

DISPERSIONES ELECTRÓN-HUECO EN SUPERCONDUCTIVIDAD

Virgilio Niño^{1,*} y William Herrera¹

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Resumen

En este trabajo se hace una revisión de los aspectos básicos de la teoría de la superconductividad para sistemas inhomogéneos, mediante las ecuaciones de Bogoliubov de Gennes, las cuales describen el comportamiento de las cuasipartículas en un superconductor. A través de estas ecuaciones se señalan en forma explícita los diferentes procesos de dispersión de cuasipartículas que pueden suceder debido a las inhomogeneidades del superconductor. En particular, estos procesos se manifiestan en heteroestructuras y en contactos formados por metales en los estados normal y superconductor. Por último, se estudian mediante una estrategia similar a la empleada en el teorema de Ehrenfest, las fuerzas que actúan sobre las cuasipartículas en las dispersiones electrón-hueco y hueco-electrón que pueden ocurrir en las estructuras mencionadas.

Palabras claves: Superconductividad, sistemas inhomogéneos, dispersión de cuasipartículas

Abstract

In this paper we make a review of some basic aspects of the microscopic theory of superconductivity for inhomogeneous systems through the Bogoliubov-de Gennes equations which describe the quasiparticles in a superconductor. We show the different scattering processes which occur in a superconductor due to inhomogeneities of the pair potential. These scattering processes appear explicitly in heterostructures and in contacts between metals in the normal state and

*: vnino@ciencias.unal.edu.co

superconductors. By using a method similar to the Ehrenfest theorem we find the forces which act on the quasiparticles due to the electron-hole and hole-electron scattering which can occur in the above mentioned structures.

1. INTRODUCCIÓN

Lo esencial de la teoría de la superconductividad que propusieron Bardeen, Cooper y Schrieffer en 1957[1], llamada hoy en día teoría BCS, es la aparición de una interacción atractiva neta entre electrones en un líquido de Fermi. Esta interacción conduce a un apareamiento entre electrones de tal manera que la energía del sistema se reduce en la transición del estado normal al estado superconductor; esta energía es mínima cuando los electrones se aparean de tal manera que en el espacio recíproco tienen momentum y spin opuestos; a estos electrones apareados se les llama pares de Cooper¹. El estado base del sistema está formado de tal manera que si el estado de Bloch con momentum $\hbar\mathbf{k}$ y espín \uparrow está ocupado (desocupado) entonces el estado de Bloch con momentum $-\hbar\mathbf{k}$ y espín \downarrow está también ocupado (desocupado). Las excitaciones elementales del sistema se crean al romper parcialmente un par de Cooper, produciendo un estado ocupado en $\mathbf{k} \uparrow$ y desocupado en $-\mathbf{k} \downarrow$ o viceversa.

La transición de fase del estado normal al estado superconductor es caracterizada por la aparición de un parámetro de orden o potencial de pares cuyo módulo al cuadrado es proporcional a la densidad de electrones apareados y su fase expresa la correlación de largo alcance en el sistema.

Las propiedades de transporte, tales como efecto Josephson, características de corriente-voltaje, conductancia diferencial, propiedades térmicas, etc, se pueden estudiar a partir del comportamiento de las excitaciones elementales o cuasipartículas de un superconductor. Estas excitaciones son descritas mediante las ecuaciones de Bogoliubov-de Gennes (BdGE)[2], las que también son apropiadas

¹Esto es cierto para el caso en que la corriente en el superconductor sea cero. Por otra parte no siempre debe ser un estado singlete, por ejemplo en superconductores tipo p , el estado de espín es triplete.

para describir superconductores inhomogéneos, es decir superconductores en los que el parámetro de orden varía con la posición.

Las inhomogeneidades en el potencial de pares o parámetro de orden ocasiona que además de las dispersiones usuales electrón-electrón y hueco-hueco aparezcan nuevos canales de dispersión, electrón-hueco y hueco-electrón las que se conocen como dispersiones de Andreev[3]. Estas dispersiones han sido utilizadas para el estudio del efecto Josephson en junturas SNS[4], la dinámica y estructura de vórtices[5, 6], propiedades de transporte en junturas NS (Normal - Superconductor), NIS (Normal - Aislante - Superconductor), SSmS (Superconductor - Semiconductor- Superconductor), SIS (Superconductor - Aislante - Superconductor), [7-11].

En la primera sección explicamos el hamiltoniano efectivo, las ecuaciones de BdGE y el origen de las dispersiones electrón-hueco. En la segunda sección ilustramos estas dispersiones en el caso de una interfase NS. Por último mostramos que en un superconductor el potencial de pares ocasiona que las cuasipartículas se dispersen mediante la acción de fuerzas que dependen tanto de las variaciones de su módulo como de su fase.

2. HAMILTONIANO EFECTIVO Y ECUACIONES DE BOGOLIUBOV DE GENNES

Consideremos el siguiente hamiltoniano que describe un gas de electrones interactuantes

$$H = H_0 + H_1, \quad (1)$$

$$H_0 = \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) H_e(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

$$H_2 = -\frac{V}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\beta}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$$H_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + U_0(\mathbf{r}) - \mu, \quad (4)$$

donde $\widehat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r})$ es un operador de campo fermiónico que destruye un electrón con espín α en la posición \mathbf{r} , $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es el potencial vectorial debido a la presencia de campos electromagnéticos, $U_0(\mathbf{r})$ describe cualquier potencial escalar que actúe sobre el sistema y en el que pueden estar incluidos efectos de la red de iones, fronteras, impurezas, etc. y μ es el potencial químico. H_1 representa la interacción atractiva neta entre electrones caracterizada por una constante $V > 0$.

Para poder resolver el sistema descrito por el hamiltoniano H de la ecuación (1), se realiza una aproximación de campo medio donde el término que involucra cuatro operadores de campo es reemplazado por términos que actúan sólo sobre una partícula a la vez

$$\begin{aligned} & \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \cong \\ & \left\langle \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \right\rangle \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) + \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \left\langle \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \right\rangle \widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \\ & + \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \left\langle \widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \right\rangle - \left\langle \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \right\rangle \left\langle \widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \right\rangle \\ & \quad - \left\langle \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \right\rangle \left\langle \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \right\rangle \end{aligned}$$

El símbolo $\langle \rangle$ denota promedio estadístico. En esta aproximación se han despreciado las fluctuaciones cuadráticas medias del producto de dos operadores de campo. Con lo anterior se obtiene el hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned} H_{\text{ef}} = & \sum_\alpha \int d\mathbf{r} \widehat{\Psi}_\alpha^+(\mathbf{r}) \left[H_e(\mathbf{r}) + U_{HF}(\mathbf{r}) \right] \widehat{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}) \\ & + \int d\mathbf{r} \left[\widehat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) + \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \Delta^*(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \right] + \text{cte} \quad (5) \end{aligned}$$

con

$$\Delta(\mathbf{r}) = V \left\langle \widehat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \right\rangle \quad (6)$$

y

$$U_{HF}(\mathbf{r}) = -V \left\langle \widehat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right\rangle = -V \left\langle \widehat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \widehat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) \right\rangle \quad (7)$$

U_{HF} es el potencial usual de Hartree Fock y los operadores que lo acompañan destruyen y crean un electrón conservando el número de partículas. Por otra parte, los términos que acompañan a $\Delta(\mathbf{r})$ o $\Delta^*(\mathbf{r})$ crean o destruyen dos electrones de espín opuesto respectivamente, es decir crean o destruyen pares de Cooper y no conservan el número de partículas, debido a esto llamamos a $\Delta(\mathbf{r})$ potencial de pares.

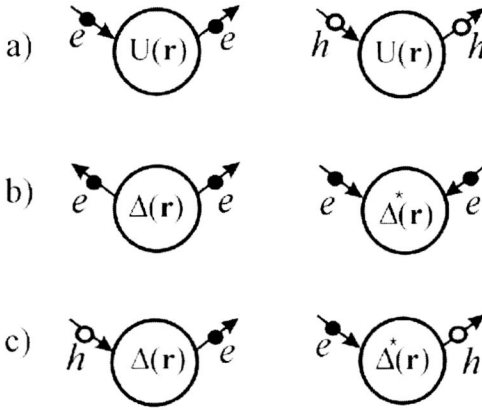


FIGURA 1. a) Dispersiones electrón-electrón o hueco-hueco debidas al potencial U_0 o U_{HF} , b) creación o destrucción de un par de Cooper mediante el potencial de pares $\Delta(\mathbf{r})$, c) la creación o destrucción de pares de electrones se pueden tratar como dispersiones hueco-electrón o electrón-hueco.

Lo anterior también se manifiesta en la ecuación (6), donde el promedio estadístico se efectúa sobre un sistema con un número indeterminado de partículas para que $\Delta(\mathbf{r})$ sea diferente de cero. Esta indeterminación es debida a que el hamiltoniano efectivo no conmuta con el operador número y por lo tanto no conserva el número de partículas. Se puede mostrar [12, 13] que el número de partículas del sistema y la fase del potencial de pares ϕ , son variables conjugadas y por lo tanto cumplen la relación de indeterminación

$$\Delta N \Delta \phi \geq 1. \quad (8)$$

Debido a que en el superconductor $\Delta N \gg 0$ la fase del sistema se puede fijar y el estado superconductor es un estado coherente.

El potencial escalar $U(\mathbf{r})$ es representado esquemáticamente en la figura 1a), dispersando electrones en electrones o huecos en huecos. Por otra parte, el potencial $\Delta(\mathbf{r})$ o $\Delta^*(\mathbf{r})$ es representado en la figura 1b) creando o destruyendo pares de Cooper respectivamente. En la figura 1c) observamos como la destrucción de un par de electrones también se puede representar como la destrucción de un electrón y la creación de un hueco; similarmente la creación de dos electrones se puede tratar como la destrucción de un hueco y la creación de un electrón. Esto nos permite afirmar que las dispersiones electrón-hueco y hueco-electrón son debidas a la aparición del potencial de pares en el estado superconductor.

El hamiltoniano efectivo al ser cuadrático en sus operadores puede ser diagonalizado mediante una transformación de Bogoliubov [2, 7]

$$\widehat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \sum_n [u_n(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n,\uparrow} - v_n^*(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n,\downarrow}^+], \quad (9)$$

$$\widehat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \sum_n [u_n(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n,\downarrow} + v_n^*(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n,\uparrow}^+], \quad (10)$$

$$\widehat{\psi}_{\uparrow}^+(\mathbf{r}) = \sum_n [u_n^*(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n\uparrow}^+ - v_n(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n\downarrow}], \quad (11)$$

$$\widehat{\psi}_{\downarrow}^+(\mathbf{r}) = \sum_n [u_n^*(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n\downarrow}^+ + v_n(\mathbf{r}) \widehat{\gamma}_{n\uparrow}], \quad (12)$$

con $\widehat{\gamma}_{n,\alpha}$ y $\widehat{\gamma}_{n,\alpha}^+$ operadores de destrucción y creación fermiónicos.

Las funciones $u_n(\mathbf{r})$ y $v_n(\mathbf{r})$ deben cumplir las ecuaciones de Bogoliubov de Gennes (BdGE) [2]

$$E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_e(\mathbf{r}) + u_{HF}(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -(H_e(\mathbf{r}) + U_{HF}(\mathbf{r}))^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

para que las transformaciones (9)-(12) diagonalicen el hamiltoniano (5), es decir se obtiene finalmente

$$H_{\text{ef}} = E_B + \sum_{n,\alpha} E_n \widehat{\gamma}_{n,\alpha}^+ \widehat{\gamma}_{n,\alpha}. \quad (14)$$

En estas ecuaciones E_B es la energía del estado base y E_n son las energías de las excitaciones elementales o cuasipartículas del sistema, creadas o destruidas por los operadores $\hat{\gamma}_{n,\alpha}^+$ o $\hat{\gamma}_{n,\alpha}$. Las energías E_n son determinadas por las soluciones de las ecuaciones de BdGE [9]. Si en (13) $\Delta(\mathbf{r})$ fuese cero se obtendrían dos ecuaciones desacopladas, una para electrones ($u_n(\mathbf{r})$) con energías $E \geq 0$ y otra para huecos ($v_n(\mathbf{r})$) con energías $E \leq 0$. El efecto del potencial $\Delta(\mathbf{r})$ es acoplar estas dos ecuaciones (electrones y huecos) de tal manera que la ecuación (11) describe cuasipartículas mediante una función de onda espinorial de dos componentes (electrón y hueco)

$$\phi_n(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Para aclarar el significado de una cuasipartícula del superconductor examinemos una de las transformaciones inversas de Bogoliubov para el operador $\hat{\gamma}_{n,\uparrow}$ que se obtiene de (9) y (12)

$$\hat{\gamma}_{n,\uparrow} = \int d\mathbf{r} \left[\hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}) + \hat{\Psi}_{\uparrow}^+(\mathbf{r}) v_n^*(\mathbf{r}) \right]. \quad (16)$$

En esta ecuación podemos observar que el efecto del operador de destrucción de cuasipartículas $\hat{\gamma}_{n,\uparrow}$ es destruir un electrón con espín \uparrow en el estado n , integrando sobre todas las amplitudes de probabilidad $u_n^*(\mathbf{r})$ y destruir² un hueco con espín \downarrow en el estado n , integrando sobre todas las amplitudes de probabilidad $v_n^*(\mathbf{r})$. Finalmente para examinar aún más el significado de $u_n(\mathbf{r})$ y $v_n(\mathbf{r})$ de las ecuaciones (9) y (12) podemos obtener las siguientes expresiones para las componentes de la función de onda de una cuasipartícula [14]

$$\langle \Phi | \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) | \Phi_n \rangle = u_n(\mathbf{r}), \quad (17)$$

$$\langle \Phi | \hat{\Psi}_{\uparrow}^+(\mathbf{r}) | \Phi_n \rangle = v_n(\mathbf{r}), \quad (18)$$

con $|\Phi\rangle$ un estado de muchos cuerpos del sistema en el cual el estado n de cuasipartícula está definitivamente vacío, en $|\Phi_n\rangle$ los

²El efecto de un operador $\hat{\psi}_{\alpha}^+$ es crear un electrón o destruir un hueco.

mismos estados de cuasipartícula son ocupados como en $|\Phi\rangle$ y adicionalmente el estado de cuasipartícula n está ocupado.

El elemento de matriz (17) da la amplitud de probabilidad para la transición del estado $|\Phi_n\rangle$ al estado $|\Phi\rangle$, si se remueve un electrón con espín \uparrow en el punto \mathbf{r} del estado $|\Phi_n\rangle$, por lo tanto podemos llamar a $u_n(\mathbf{r})$ la función de onda para la componente de electrón de la cuasipartícula en el estado n .

El elemento de matriz (18) da la amplitud de probabilidad para la transición del estado $|\Phi_n\rangle$ al estado $|\Phi\rangle$, si un electrón con espín \downarrow es adicionado en $|\Phi_n\rangle$ en el punto \mathbf{r} , de este modo podemos considerar a $v_n(\mathbf{r})$ como la función de onda para la componente de hueco de la cuasipartícula en el estado n .

Reemplazando las transformaciones de Bogoliubov, (9)-(12) en las ecuaciones (6) y (7), podemos encontrar las relaciones de auto-consistencia para el potencial de Hartree-Fock y para el potencial de pares

$$U_{HF}(\mathbf{r}) = -V \sum_n [|u_n(\mathbf{r})|^2 f_n + |u_n(\mathbf{r})|^2 (1 - f_n)] . \quad (19)$$

$$\Delta(\mathbf{r}) = V \sum_n u_n(\mathbf{r}) v_n^*(\mathbf{r}) (1 - 2f_n) , \quad (20)$$

con $f_n \equiv f(E_n) = \langle \hat{\gamma}_n^+ \hat{\gamma}_n \rangle$ la función de Fermi Dirac, la que nos da la probabilidad de que un estado de cuasipartícula n este ocupado a la temperatura T .

3. REFLEXIONES DE ANDREEV EN JUNTURAS NS

Para ilustrar el efecto del potencial de pares sobre la dispersión de cuasipartículas consideremos una juntura NS como muestra la figura 2, donde el potencial de pares se puede modelar como $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(z)$.

Debido a las variaciones $\Delta(z)$ cuando un electrón incide desde la parte normal ($z \rightarrow -\infty$) este puede reflejarse como electrón o como hueco. Se puede mostrar que al efectuar una aproximación similar a la WKB en las ecuaciones de Bogoliubov de Gennes [15](llamada

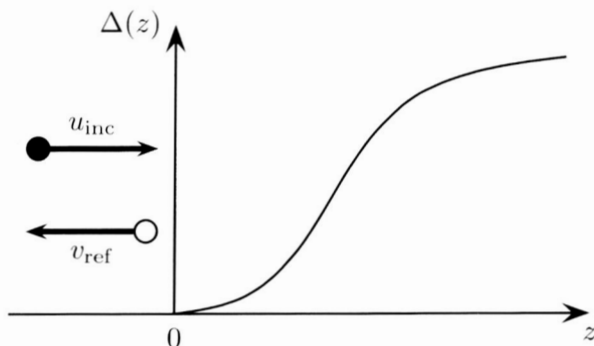


FIGURA 2. Un electrón incide desde la región normal hacia el superconductor. En la aproximación semiclásica el electrón es reflejado como hueco.

aproximación BKJT) las dispersiones electrón-hueco se dejan como único canal de dispersión y por lo tanto las soluciones de las ecuaciones de BdGE son de la forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(\mathbf{r}) \\ \tilde{v}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = e^{i\mathbf{k}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} \quad (21)$$

con

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{\text{inc}}(z) \\ v_{\text{refl}}(z) \end{pmatrix} \theta(-z) + \begin{pmatrix} u_{\text{trans}}(z) \\ v_{\text{trans}}(z) \end{pmatrix} \theta(z) \\ &= \begin{pmatrix} U_+ e^{ik_+ z} \\ V_+ e^{ik_- z} \end{pmatrix} \theta(-z) + \begin{pmatrix} U_+ e^{iS(z)} \\ V_+ B(z) e^{iS(z)} \end{pmatrix} \theta(z) \end{aligned} \quad (22)$$

y

$$\mathbf{k}_\rho = (k_x, k_y);$$

$$\boldsymbol{\rho} = (x, y)$$

$$k_\pm = \sqrt{k_{zF}^2 \pm 2mE/\hbar^2},$$

$$k_{zF}^2 = k_F^2 - k_\rho^2$$

En la aproximación BKJT la probabilidad de que el electrón incidente se refleje como electrón es mucho menor que la probabilidad de que se refleje como hueco y por lo tanto términos de la forma $u_{\text{refl}}(z) = U_- e^{-ik^+z}$ que describen al electrón reflejado no son tomados en cuenta. $S(z)$ y $B(z)$ son funciones que se determinan de las soluciones semiclásicas a partir de las ecuaciones de BdGE. En general el cálculo de S y B es aproximado y no detallaremos esto aquí, para el caso en que $z \rightarrow \infty$ las soluciones asintóticas para $u_{\text{trans}}(z)$ y $v_{\text{trans}}(z)$ son

$$\begin{aligned} u_{\text{trans}}(\infty) &= U^+ e^{ik^+z}, \\ v_{\text{trans}}(\infty) &= V^+ \frac{\Delta}{E + \sqrt{E^2 - \Delta(\infty)^2}} e^{ik^+z} \end{aligned} \quad (23)$$

y

$$k^+ = \sqrt{k_{zF}^2 + 2m \sqrt{E^2 - \Delta(\infty)^2} / \hbar^2}. \quad (24)$$

La densidad de corriente de probabilidad de cuasipartículas en dirección z es [16]

$$J_z = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(u^* \frac{du}{dz} - v^* \frac{dv}{dz} \right). \quad (25)$$

De la conservación del flujo de probabilidad se cumple que $\mathbf{J}_{\text{inc}} = \mathbf{J}_{\text{refl}} + \mathbf{J}_{\text{trans}}$ de donde se tiene que $R + T = 1$, siendo R y T los coeficientes de reflexión y transmisión definidos así:

$$\begin{aligned} R &= \frac{|J_{z,\text{refl}}|}{|J_{z,\text{inc}}|} \\ T &= \frac{|J_{z,\text{trans}}|}{|J_{z,\text{inc}}|}. \end{aligned} \quad (26)$$

De las soluciones asintóticas obtenemos los coeficientes de reflexión y transmisión

$$R = \left| \frac{\Delta(\infty)}{E + \sqrt{E^2 - \Delta(\infty)}} \right|^2 \quad (27)$$

$$T = 1 - R$$

Para $E < \Delta(\infty)$ obtenemos siempre $R = 1$, es decir que cuando la energía del electrón incidente es menor que la magnitud del potencial de pares en $z \rightarrow \infty$, el electrón siempre es reflejado, lo que es de esperarse ya que la energía del electrón no es suficiente para formar una excitación elemental en el superconductor.

4. FUERZAS SOBRE CUASIPARTÍCULAS

El efecto de un potencial es la aparición de una fuerza proporcional a su gradiente, por lo tanto es de esperarse que en un superconductor inhomogéneo existan fuerzas que dependan del gradiente del potencial de pares, tanto de su módulo como de su fase. Hofmman y Kümmel [17] han encontrado estas fuerzas en una estrategia similar la empleada en el teorema de Ehrenfest y las han calculado para un paquete gaussiano que incide sobre una interfase N-S.

En esta parte es importante introducir las ecuaciones de BdGE dependientes del tiempo [2, 7] las cuales son

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}, t) \\ v(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_e(\mathbf{r}, t) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -H_e^*(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}, t) \\ v(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

con

$$H_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + U_0(\mathbf{r}) - \mu. \quad (29)$$

La fuerza más general que actúa sobre la cuasipartícula es definida por

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle_t, \quad (30)$$

donde el valor esperado de momentum para una cuasipartícula está definido como

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle_t &= (u^*(\mathbf{r}, t), v^*(\mathbf{r}, t)) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_e(\mathbf{r}, t) & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_h(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^*(\mathbf{r}, t) \\ v^*(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \\ &= (u^*(\mathbf{r}, t), v^*(\mathbf{r}, t)) \begin{pmatrix} -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) & 0 \\ 0 & -i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^*(\mathbf{r}, t) \\ v^*(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Usando las ecuaciones de BdGE dependientes del tiempo se obtiene [16]

$$\mathbf{f}_e = \int u^*(\mathbf{r}, t) \left[\frac{e}{2m} (\mathbf{p}_e \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{p}_e) - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla U \right] u(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (32)$$

$$\mathbf{f}_h = \int v^*(\mathbf{r}, t) \left[\frac{e}{2m} (\mathbf{p}_h \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{p}_h) - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + \nabla U \right] v(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (33)$$

$$\mathbf{f}_{\Delta 1} = -2 \operatorname{Re} \left[\int u^*(\mathbf{r}, t) (\nabla |\Delta|) e^{i\phi} v(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right], \quad (34)$$

$$\mathbf{f}_{\Delta 2} = \frac{4m}{\hbar} \int \mathbf{v}_S \operatorname{Im} (u^*(\mathbf{r}, t) \Delta v(\mathbf{r}, t)) d\mathbf{r}, \quad (35)$$

con $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y \mathbf{v}_S la velocidad superfluida dada por

$$\mathbf{v}_S = \frac{\hbar}{2m} \left(\nabla \phi - \frac{2e}{c\hbar} \mathbf{A} \right). \quad (36)$$

\mathbf{f}_e y \mathbf{f}_h son fuerzas de origen electromagnético que actúan sobre electrones (e) y huecos (h) y tienen una analogía con la fuerza de Lorentz, ver por ejemplo [18]. Las otras dos fuerzas $\mathbf{f}_{\Delta 1}$ y $\mathbf{f}_{\Delta 2}$ son debidas a las inhomogeneidades del potencial de pares; $\mathbf{f}_{\Delta 1}$ es debida a las inhomogeneidades del módulo del potencial de pares y es responsable de las dispersiones de Andreev; en $\mathbf{f}_{\Delta 2}$ aparecen

directamente las variaciones de la fase del potencial de pares y depende explícitamente de la llamada velocidad superfluida, la que es invariante bajo transformaciones de calibración. Esta fuerza ha sido utilizada [5, 6] para explicar el movimiento de vórtices en el marco de la teoría Nozières-Vinen-Warren y se han propuesto experimentos para su corroboración en interfaces N-S [17], semejantes a los realizados por Benistain [19, 20] en los que se han encontrado evidencias directas de las reflexiones de Andreev.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se realiza una revisión de la teoría de Bardeen, Cooper y Schrieffer de la superconductividad planteada para sistemas inhomogéneos haciendo énfasis en la manera como el hamiltoniano que describe el sistema superconductor surge de una teoría de campo medio. Esta aproximación conduce a la existencia de un potencial de pares autoconsistente que expresa la posibilidad de que electrones del sistema se condensen para formar pares de Cooper. Se muestra que este potencial es a la vez el parámetro de orden que surge en la transición del estado normal al superconductor, transición en la cual se rompe la simetría correspondiente a la conservación del número de partículas del sistema.

Se hace explícito el hecho de que la condensación de dos electrones a través del potencial de pares es equivalente a procesos de dispersión electrón-hueco o hueco-electrón por ese mismo potencial. Se muestra que las funciones de onda de un electrón y un hueco acopladas por el anterior mecanismo cumplen las ecuaciones de Bogoliubov de Gennes con las que se pueden describir las excitaciones elementales del sistema.

Finalmente se muestra mediante una estrategia similar a la empleada en el teorema de Ehrenfest, que en los procesos de dispersión de cuasipartículas surgen fuerzas sobre éstas debidas a las inhomogeneidades del potencial de pares.

Referencias

- [1] J. Bardeen , L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
- [2] P. G. de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, Benjamin (1966).
- [3] A. F. Andreev, *Sov. Phys. JETP* **19** (1964) 1228.
- [4] J. Bardeen and J. L. Johnson, *Phys. Rev. B* **5** (1972) 72.
- [5] S. Hofmann and R. Kümmel, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1319.
- [6] S. Hofmann and R. Kümmel, *Phys. Rev. B* **57** (1998) 7904.
- [7] R. Kümmel, *Z Phys.* **218** (1969) 472.
- [8] G. E. Blonder, M. Tinkham and T. M. Klapwijk, *Phys. Rev. B* **25** (1982) 4515.
- [9] C. Bruder, *Phys. Rev. B* **41** (1990) 4017.
- [10] U. Günsenheimer, U. Schüssler and R. Kümmel, *Phys. Rev. B* **49** (1994) 6111.
- [11] S. Kashiwaya, Y. Tanaka, M. Koyanagi and K. Kajimura, *Phys. Rev. B* (1996) 2667.
- [12] P. W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics*, Addison-Wesley (1984).
- [13] V. Niño y W. Herrera, *Rev. Col. Fis.* **32** (2000) 34.
- [14] R. Kümmel, *time-dependent Bogoliubov-de Gennes Equations, Physics and Applications of Mesoscopic Josephson Junctions* (1999) 19-37.
- [15] J. Bardeen, R. Kümmel, A. E. Jacobs and L. Tewordt, *Phys. Rev.* **187** (1969) 556.
- [16] W. Herrera and V. Niño, *Phys. Stat. Sol. (b)* **220** (2000) 775.

-
- [17] S. Hofmann and R. Kümmel, *Z. Phys. B* **84** (1991) 237.
- [18] C. Cohen-tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics Vol. 1*, Hermann (1977).
- [19] P. A. Benistant, H. van Kempen, and P. Wyder, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 817.
- [20] P. A. Benistant, A. P. van Gelder, H. van Kempen, and P. Wyder, *Phys. Rev. B* **32** (1985) 3351.