para que su solución fuera buena, ellos debían suponer que los números complejos son más bien un invento, pues si llegaran a suponer que los números complejos tuvieran una existencia independiente, no habría coherencia en el sistema de proposiciones de la matemática (ya que para entonces los números complejos y los imaginarios eran producto sólo de las mentes que los manejaban, de tal modo que, por ejemplo, pensar en raíces de negativos era un absurdo). Por otro lado, Riemann tenía que suponer que los valores de verdad de los enunciados que involucraban la función Z no eran un invento, pues de ser así, el grado explicativo de Riemann no hubiera superado el de Bombelli o el de Cardano. A su vez, Maxwell no podía aceptar que los números complejos eran una pura invención, pues si fuera de ese modo, los fasores también lo serían, y su explicación acerca de las ondas electromagnéticas carecería de toda importancia. De este modo, parece ser la utilidad a la hora de la resolución de enigmas la que permite el tránsito de una postura a otra. La evolución histórica de los números complejos puede representarse, dentro del cuadrado de Shapiro que expuse en la primera sección, del siguiente modo (*fig.* 5):




(*Figura* 5)

El tránsito de un estado al otro es determinado en todo caso por el rol que jugaron los números complejos en la resolución de problemas. Si esto es así, y no se debe aceptar necesariamente el hecho de que se debe escoger entre una u otra postura, el problema del realismo matemático debe tener otra orientación, y debe entonces preguntarse por qué es posible que se de un tránsito entre uno y otro estado, es decir, como diría Kuhn, entre los elementos fácticos y los teóricos. Además, el problema del realismo matemático —asumiendo que es posible el tránsito entre una y otra postura, de tal modo que el descubrimiento y la invención no se vean como conceptos de categorías distintas— debería reorientarse también hacia la pregunta de cómo es posible y cómo se da el tránsito de una a otra postura. Es posible imaginar entonces, tal y como lo concibe Thomas Kuhn, que el límite entre descubrimiento e invención, es decir, entre realismo y antirrealismo, es tan difuso en matemáticas como lo es, para Kuhn, en otras ciencias, y que no es contradictorio pensar en la posibilidad de pasar, en el mundo matemático, de lo fáctico a lo teórico y viceversa.

## Bibliografía

Benacerraf, P.

(1973) “Mathematical Truth”. En: *Journal of Philosophy*, 70: 661-679.

Bird, A.

(2004) “Naturalizing Kuhn”. En: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 105, 1: 99-117.

Bochner, S.

(1963) “Revolutions in Physics and Crises in Mathematics”. En: *Science*, 141: 408-411.

Corfield, D.

(2003) *Toward a Philosophy of Real Mathematics.* Cambridge: University Press.

Gillies, D.

(1995) “The Fregean revolution in Logic”. En: *Revolutions in Mathematics*, Oxford: OUP.

Green, D.R.

(1976) “The historical development of complex numbers”. En: *The Mathematical Gazette*, 60, 412: 99-107.

Kuhn, T. S.

(1998) *La estructura de las revoluciones científicas.* (Trad de A. Contín). Bogotá: FCE.

(2002) “¿Qué son las revoluciones científicas?”. En: *El camino desde la estructura.* (Trad. A. Beltrán & J. Romo). Buenos Aires: Paidós.

MADDY, P.

(1989) "The Roots of the Contemporary Platonism". En: *The Journal of Symbolic Logic*, 54: 1121-1144.

MC LANE, S.

(1986) "The Mathematical Network". En: *Mathematics. Forward Function*, New York: 409-456.

SHAPIRO, S.

(1984) "Mathematics and Reality". En: *Philosophy of Science*, 50, 4: 523-548.

(2000) *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics.* Oxford: OUP.

(2005) (ed.) *The Oxford handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* New York: OUP.

ZALAMEA, F.

(Inédito). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas.*